华章数学译丛

24

Calculus and Its Applications

(Eighth Edition)

微积分及其应用

(原书第8版)

(美) Marvin L. Bittinger 著

杨奇 毛云英 译

机械工业出版社
China Machine Press

2007/08/16

(原书第8版)

微积分及其应用

微积分就好像橄榄球，必须有人给你示范如何去做，但是一旦你获得了真谛，哎呀，太简单了。

——Bert Jones

本书系统讲述微积分的基本概念、方法和应用。书中提供了大量经济、商业、生命科学、物理学、社会科学等方面的例题与习题，例如，投资与回报问题、广告效应问题、饮料罐的设计问题、种群增长问题、自然资源的消耗问题、地震的强度与震级问题、比赛门票问题等，充分展现了微积分在实际中的应用。另外，本书在讲授数学方法的同时，还介绍了利用相关的计算程序进行绘图和实现微积分中的相关计算，从而将现代计算机的绘图与计算功能恰当地引入到教学之中。

作者简介



Marvin L. Bittinger 于1968年在普度大学获得博士学位，现为印第安纳大学–普度大学印第安纳波利斯分校数学教育教授。他著有160多部有关数学发展、代数、三角学、微积分方面的数学教材。

Calculus and Its Applications (Eighth Edition)

www.PearsonEd.com

华章网站 http://www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
投稿热线：(010) 88379604
购书热线：(010) 68995259, 68995264
读者信箱：hzjsj@hzbook.com

ISBN 7-111-18992-2
9 787111 189923

HZ BOOKS 华章图书

ISBN 7-111-18992-2
定价：69.00 元

微积分及其应用 Calculus and Its Applications (原书第8版) (Eighth Edition) (美) Marvin L. Bittinger 著 机械工业出版社 China Machine Press

0172
43

华章数学译丛
24

Calculus and Its Applications

(Eighth Edition)

微积分及其应用

（原书第8版）

（美）Marvin L. Bittinger 著
杨奇 毛云英 译

F4401000214947

机械工业出版社
China Machine Press

2007/08/16

本书系统讲述了微积分的基本概念、方法和应用．主要内容包括：函数、图形和模型，微分法及其应用，指数函数与对数函数，积分及其应用，多元函数．书中提供了大量经济、商业、生命科学、物理学、社会科学等方面的例题与习题，充分展现了微积分在实际中的应用．

本书理论与应用并重，选材精练，例题丰富，注重思维方法的引导，可作为高等院校"高等数学"课程教材、参考书或双语教学的辅助教材．

Simplified Chinese edition copyright © 2006 by Pearson Education Asia Limited and China Machine Press.

Original English language title: *Calculus and Its Applications, Eighth Edition* (ISBN 0-321-16639-6) by Marvin L. Bittinger, Copyright © 2003.

All rights reserved.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Addison-Wesley.

本书封面贴有Pearson Education(培生教育出版集团)激光防伪标签，无标签者不得销售．

版权所有，侵权必究．

本书法律顾问　北京市展达律师事务所

本书版权登记号：图字：01-2005-0520

图书在版编目(CIP)数据

微积分及其应用(原书第8版)/(美)比廷杰(Bittinger, M. L.)著；杨奇，毛云英译．－北京：机械工业出版社，2006.7

(华章数学译丛)

书名原文：Calculus and Its Applications, Eighth Edition

ISBN 7-111-18992-2

Ⅰ.微…　Ⅱ.①比…　②杨…　③毛…　Ⅲ.微积分　Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第036776号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037)

责任编辑：迟振春

北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2006年7月第1版第1次印刷

186mm×240mm·37.25印张

定价：69.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译者序

本书译自美国Marvin L. Bittinger的《Calculus and Its Applications》第8版．

本书最突出的特色有以下两点．

1．充分展现微积分在实际中的应用．

作者广泛采集了微积分各部分内容在商业、经济、生命科学、物理学、社会科学等领域中的应用问题，精心编制出大量例题和习题．例如，投资与回报问题，广告效应问题，饮料罐的设计问题，人口或其他动物种群的增长与衰减问题，石油与天然气等资源的消耗问题，谋杀案中受害者被害时间或出土文物埋藏时间的测定问题，地震的强度与震级问题，美国职业篮球、棒球、曲棍球比赛的门票问题等等．如果你想对此作一初步浏览，可查阅书后的"应用索引"．这些源于实际的例题与习题，必将会激发起学生强烈的学习兴趣，使其感受到是在学习一门能够帮助人们深刻地观察世界和认识世界所不可或缺的科学．

2．恰当地引入了现代计算机的绘图与计算功能．

本书在讲授数学方法的同时，也讲授利用相关的计算程序进行绘图和实现微积分中的相关计算．对于学生来说，在计算机广泛应用的今天，这是十分必要的．

图形与计算数据所展现的直观特征最容易让学生接受．本书在阐述数学概念和结论时，经常结合具体实例利用计算机的绘图与计算功能作出图形或计算出结果，使学生对相关概念或结论获得一个直观的认识，这极大地减轻了学生在接受和理解上的困难．

本书内容精湛，理念清晰，论述深入浅出，书中各个章节都配备有大量习题，使学生有更多的演练机会，达到触类旁通的效果．本书可作为高等院校"高等数学"课程教材、参考书或双语教学的辅助教材．

由于时间仓促，译者水平有限，译文中疏漏之处在所难免，欢迎广大读者批评指正．

译　者

2007/08/16

前　言

本书是一本面向学生的应用微积分教材．书中的名词术语易于接受，并在使用时保持前后一致，便于学生理解其内容．书中提供了大量的例子，并且配备了许多精心设计的方法技巧板块，用以帮助学生直观想象所研究的课题．

微积分已广泛应用于商业、经济、生命科学、物理学、社会科学等许多领域，也应用于学生都感兴趣的一般领域．本书是微积分入门教材，适合一个学期的课程使用．虽然附录（基础代数复习）和第1章提供了充分的预备知识，使大多数具有不同经历的学生有一个统一的基础，但是读者必须学过中学代数课程．

第8版的新增内容

在习题中加强了应用

除了对本书稍作润色之外，这一版的侧重点是在习题中增加了许多新的应用．大部分应用源于商业与经济，但也有不少源于生命科学与物理学，以及社会科学中的实例．

下面给出一些例子．

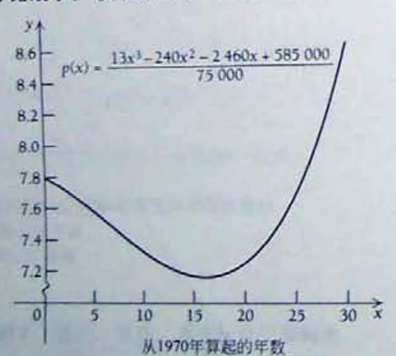
商业与经济

摘自习题3.4：

100. 小企业．由非农场主产生的收入在美国国民收入中所占百分比可用函数

$$p(x)=\frac{13x^3-240x^2-2\,460x+585\,000}{75\,000}$$

来建模，其中x是从1970年算起的年数．根据这个模型，从1970年到2000年间的哪一年中这个百分比最小？（资料来源：U. S. Census Bureau.）



摘自习题3.5：

33. 个性化车号牌照．根据定价模型，如果个性化车号牌照的初始收费提价1美元，则在某州将申请该牌照的人数比率会下降0.04%．（资料来源：E. D. Craft, "The demand for vanity (plates): elasticities, net revenue maximization, and deadweight loss," *Contemporary Economic Policy*, Vol. 20, 133-144 (2002).）

a)最近，马里兰州的个性化牌照的初始收费是25美元，且该州持有个性化牌照的人数比率是2.13%．试用这个信息构造一个需求函数$D(p)$来描述将要申请个性化车号牌照的马里兰州人所占的百分比．

b)求将使收益最大化的初始收费价格p．

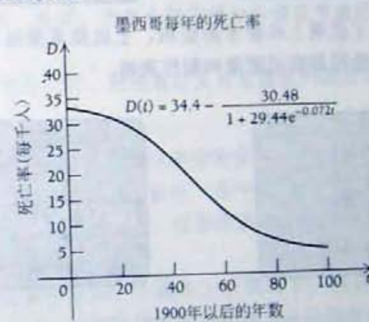
生命科学与物理学

摘自习题4.1：

死亡率．在墨西哥，每千人每年的死亡率可用函数

$$D(t)=34.4-\frac{30.48}{1+29.44e^{-0.072t}}$$

来表示，其中t是1900年以后的年数．（资料来源：B. J. L. Berry, L. S. Hall, R. Hernandez-Guerrero, and P. H. Martin, "México's Demographic Transition: Public Policy and Spatial Process," *Population and Environment*, Vol. 21, 363-383(2000).）在60和61题中采用上述资料．



60. a)依据这个模型，2010年墨西哥的死亡率是多少？2050年呢？

b)求$\lim_{t\to\infty}D(t)$，并解释其意义．

61. a)求$D'(t)$，并解释其意义．

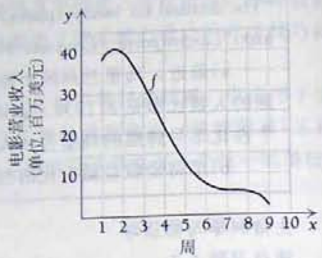
b)在2005年到2006年之间，墨西哥的死亡率下降了多少？

2007/08/16

本书的其他特色

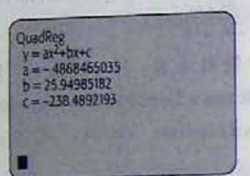
提前讲述函数

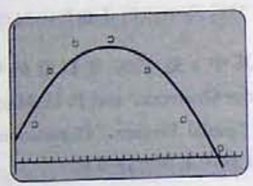
为了把必需的复习总时数降到最低限度，我们把代数复习放在附录中．这样，开篇第 1 章就可以讲述函数、图像和模型，并且可以较早地引入上机技术的应用．1.3 节包含了求定义域与值域．提早讲述函数并扩展其范围，为讲解各种函数的许多应用创造了条件，例如讲解绘图应用．



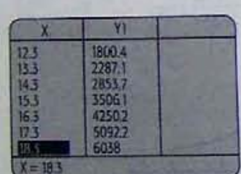
数学模型、曲线拟合与回归

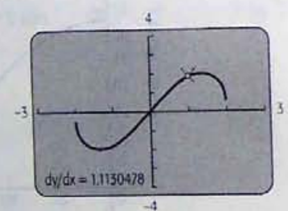
这一版本仍旧把重点放在数学模型上，也适当地把重点放在上机技术这个强项上．例如，作为选学课题，在 1.6 节介绍用绘图器建立模型，然后在整本书中多次使用其技巧．（在本书中，用专有名词"绘图器"表示所有绘图计算器和绘图软件．）

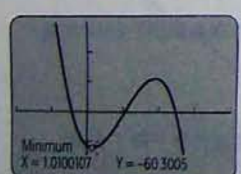


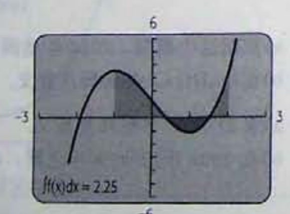


上机技术演练专项　为了说明上机技术的应用，上机技术演练专项(共 102 处)贯穿全书．只要适宜，也将随时引入用绘图器模拟图像和制作表格．









现在为学生和教师备有四种形式的上机技术演练，用来研究例行计算中的关键思想．

- 课程．给学生提供一个例子，随后给出要做的练习．
- 验算．教给学生如何用绘图器验证所求的解．
- 练习．这只是一些让学生用绘图器去完成的练习．
- 探索．提出一些问题引导学生去钻研．

上机技术演练习题　大多数章节后的习题中都包括一些涉及上机技术的基本题，它们或者用图像表示，或者位于"上机技术演练"之下．这些习题也出现在"概要与复习"以及章末"测验"中．

直觉体验

虽然"直觉"一词有多种含义和解释，但在这里指的是"基于体验"．在整本书中，在给出某个概念时，为了使学生的认识过程基于以往的数学体验或作者提供的新体验，首先要设计好如何提出该概念，最后才正式给出这个概念．对此，可用下面几个例子来说明．

- 第 2 章的导数定义是在关于平均变化率的一番讨论中提出来的．这样的描述比严格地用斜率的几何概念描述更容易理解，也更实际．
- 当介绍涉及体积的最大值问题时，需导出一个函数，再求其最大值．首先要求学生不急于用标准的微分法求解，而是把它暂搁一边，先作数值表，画函数图形，然后估计其最大值．这种体验可以使学生更深入地理解这个问题．他们不仅认可采用不同的尺寸会得到不同的体积，而且也认可产生最大体积的尺寸可以通过计算的结果来推测或估计．
- 相对极大值和相对极小值（3.1～3.3 节）与绝对极大值和绝对极小值（3.4 节）安排在第 3 章各个独立的节中．这样，当学生使用微分学概念考虑图形时，他们可以逐渐增强对这些课题的理解．
- 在第 4 章中讲解 e 的定义时，用图表以及对永续复利的讨论来增进对 e 的理解．

应用

从广泛的基础领域搜集了大量既切题又真实的应用，精心整合成遍及全书的应用例题和习题，每章还特意单独设置了"应用"部分．在这一版中，对这些内容又进行了更新和扩充，其中有不少是使用真实数据的应用．除此之外，每章的篇头都包含一个应用，供将要学习该章的学生作预习．

习题中的应用按照其内容分别列于下面各个标题之下：商业与经济、生命科学与物理学、社会科学以及一般兴趣．这样的编排既利于教师把特定的习题布置给相关专业的学生去做，也利于学生知道是否可以把部分习题应用于其专业．

下面列出一些应用实例．

- 在第 1 章中就讨论诸如复利、总收益、成本与利润以及供给与需求这些函数，这为遍及本书的后续应用建立起一个平台．
- 在第 2 章中，利用新的商业应用介绍平均变化率和瞬时变化率的概念．这比第 3 章中介绍微分法的应用要早，后者包括极大-极小[illegible]微分法和[illegible]化率．

2007/08/16

在第 4 章中研究指数模型时，其他的应用，如永续复利和自然资源的需求也被列为考

- 在第 4 章中研究指数模型时，其他的应用，如永续复利和自然资源的需求也被列为考
察对象．在第 4 章中，单独设置了一节论述增长与衰减，这为介绍与这些概念有关的
应用奠定了基础．单独设置了一章(第 6 章)论述积分的应用，其中包括用较大的篇幅介绍连续概率．
- 单独设置了一章(第 6 章)论述积分的应用，其中包括用较大的篇幅介绍连续概率．
- “上机技术的深入应用”专项包括了一些有趣的热门话题，例如，职业篮球队员的薪金，
预测一个本垒打将运行的距离，使用票房营业总收益数据确定录像带销售的开始时间．

教学法的特色

各章篇头

每章篇头都包括一个应用，为的是激励学生对该章内容的渴望．这些应用也为主要的微积分课题提供一个生动、直观的介绍．

各节要点

每当开始新的一节，都首先陈述该节的要点．这些要点使学生对该节内容一目了然，并知道需掌握的重点．

习题的多样性

这一版有 3 300 多道习题，不仅兼顾了商业与经济应用等各领域内容、精细的上机技术板块以及特设的图像等，而且还包括下述各具特色的习题．

上机技术演练题． 这些习题出现在“上机技术演练”专项中，也出现在各个章节的习题中．

综合题． 综合题放置在大多数章节的习题集、所有的概要与复习以及章末测验的末尾．它们需要学生超越该节或章的基本要求，都是围绕学习内容设计的一些复杂问题和需要作进一步思考的问题．

思考与书面题． 这些习题既出现在各节习题中，也出现在大多数章节习题末尾的综合题中．用记号*表示这类习题．这些题要求学生用自己的语言解释数学概念，以增强他们对相关概念的理解．

应用． 在大多数章节习题中都设置了应用问题部分．这些题按照其内容分别列于下面的各个标题之下：商业与经济、生命科学与物理学、社会科学以及一般兴趣．每道题都配有一个简要描述来说明其主题．

复习与测验

概要与复习． 每章末尾有一个概要与复习，其目的是为学生提供有效复习所必需的全部教学内容．书后有答案，并标注有参看的章节，以便学生在做某道题有困难时，容易找到需再去学习的准确内容．在每个概要与复习中都有一个关键术语，并标注有参看的页数，以帮助学生查到这些重要概念．

测验． 每章结束都有一个包括综合题和上机技术题的章测验题．书末还有一个总复习题，也可作为期末的检测题．书后有章测验题以及总复习题的答案，且标注有参考的章节．

致谢

作者已想方设法确保原稿的准确性．由许多敬业的人们组成的团队担负起了监督的责任，

他们认真细致地检查了出版过程的每一个环节．我尤其要感谢 Elka Block 和 Kathy Diamond 的有益建议、认真校对以及技术上的核查，他们超出其职责要求的工作值得高度赞赏；同样感谢 Judith A. Beecher 和 Judith A. Penna 在前几版中为提高本书的质量所做的辛勤工作；还要对我的学生表达我的谢意，感谢他们在前几版中提出建议和批评；感谢 Barbara Johnson 和 Judy Penna 认真检查和校对原稿，确保了数学上的准确性；感谢 John A. Quintanilla 和 Neal Brand（北得克萨斯大学），他们慷慨地奉献了许多新的应用资料．除此之外，还要感谢 Scott Mortensen 和 Ken Hurley 对于技术方面的资料所做的贡献．

最后，下列的评审者所提供的深思熟虑的精辟评论对本书修订版的帮助是无法估量的．

Jane Crane，Boise State University(柏斯州立大学)

Kris Galicki，University of New Mexico(新墨西哥大学)

Joe Koebbe，Utah State University(犹他州立大学)

John Mathews，California State University-Fullerton(加利福尼亚州立大学富乐登分校)

John Quintanilla，University of North Texas(北得克萨斯大学)

M. L. B

2007/08/16

重要公式一览表

第 2 章

1. 幂法则．对于任意实数 k，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^k=kx^{k-1}$．
2. 常值函数的导数．如果 $F(x)=c$，则 $F'(x)=0$．
3. 常数乘函数的导数．如果 $F(x)=cf(x)$，则 $F'(x)=cf'(x)$．
4. 和的导数．如果 $F(x)=f(x)+g(x)$，则 $F'(x)=f'(x)+g'(x)$．
5. 差的导数．如果 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F'(x)=f'(x)-g'(x)$．
6. 乘积的导数．如果 $F(x)=f(x)g(x)$，则 $F'(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$．
7. 商的导数．如果 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，则

$$F'(x)=\frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}.$$

8. 广义幂法则．如果 $F(x)=[g(x)]^k$，则

$$F'(x)=k[g(x)]^{k-1}g'(x).$$

9. 链式法则．如果 $F(x)=f[g(x)]$，则 $F'(x)=f'[g(x)]g'(x)$．或者，如果 $y=f(u)$且 $u=g(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

第 4 章

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{f(x)}=f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$
11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x=\frac{1}{x}$，$x>0$；

    $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)=f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}$，$f(x)>0$
12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x|=\frac{1}{x}$，$x<0$；

    $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|f(x)|=f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}$，$f(x)<0$
13. 如果$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP$，则 $P(t)=P_0\mathrm{e}^{kt}$．
14. 如果$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=-kP$，则 $P(t)=P_0\mathrm{e}^{-kt}$．
15. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x=(\ln a)a^x$

16. $\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$, $x>0$;

$\frac{d}{dx}\log_a|x|=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$, $x<0$

17. $a^x=e^{x(\ln a)}$

第 5 章

18. $\int k\,dx = kx + C$

19. $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1$;

$\int (r+1)x^r dx = x^{r+1} + C, r \neq -1$

20. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, x > 0$;

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x < 0$

21. $\int e^x dx = e^x + C$

22. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

23. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

24. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

书后的表 1 中列出了更多的积分公式.

目　录

译者序

前言

重要公式一览表

第 1 章　函数、图形与模型 …… 1
- 1.1 图形与方程 …… 1
- 1.2 函数与模型 …… 13
- 1.3 求定义域与值域 …… 27
- 1.4 斜率与线性函数 …… 36
- 1.5 其他函数与模型 …… 51
- 1.6 数学模型与曲线拟合 …… 69
- 概要与复习 …… 79
- 测验 …… 83
- 上机技术的深入应用 …… 85

第 2 章　微分法 …… 88
- 2.1 极限与连续性：数值法与图示法 …… 88
- 2.2 极限：代数法 …… 101
- 2.3 平均变化率 …… 105
- 2.4 用差商的极限求导数 …… 113
- 2.5 求导法则：幂法则与和-差法则 …… 127
- 2.6 瞬时变化率 …… 138
- 2.7 求导法则：乘积法则与商法则 …… 146
- 2.8 链式法则 …… 153
- 2.9 高阶导数 …… 161
- 概要与复习 …… 164
- 测验 …… 166
- 上机技术的深入应用 …… 167

第 3 章　微分法的应用 …… 171
- 3.1 利用一阶导数求极大值、极小值和描绘图形 …… 171
- 3.2 利用二阶导数求极大值、极小值和描绘图形 …… 186
- 3.3 描绘函数的图形：渐近线与有理函数 …… 201
- 3.4 利用导数求绝对极大值与绝对极小值 …… 217
- 3.5 最大-最小值问题：在商业与经济中的应用 …… 230
- 3.6 微分 …… 245
- 3.7 隐微分法与相关变化率 …… 250
- 概要与复习 …… 256
- 测验 …… 258
- 上机技术的深入应用 …… 259

第 4 章　指数函数与对数函数 …… 262
- 4.1 指数函数 …… 262
- 4.2 对数函数 …… 275
- 4.3 应用：无约束增长模型，$dP/dt = kP$ …… 291
- 4.4 应用：衰减 …… 304
- 4.5 a^x 和 $\log_a x$ 的导数 …… 316
- 4.6 经济应用：需求弹性 …… 321
- 概要与复习 …… 326
- 测验 …… 328
- 上机技术的深入应用 …… 329

第 5 章　积分 …… 334
- 5.1 积分 …… 334
- 5.2 面积与定积分 …… 343
- 5.3 和的极限与累积 …… 354
- 5.4 定积分的性质 …… 366
- 5.5 积分法：换元法 …… 371
- 5.6 积分法：分部积分法 …… 377
- 5.7 积分法：积分表 …… 383
- 概要与复习 …… 387
- 测验 …… 388
- 上机技术的深入应用 …… 389

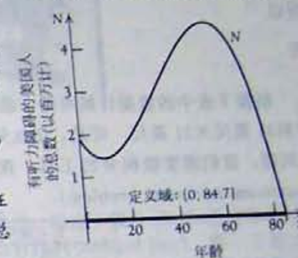
第 6 章　积分的应用 …… 392
- 6.1 经济应用：消费者盈余与生产者盈余 …… 392
- 6.2 模型 $\int_0^T P_0 e^{kt} dt$ 和 $\int_0^T P_0 e^{-kt} dt$ 的应用 …… 398
- 6.3 广义积分 …… 405
- 6.4 概率 …… 410
- 6.5 概率：期望值；正态分布 …… 420
- 6.6 体积 …… 430

2007/08/16

6.7 微分方程 ………………………… 432
概要与复习 ………………………… 440
测验 ………………………… 442
上机技术的深入应用 ………………………… 443
第7章 多元函数 ………………………… 446
7.1 多元函数 ………………………… 446
7.2 偏导数 ………………………… 454
7.3 高阶偏导数 ………………………… 459
7.4 极大-极小值问题 ………………………… 461
7.5 应用：最小二乘法 ………………………… 470
7.6 约束极大值和极小值：拉格朗日乘数法 ………………………… 477
7.7 重积分 ………………………… 484
概要与复习 ………………………… 487
测验 ………………………… 488
上机技术的深入应用 ………………………… 489
总复习题 ………………………… 493
附录 基础代数复习 ………………………… 495
表 ………………………… 506
照片来源 ………………………… 508
答案 ………………………… 509
应用索引 ………………………… 562
上机技术演练索引 ………………………… 568
索引 ………………………… 570

第1章 函数、图形与模型

应用(有听力障碍的美国人) 有听力障碍的美国人的总数 N(以百万计)看作年龄 x 的函数时，其图形可用右下图近似表示(资料来源：American Speech-Language Hearing Association)．这个图形的方程是多项式函数 $N(x)=-0.000\,06x^3+0.006x^2-0.1x+1.9$．试用图形确定其定义域．



因为人的年龄不可能是负数，所以不考虑负输入．在本问题中，负输出也没有意义．因此其定义域是区间 $[0, 84.7]$．

》》》》

这个问题出现在习题 1.3 的 58 题中．

引言 本章介绍函数及其图形和应用，还介绍我们在全书中要多次考察的许多课题，如供给与需求、总成本、总营业收入、总利润等，以及数学模型与曲线拟合的概念．

在供选学的上机技术演练中还介绍使用绘图计算器或绘图软件(以后称之为绘图器)的技巧．在《Graphing Calculator Manual》(GCM，绘图计算器手册)中详细介绍有关按键操作的知识．

学习本章需要做一些代数复习，因而应同时学习附录．

1.1 图形与方程

要点

- 用图形表示方程．
- 用图形作为数学模型来作预测．
- 实施涉及复利的计算．

什么是微积分

什么是微积分？在本课程一开始，像这一节就提出这个有代表性的问题．我们暂对这个新问题做简便的回答，更完整的回答将贯穿全书．



考虑如右图所示广告牌．下面是一个代数问题，它与这个广告牌有关．试求解这个问题．(如果需作代数复习，请参看附录．)

代数问题 所见公路旁的一块直立的长方形广告牌，其周长为 124 英尺[⊖]．它的长比它的高的 3 倍还多 6 英尺．求这个广告牌的尺寸．

答案是：长为 48 英尺，高为 14 英尺．

下面是一个微积分问题，它与这个广告牌有关．请解决这个问题．

⊖ 英尺的单位符号为 ft，1ft=0.304 8 m．——编辑注

2007/08/16

微积分问题　要做一个周长为 124 英尺的广告牌，其周长一定，而其面积越大越好．什么样的尺寸可以使广告牌的面积最大？

要解决这个问题，一个办法是，选取广告牌的若干组尺寸，计算所得到的相应面积，然后确定哪一组可使其面积最大．如果你会使用计算机电子表格程序，你就可以创建如下面所展示的表，设 l 代表周长为 124 英尺的矩形的长，h 代表高．则

$$2l+2h=124,$$

所以

$$l+h=62,$$

而

$$A=lh.$$

根据下表中的数据计算可得，最大面积可能是 961 平方英尺，即边长为 31 英尺的正方形面积31 英尺×31 英尺．可是，怎么知道确实没有其他的尺寸可以使其面积更大呢？要回答这个问题，我们需要微积分的工具．在第 3 章中，我们将更详细地研究这个极大-极小值问题

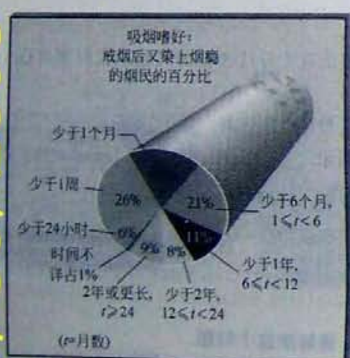
2 (maximum-minimum problem)．

	长 l(英尺)	高 h(英尺)	面积 $A=lh$(平方英尺)
周长为 124 英尺的矩形的尺寸	34	28	952
	32	30	960
	31.5	30.5	960.75
	31	31	961 ←最大面积
	30.4	31.6	960.64

在微积分中，我们要考虑的其他课题是，曲线在一点的斜率、变化率、曲线下方的面积、量的累积以及许多统计学应用．

图形

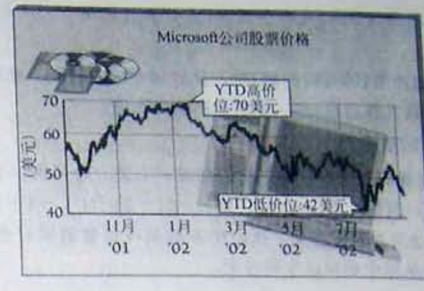
在报刊杂志上，我们看到各种各样的图形．下面给出几个例子．研究图形是微积分的一个主要方面．图形可帮助我们观察事物间的相互关系．例如，展示 Microsoft 公司股票价格的图形说明，股价如何随时间变化．在微积分中常考虑的一个课题是，一个量的变化如何影响另一个量的变化．



资料来源：Interep Research，Simmons



资料来源：Louis Harris for Nicotrol and the American Lung Association

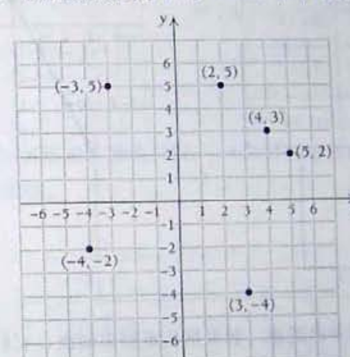


资料来源：Bloomberg Business News

3

有序对与图形

平面上的每一个点对应于一个有序数对．注意，在下图中，对应于数对(2，5)的点不同于对应于数对(5，2)的点．这就是为什么称(2，5)那样的数对为**有序对**(ordered pair)．第一个数 2 称为点的**第一坐标**(first coordinate)，而第二个数 5 称为它的**第二坐标**(second coordinate)．统称为点的坐标(coordinates of point)．常称竖直线为 y 轴(y-axis)，水平线为 x 轴(x-axis)．



方程的图形

两个变量的方程的**解**(solution)是一个有序数对，当用这个数对代替变量时，它给出一个真实语句．如果不另作说明，通常按字母表顺序来取变量．例如，(−1，2)是方程 $3x^2+y=5$ 的解，这是因为，当用解 −1 代替 x，−2 代替 y 时便得到一个真实语句：

$3x^2+y$	=	5
$3(-1)^2+2$	?	5
$3+2$		
5		真

定义 一个方程的图形(graph)是一个图画(或动点的轨迹——译者注)，它描绘的所有有序对都是该方程的解.

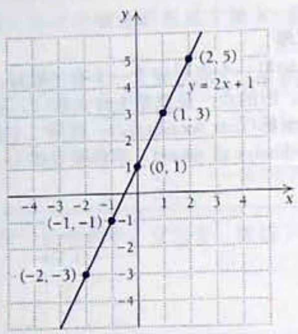
当描绘出足够多的有序对(即方程的解)时，就得到方程的图形，看到一个图像. 图形可能是一条直线、一条曲线(或几条曲线)或一些其他形状的图像.

4

例 1 作 $y=2x+1$ 的图形.

解 先求一些由解组成的有序对，并把它们列成一个表. 为了求一个有序对，可以选取任一个数为 x，然后确定 y，例如，取 $x=-2$，则 $y=2(-2)+1=-4+1=-3$；我们是用 -2 代替方程 $y=2x+1$ 中的 x. 为均衡起见，我们使 x 取某些负数的同时也取某些正数. 如果一个数取在图纸以外，通常从图中删掉这个有序对.

x	y	(x, y)
-2	-3	$(-2, -3)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	1	$(0, 1)$
1	3	$(1, 3)$
2	5	$(2, 5)$



(1)取 x 的任意值.
(2)计算 y.
(3)组成数对 (x, y).
(4)描点.

描出各点以后，就得到图中的图像. 如果描出足够多的点，它们将形成一条实线. 可以用直尺画这条实线，并且标上 $y=2x+1$. ■

例 2 作 $3x+5y=10$ 的图形.

解 可以取 x 的各值代入方程然后求出 y 的各值，但是先解出 y 可以减少算术计算○.

$$3x+5y=10$$

$$3x+5y-3x=10-3x \qquad \text{减 } 3x$$

$$5y=10-3x \qquad \text{化简}$$

○ 当使用绘图器时，需熟悉求 y 的技巧.

$$\frac{1}{5}\cdot 5y=\frac{1}{5}\cdot(10-3x) \qquad \text{乘以}\frac{1}{5}\text{，或除以 5}$$

$$y=\frac{1}{5}\cdot(10)-\frac{1}{5}\cdot(3x) \qquad \text{利用分配律}$$

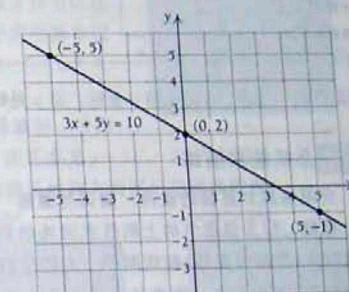
$$=2-\frac{3}{5}x$$

$$=-\frac{3}{5}x+2$$

5

利用方程 $y=-\frac{3}{5}x+2$ 求出三个有序对，选 x 为 5 的倍数可避免分数运算. 描点，画线，然后注明图形的方程，如图所示. ■

x	y	(x, y)
0	2	$(0, 2)$
5	-1	$(5, -1)$
-5	5	$(-5, 5)$

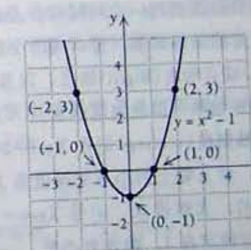


线性方程的图形和性质(其图形是直线)将在 1.4 节详细地讨论.

例 3 作 $y=x^2-1$ 的图形.

解

x	y	(x, y)
-2	3	$(-2, 3)$
-1	0	$(-1, 0)$
0	-1	$(0, -1)$
1	0	$(1, 0)$
2	3	$(2, 3)$



这里，诸点的图像是一条称为抛物线(parabola)的曲线. 我们用点填满草图就得到其图形. 注意，只有描绘出足够多的点才能认清图像. ■

6

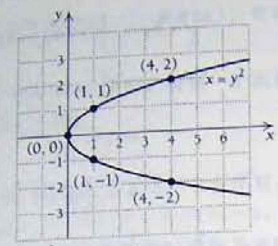
例 4 作 $x=y^2$ 的图形.

解 在这种情形，x 由变量 y 表示. 因此，先选取一些数为 y，然后计算 x.

2007/08/16

x	y	(x, y)
4	−2	(4, −2)
1	−1	(1, −1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
4	2	(4, 2)

(1)选取 y 的任意值.
(2)计算 x.
(3)组成有序对 (x, y).
(4)描点.



描出这些点，注意，x 仍是第一坐标，而 y 是第二坐标. 平滑连接出图像就完成了作图. ■

上机技术演练

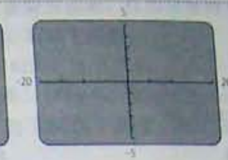
介绍绘图计算器的使用：窗口与图形

视窗　作为供选学的上机技术演练的第一讲，先介绍用绘图计算器和计算机绘图软件(简称**绘图器**)创建图形. 大部分讲述将涉及 TI-83 绘图计算器(且与 TI-82 相匹配)，但是在一般意义下是讲述几乎所有绘图器的共有特征. 虽然有时会提到某个按键操作，但是，一般说来，关于按键操作的准确而详细的说明将包括在你个人的绘图器手册中或绘图计算器手册(以后称之为 GCM)中，它与本书配套.

所有绘图器的一个共同特征是都有**视窗**(viewing window). 这指的是一个可显示图形的矩形屏幕. 窗口用四个数[**L**, **R**, **B**, **T**]来描述，它们分别表示 x 轴的**左**(Left)端点和**右**(Right)端点，以及 y 轴的**底**(Bottom)端点和**顶**(Top)端点. 利用 **WINDOW** 选项可以设置这些端点. 下面是尺寸为[−20, 20, −5, 5]的窗口设置，其中的轴刻度(scaling)记作 Xscl=5 和 Yscl=1，它表示 x 轴上的小点间隔值是 5 个单位，而 y 轴上的小点间隔值是 1 个单位. 图形是由称为**像素**(pixel)的矩形黑点构成的. 大致说来，记号 Xres=1 表示制图中所采用的像素数的一个指标[○]. 通常将它设定在 1，除非有必要，一般不再动它.

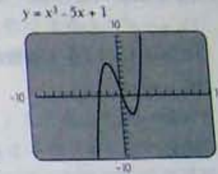
○ Xres 把方程图形的像素分辨率设置在 1～8 之间. 在 Xres=1 的情形，按 x 轴上的每像素来计算和描绘方程. 在 Xres=8 的情形，在 x 轴上每隔 8 像素来计算和描绘方程. Xres 值较小者的清晰度比较大者的清晰度更好.



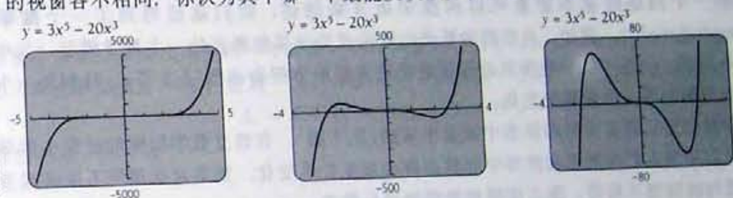


轴刻度必须仔细选择，因为如果有太多的小点出现，小点标记会变得模糊不清. 在某些绘图器上，取 Xscl=1，Yscl=1，Xres=1，而把[−10, 10, −10, 10]的设置看作标准设置.

图形　绘图器的主要用途是描绘方程的图形. 例如，作方程 $y=x^3-5x+1$ 的图形. 该方程可以用记号 $y=x\wedge3-5x+1$ 来输入. 有些软件采用基本记号，这时，上述方程可以记作 $y=x\wedge3-5*x+1$. 在标准视窗中，我们可画出右述图形.



为了把一个图形的弯曲程度表现得最好，常有必要改变视窗的尺寸. 例如，下面三个图形都是 $y=3x^5-20x^3$ 的图形，但是采用的视窗各不相同. 你认为其中哪一个最能反映该方程图形的弯曲程度?

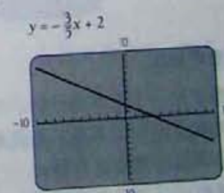


一般说来，选择视窗免不了要进行反复调试，以便能更好地表现图形的特征，在某些情形，我们对图形的形状已有所了解. 在不断学习本教材的过程中，我们会了解更多图形的形状.

为了作如方程 $3x+5y=10$ 的图形，大多数绘图器要求先解方程求出 y，即“$y=\cdots$”. 因此必须重写这个方程，并且把它记作

$$y=\frac{-3x+10}{5}, \quad \text{或} \quad y=-\frac{3}{5}x+2.$$

(见例 2.)在标准视窗中，它的图形如右下图所示.



对于方程 $x=y^2$，应先求得 $y=\pm\sqrt{x}$，然后分别作方程 $y_1=\sqrt{x}$ 和 $y_2=-\sqrt{x}$ 的图形.

练习　用绘图器作下列每一个方程的图形. 选择标准视窗[−10, 10, −10, 10]，其中，轴刻度 Xscl=1，Yscl=1.

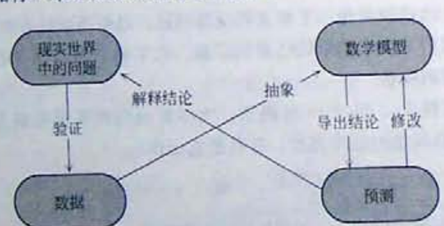
1. $y=2x-2$
2. $y=-3x+1$
3. $y=\frac{2}{5}x+4$
4. $y=-\frac{3}{5}x-1$
5. $y=2.085x+15.08$
6. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{13}{7}$
7. $2x-3y=18$
8. $5y+3x=4$
9. $y=x^2$
10. $y=(x+4)^2$
11. $y=8-x^2$
12. $y=4-3x-x^2$
13. $y+10=5x^2-3x$
14. $y-2=x^3$
15. $y=x^3-7x-2$
16. $y=x^4-3x^2+x$
17. $y=|x|$（在大多数绘图器上，该方程记作 $y=\mathrm{abs}(x)$）
18. $y=|x-5|$
19. $y=|x|-5$
20. $y=9-|x|$

8

数学模型

如果一个问题的基本要素可以用数学语言来描述，我们就说得到了一个**数学模型**(mathematical model). 例如，自然数的算术运算构成关于某些事态的一个数学模型，其中计数是其基本要素. 一些可能带有演算的问题常常需要使用方程和函数(1.2 节)，特别是一个变量的变化如何影响另一个变量的变化.

数学模型是从现实世界的状态中抽象出来的(见下图). 在建立数学模型的过程中推导出的结论，可以帮助人们预测现实世界中的状态将会发生什么变化. 如果这些预测不准确或者所验证的结果与该模型不相符，那么该模型就需要进行修改.



以方程为数学模型

数学模型是一个正在进行的、可能一直在变化的过程. 例如，要寻求一个有可能准确预测人口增长的数学模型就不是一个简单的问题. 实际上，当人们获得更贴切的信息时，所推导出的任何人口模型都需要进行修改.

虽然模型可以揭示出很有价值的信息，但是，当人们使用这些模型时，仍然需要谨慎行

事. 一个值得一提的有趣例子是一项研究[1]，该研究说明，任何径赛的世界纪录都可以用一个线性函数来建模，特别地，关于 1 英里[2]赛跑，有如下模型：

$$R=-0.005\,82x+15.347\,6,$$

其中 R 是世界纪录，以分钟为单位，而 x 是年. 1954 年，Roger Bannister 因打破 4 分钟 1 英里的世界纪录而震撼了世界. 如果当时人们了解这个模型，他们就不会被震撼，因为当用 1 954 代替 x 时，我们得到 9

$$R=-0.005\,82(1\,954)+15.347\,6=3.975\,32\approx 3:58.5.$$

实际纪录是 3:59.4. 虽然这个模型仍可使用 40～50 年，它在预测 1 英里赛跑的世界纪录方面是很有价值的，但是，我们知道，对于某些疑问不会得到有意义的答案. 例如，可以利用这个模型求出什么时候将破 1 分钟 1 英里赛跑的纪录. 令 $R=1$，然后求出 x：

$$1=-0.005\,82x+15.347\,6$$

$$2\,465=x.$$

大部分径赛运动使我们确信，1 分钟 1 英里赛跑的纪录超出了人的能力范围. 事实上，在写这个例子的时候，有丰富经验的赛跑运动员认为，该纪录永远达不到 3:40.0，而现时的世界纪录是 3:44.39. 再考虑一个更极端的情形，该模型预测，0 分钟 1 英里赛跑的纪录将在 2637 年被打破. 总之，人们在使用任何模型时都必须小心谨慎.（在习题 7.5 中你将改进这个模型.）

复利

在整个课程中要多次用到的一个模型，它涉及**复利**(compound interest)的计算. 假定按利率 i 存入本金 P 美元，一年计复利一次，存款一年后银行账户上的结存 A_1 可表示成

$$A_1=P+Pi=P(1+i)=Pr,$$

为了方便起见，其中设

$$r=1+i.$$

进入第二年，有本金 Pr 美元，因此两年后，结存 A_2 为

$$A_2=A_1\cdot r=(Pr)r=Pr^2=P(1+i)^2.$$

进入第三年，有本金 Pr^2 美元，因此三年以后，结存金额 A_3 为

$$A_3=A_2\cdot r=(Pr^2)r=Pr^3=P(1+i)^3.$$

一般地，我们有下述定理.

定理 1 *如果按利率 i 存入本金 P，一年计复利一次，则 t 年以后，结存将增加到全额 A，A 可表示成*

$$A=P(1+i)^t.$$

例 5 商业：复利. 假定存入 1 000 美元，利率为 8%，一年计复利一次，两年后的结存是多少？ 10

---

[1] Ryder, H. W., H. J. Carr, and P. Herget, "Future Performance in Footracing," *Scientific American* **234** (June 1976): 109-119.

[2] 英里的单位符号为 mile，1mile=1 609.344m. ——编辑注

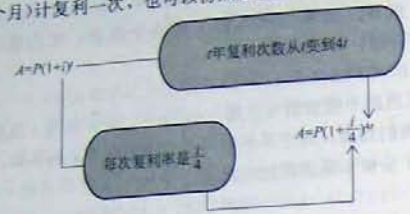
2007/08/16

解 把 $P=1\,000$，$i=0.08$，$t=2$ 代入方程 $A=P(1+i)^t$ 可得

$$A=1\,000(1+0.08)^2=1\,000(1.08)^2=1\,000(1.166\,4)=1\,166.40(\text{美元}).$$ ■

两年后结存为 1 166.40 美元.

如果一个季度(3个月)计复利一次，也可以仿照上述做法求得一个公式，用示意图说明如下.



一般地，要用下述定理.

定理2 如果按利率 i 存入本金 P，一年计复利 n 次，则 t 年以后结存将增加到全额 A，A 可表示成

$$A=P\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$$

例6 商业：复利．假定存入 1 000 美元，利率为 8%，一个季度计复利一次．两年后的结存是多少?

解 利用方程 $A=P(1+i/n)^{nt}$，令 $P=1\,000$，$i=0.08$，$n=4$(一个季度计复利一次)，$t=2$，于是有

$$A=1\,000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{4\times2}=1\,000(1+0.02)^8$$
$$=1\,000(1.02)^8$$
$$=1\,000(1.171\,659\,381)\qquad \text{用计算器近似计算}(1.02)^8$$
$$=1\,171.659\,381\approx1\,171.66(\text{美元}).$$ ■

[11] 两年后结存是 1 171.66 美元.

在例6中，是用带有 y^x 键或 ∧ 键以及十位显示的计算器来求 $(1.02)^8$ 的．计算器上的位数可能影响答案的准确性．因此，有时会发现，求出的答案与书后答案不一致，书后答案也是在带有十位显示的计算器上求出来的．一般说来，用计算器可以做所有的计算，最后只要进行四舍五入就行了，如例6．通常，求出的答案应至少有4位与标准答案相同．关于所要求的精确度，如果可能，请教你的老师是明智之举．

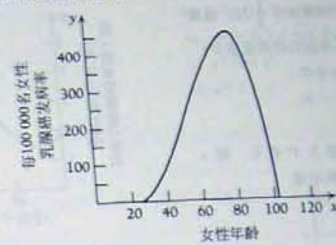
以图形作为数学模型

可以证实，以图形作为数学模型是很有用的，用下例说明如下.

例7 生命科学：乳腺癌发病率．下图近似地反映了每 100 000 名女性的乳腺癌发病率 y，它是年龄 x 的函数，其中 x 表示 25 到 100 之间的年龄．该函数不能用方程给出．试用图形回答以下问题.

a)40 岁的女性的乳腺癌发病率是多少?

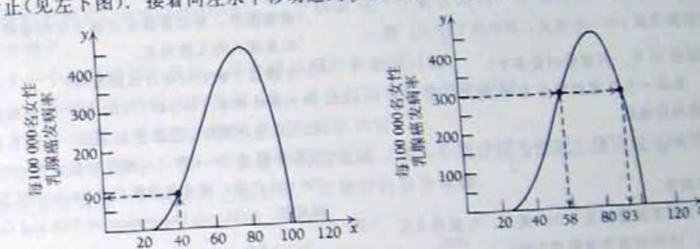
b)哪些年龄，每 100 000 名女性的乳腺癌的发病率大约为 300 人?



资料来源：National Cancer Institute

解

a)为了估计 40 岁的女性的乳腺癌发病率，可以在 x 轴上找到 40，然后由此竖直向上达到图形为止(见左下图)．接着向左水平移动达到 y 轴上所示值为止．估计该值大约为 90.



资料来源：National Cancer Institute

b)在 y 轴上找到 300，然后水平移动穿过图形，注意，其中有两个 x 值与 300 相对应(见上面的右图)．它们是近似年龄 58 和 93. ■ [12]

习题 1.1

用记号"*"明示的习题是书面思考题．它们需用一两句话来回答．因为许多这类题的答案是多样的，所以书后没有给出解答．

作下列方程的图形.

1. $y=x-1$
2. $y=x$
3. $y=-3x$
4. $y=-\frac{1}{4}x$
5. $y=\frac{2}{3}x-4$
6. $y=-\frac{5}{3}x-2$
7. $x+y=-4$
8. $x-y=5$
9. $8y-2x=4$
10. $6x+3y=-9$
11. $4x-6y=12$
12. $2x+3y=12$
13. $y=3-x^2$
14. $y=x^2-3$
15. $x=2-y^2$
16. $x=y^2+2$
17. $y=|x|$
18. $y=|4-x|$

应用

商业与经济

19. 复利．假定存入 1 000 美元，利率为 6%．如果按下列周期计复利一次，同一年以后的结存是多少?
 a)一年.　　b)半年.

c)一个季度.　　　　d)一天.

e)一小时.

20. **复利.** 假定存入 1 000 美元，利率为 $8\frac{1}{2}\%$，如果按下列周期计复利一次，问一年以后结存是多少？

a)一年.　　　　b)半年.

c)一个季度.　　　　d)一天.

e)一小时.

确定借款的月度偿付. 如果借入 P 美元，则 n 个月的每个月末的月度偿付 M 可表示成

$$M=P\left[\frac{\frac{i}{12}\left(1+\frac{i}{12}\right)^{n}}{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{n}-1}\right],$$

其中，i 是年利率，n 是月度偿付的总月数.

21. 汽车贷款 18 000 美元，利率为 $9\frac{3}{4}\%$，贷款周期是 3 年. 月度偿付是多少？

22. 房屋抵押贷款 100 000 美元，利率为 $6\frac{3}{4}\%$，贷款周期是 30 年. 月度偿付是多少？

年金. 如果一个年度投资年金 P 美元，则 n 年以后，年金的价值是

$$W=P\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right],$$

其中 i 是年利率.

23. 假定一个年度投资年金 3 000 美元，可获得 8% 的利息. 18 年后该年金值多少钱？

24. 假定投资一项年金可获得 $7\frac{1}{4}\%$ 的利息，想要在 20 年内使该年金价值 50 000 美元. 同一个年度需投资多少钱方可达到这个目标？

生命科学与物理学

25. **乳腺癌发病率.** 参看例 7 中所示图形.

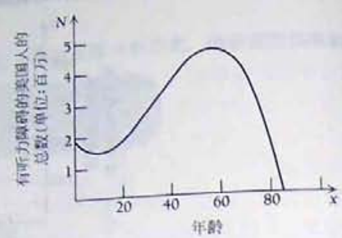
a)60 岁的女性的乳腺癌发病率是多少？

b)哪些年龄，每 100 000 名女性的乳腺癌发病率大约是 400？

c)观察图形，然后试着确定在哪个年龄乳腺癌的发病率最高？

*d)在确定乳腺癌最高发病率的年龄时有什么困难吗？

26. **有听力障碍的美国人.** 年龄为 x 的有听力障碍的美国人的总数 N(以百万计)可用下面所示图形近似表示.（资料来源：American Speech-Language Hearing Association.）



用图形回答下列问题.

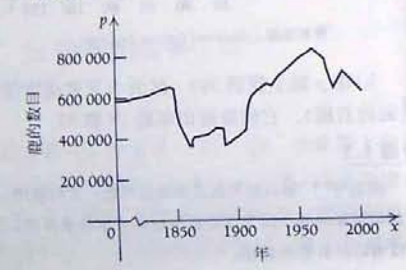
a)分别给出年龄为 20，40，50 和 60 的有听力障碍的美国人的大致人数.

b)在哪些年龄，有听力障碍的美国人的总数大致是 4 百万？

c)观察图形，并试着确定在哪个年龄有听力障碍的美国人的人数最多.

*d)在做这个确定时有什么困难吗？

27. **加州鹿的数目.** 从 1800 年到 2000 年加州鹿的数目可以用下面所示图形近似表示. 名词*充足*是指其数目超过 700 000，*一般*是指数目在400 000与700 000之间，*稀少*是指数目在400 000以下.（资料来源：California Department of Fish and Game.）



a)哪些年的数目一般？

b)哪些年的数目充足？

c)哪些年的数目稀少？

28. 用上一题中的图形回答下列问题.

a)加州鹿的数目最高值大致在哪一年？

b)加州鹿的数目最低值大致在哪一年？

*c)1848 年在加州发现金矿，就在发现金矿以后若干年，关于加州鹿的数目，图形是如何描绘的？

上机技术演练

作下列方程的图形.

29. $y=x+200$

30. $y=9-|x|$

31. $y=x^3+2x^2-4x-13$

32. $y=\sqrt{23-7x}$

33. $9.6x+4.2y=-100$

34. $y=-2.3x^2+4.8x-9$

35. $x=4+y^2$

36. $x=8-y^3$

1.2　函数与模型

要点

- 确定一个对应是否为一个函数.
- 求函数值.
- 作函数的图形，并且确定一个图形是否是函数的图形.

识别函数

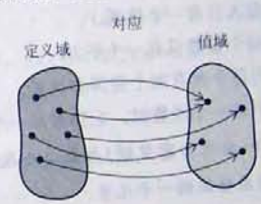
函数概念是数学中最重要的概念之一. 采用大致相同的方式，即有序对构成第一个坐标到第二个坐标的对应(correspondence)，一个函数是一个集合到另一个集合的一种特殊对应. 请看下面的例子.　13/14

对于一个公司的每个雇员，存在雇员到其薪金的对应.

对于一家音乐唱片商店的每张 CD，存在其到它的价格的对应.

对于每个实数，存在该实数到它的立方的对应.

在上述每个例子中，第一个集合称为**定义域**，第二个集合称为**值域**. 给定定义域的一个元素，恰好有值域的一个元素与之相对应. 这种对应称为**函数**.



定义　函数是第一个集合(称之为**定义域**)与第二个集合(称之为**值域**)之间的一种对应，使得定义域的每个元素恰好对应于值域的一个元素.

例 1　确定下列对应是否为函数.

a)Microsoft 股票

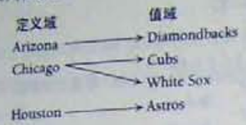
定义域	值域
星期一 →	$114\frac{3}{4}$
星期二 →	$113\frac{1}{2}$
星期三 →	114
星期四 →	$114\frac{1}{8}$

b)数字函数

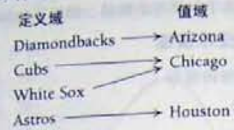
定义域	值域
3 →	5
4 →	9
5 →	−7
6 →	−7

2007/08/16

c)棒球队



d)棒球队



解

a)该对应是一个函数，因为定义域的每个元素对应于(与之对应的是)值域的唯一一个元素.

b)该对应是一个函数，因为定义域的每个元素对应于值域的唯一一个元素，即使定义域有两个元素对应于−7.

c)该对应不是一个函数，因为定义域一个成员 Chicago 对应于值域的两个成员 Cubs 和 White Sox.

d)该对应是一个函数，因为定义域的每个成员只对应于值域的一个成员，即使定义域有两
15 个成员都对应于 Chicago. ■

例 2 确定下列对应是否为函数.

定义域	对应	值域
a)一个家庭	每人体重	正数集
b)整数集	每个数的平方	所有非负整数集
c)所有州的集合	美国参议院的每个州的参议员	美国所有参议员的集合

解

a)该对应是一个函数，因为每人只有一个体重.

b)该对应是一个函数，因为每个整数只有一个平方.

c)该对应不是一个函数，因为每个州有两个美国参议员. ■

当两个集合之间的一个对应不是一个函数时，它仍然是一个**关系**(relation)的例子.

定义 *一个关系是第一个集合(称之为**定义域**)与第二个集合(称之为**值域**)之间的一个对应，使得定义域的每个元素至少对应值域的一个元素.*

因此，尽管例 1 和例 2 中的各个对应不都是函数，但它们都是关系. 一个函数是一种特殊的关系——在这个关系中，定义域的每个元恰好与值域的一个元构成一对.

求函数值

数学中所讨论的大部分函数都可以用方程来描述，如方程 $y=2x+3$ 或 $y=4-x^2$. 例如，画函数 $y=2x+3$ 的图形首先要作如下的计算：

$$对于\ x=4, y=2x+3=2\cdot4+3=11;$$
$$对于\ x=-5, y=2x+3=2\cdot(-5)+3=-7;$$
$$对于\ x=0, y=2x+3=2\cdot0+3=3;等等.$$

对于 $y=2x+3$，**输入**(定义域的元素)是代入该方程中 x 的值. **输出**(值域的元素)是得到 y 的值. 如果称函数为 f，则可以用 x 表示任何一个输入，而 $f(x)$——读作“x 的 f 或 f 在 x”或者“f 在 x 的值”——表示对应的输出. 在这个记号下，由 $y=2x+3$ 给出的函数可记作 $f(x)=2x+3$，而上述计算可更简洁地写成

$$f(4)=2\cdot4+3=11;$$
$$f(-5)=2\cdot(-5)+3=-7;$$
$$f(0)=2\cdot0+3=3;等等. \quad 16$$

于是，可以不写“当 $x=4$ 时 y 的值是 11”，而简写成“$f(4)=11$”，它还可以读作“4 的 f 是 11”或“对输入 4，f 的输出是 11”.

把函数看作一台机器是很有用的. $f(4)=11$ 可理解为把定义域的一个元素(一个输入)4 放进这台机器，机器知道对应 $f(x)=2x+3$，4 乘以 2 再加 3，然后给出值域的元素(输出)11.

函数：$f(x)=2x+3$	
输入	输出
4	11
−5	−7
0	3
a	$2a+3$
$a+h$	$2(a+h)+3$



要特别提醒，记号 $f(x)$ 不是“f 乘 x”，并且不那样读.

例 3 设平方函数 f 是

$$f(x)=x^2.$$

求 $f(-3)$，$f(1)$，$f(k)$，$f(\sqrt{k})$，$f(1+t)$ 和 $f(x+h)$.

解 我们有

$$f(-3)=(-3)^2=9;$$
$$f(1)=1^2=1;$$
$$f(k)=k^2;$$
$$f(\sqrt{k})=(\sqrt{k})^2=k;$$
$$f(1+t)=(1+t)^2=1+2t+t^2;$$
$$f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2.$$

为了求 $f(x+h)$，想到该函数是要求输入的平方. 因此，$f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$. 这相当于在 $f(x)=x^2$ 的两边用 $x+h$ 代替 x. ■

例 4 函数 f 由 $f(x)=3x^2-2x+8$ 给出. 求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-5)$和 $f(7a)$.

解 如果给出了函数表达式，则求函数值的一种方式是把该式理解为带空格或位置标志符的式子，如下所述：

2007/08/16

$$f(\blacksquare)=3\blacksquare^2-2\blacksquare+8$$

17 为对给定的输入求出一个输出，注意："无论把什么填入左边的空格，它也要填入右边的诸空格."想到这一点，就可以做这个例子了.

$$f(0)=3\cdot 0^2-2\cdot 0+8=8;$$
$$f(1)=3\cdot 1^2-2\cdot 1+8=3\cdot 1-2+8=3-2+8=9;$$
$$f(-5)=3(-5)^2-2\cdot(-5)+8=3\cdot 25+10+8=75+10+8=93;$$
$$f(7a)=3(7a)^2-2(7a)+8=3\cdot 49a^2-14a+8=147a^2-14a+8.$$ ■

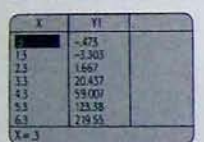
上机技术演练

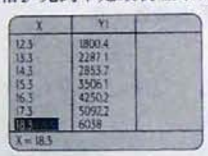
TABLE 选项　求函数的输入和输出有序对的一个途径是利用绘图器上的 TABLE 选项. 考虑方程或函数 $f(x)=x^3-5x+1$，把它写成 $y_1=x^3-5x+1$ 输进绘图器. 为了使用 **TABLE** 选项，可访问 **TABLE SETUP** 屏，然后在其上选 x 值，表格将对 x 值设定启动值和增量. 关于这个方程，设表格启动值 TblStart=0.3，而增量 ΔTbl=1(可以选其他值). 这表明表中的 x 值从 0.3 开始，且增量为 1.



也可以把 Indpnt 和 Depend 设定到 Auto 状态. 当访问 **TABLE** 选项时，表中的结果显示如左下图所示.

箭头键可以使表格向上和向下滚动，且可以把表格扩充到不是最初显示的其他值.





练习　把函数 $f(x)=x^3-5x+1$ 用于练习 1 和 2.

1. 用 **TABLE** 选项制一个表，TblStart=10，ΔTbl=5，求 $x=10$ 时 y 的值，然后求 $x=35$ 时 y 的值.

2. 把表格设置调到 Indpnt：Ask. 表格有何变化？输进一个选定的数看有何变化. 用这个设置求 $x=28$ 时 y 的值.

例 5　函数 f 是一个输入减去该输入的平方. f 可描述成

$$f(x)=x-x^2.$$

18 求 $f(4)$ 和 $f(x+h)$.

解　我们用各输入代替公式两边的 x 值，于是有

$$f(4)=4-4^2=4-16=-12;$$

$$f(x+h)=(x+h)-(x+h)^2=x+h-(x^2+2xh+h^2)$$
$$=x+h-x^2-2xh-h^2.$$ ■

当一个函数用表达式给出时，可不提及有关的定义域，那么就把其定义域理解为可以代入该公式的所有数的集合. 例如，考虑**倒数函数**(reciprocal function)

$$f(x)=\frac{1}{x}.$$

不能代入该式的数只有 0. 我们说 f *在数 0 没有定义或 $f(0)$ 不存在*. 其定义域为所有非零实数.

求平方根不是一个函数，因为一个输入可能有多于一个的输出. 例如，输入 4 有两个输出 2 和 −2. 取主平方根(非负根)是一个函数. 设 g 是该函数，于是 g 可以描述成 $g(x)=\sqrt{x}$. 从代数中可知，对于 $a\geqslant 0$，记号 $\sqrt{a}$ 表示 a 的非负平方根. 存在唯一的非负平方根.

例 6　考虑主平方根函数

$$g(x)=\sqrt{x}.$$

a)求这个函数的定义域.

b)求 $g(0)$，$g(2)$，$g(a)$，$g(16)$，$g(t+h)$ 和 $g(-3)$.

解

a)该定义域由能代入该公式的数组成. 任何非负数能取主平方根. 负数的主平方根不是实数.(负数取平方根需要考虑复数，本书不讨论复数.)因此，该定义域是所有非负数.

b)我们有

$$g(0)=\sqrt{0}=0;$$
$$g(2)=\sqrt{2};$$
$$g(a)=\sqrt{a};$$
$$g(16)=\sqrt{16}=4;$$
$$g(t+h)=\sqrt{t+h};$$

$g(-3)$ 作为实数不存在. ■

上机技术演练

考虑倒数函数 $f(x)=1/(x-3)$. 关于这个函数的表格如下所示. 注意，ΔTbl=0.25.

X	Y1	X	Y1
2	−1	3.25	4
2.25	−1.333	3.5	2
2.5	−2	3.75	1.3333
2.75	−4	4	1
3	错误		

2007/08/16

练习

1. 作函数 $f(x)=1/(x^2-4)$ 从 $x=-3$ 到 $x=3$ 的表格，其中 $\Delta\text{Tbl}=0.5$.
2. 对于例 6 中给出的函数，创建一个输入-输出表格.

函数常常隐含在(未明确自变量和因变量的)某些方程中. 例如，考虑

$$xy=2.$$

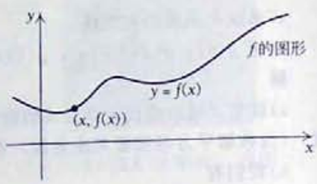
19 对于任一个非零 x，存在唯一数 y 满足该方程. 这就得到一个函数，它可显式地表示为

$$y=f(x)=\frac{2}{x}.$$

可是，考虑方程 $x=y^2$，一个正数 x 却与 y 的两个值有关，它们是 $\sqrt{x}$ 和 $-\sqrt{x}$. 因此，这个方程不是表示把输入 x 映射到输出 y 的隐函数.

函数的图形

再考虑平方函数. 输入 3 与输出 9 有联系. 输入-输出数对(3, 9)是这个函数图形上的一个点.



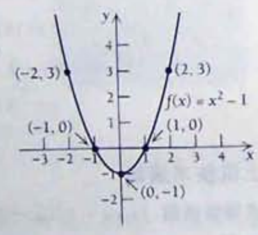
定义 函数 f 的图形是一个图画(或动点的轨迹——译者注)，它描绘所有输入-输出对$(x, f(x))$. 在函数是用方程给出的情形下，函数的图形是方程 $y=f(x)$ 的图形.

通常把诸输入值(定义域)安排在 x 轴上，而把诸输出值(值域)安排在 y 轴上.

例 7 作函数 $f(x)=x^2-1$ 的图形.

解

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
−2	3	(−2, 3)
−1	0	(−1, 0)
0	−1	(0, −1)
1	0	(1, 0)
2	3	(2, 3)

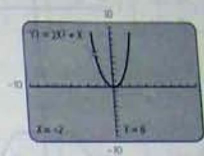


(1)选取 x 的任意值.
(2)计算 y.
(3)组成数对(x, y).
(4)描点.

描出表中给出的诸输入-输出对，接着画出一条曲线就得到该函数的图形. ■ 20

上机技术演练

图形与函数值 在 1.1 节的上机技术演练中述及了在绘图器上描绘方程图形的程序，作函数的图形也可以利用这个程序. 只要把记号"$f(x)=$"转换成"$y=$"就行了.



考虑函数 $f(x)=2x^2+x$. 把它作为 $y_1=2x^2+x$ 输进图形框，然后在标准视窗中画出它的图形.

至少可用三种方式在绘图器上求函数值. 其一是用 **TABLE** 选项，这已经讲过了. 其二是用 **VALUE** 选项. 访问 **CALC** 菜单，然后选 **VALUE** 选项. 为了计算函数 $f(x)=2x^2+x$ 在 $x=-2$ 处的值——也就是求 $f(-2)$——对 x 输入 −2. 函数值或 y 值 $y=6$ 与跟踪指示器显示的点(−2, 6)一同出现.

还可以用 **Y-VARS** 选项求函数值. 有关详情，请查询绘图器手册或 GCM.

练习

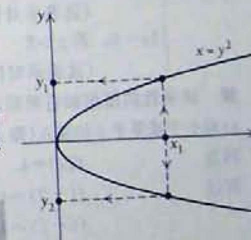
1. 画出 $f(x)=x^2+3x-4$ 的图形，然后求 $f(-5)$，$f(-4.7)$，$f(11)$ 和 $f(2/3)$. (提示：为求 $f(11)$，注意关于 x 值的窗口尺寸应能包括 $x=11$.)
2. 画出 $f(x)=3.7-x^2$ 的图形，然后求 $f(-5)$，$f(-4.7)$，$f(11)$ 和 $f(2/3)$.
3. 画出 $f(x)=4-1.2x-3.4x^2$ 的图形，然后求 $f(-5)$，$f(-4.7)$，$f(11)$ 和 $f(2/3)$.

竖直线检验法

下面讨论如何考察图形，以及如何确定它是否为函数的图形. 我们知道，从

$$x=y^2$$

得不到把数 x 映射到唯一数 y 的函数. 在它的图形中(见右图)，注意到点 x_1 有两个输出. 这说明有一条竖直线与该图形的交点多于一个. 21



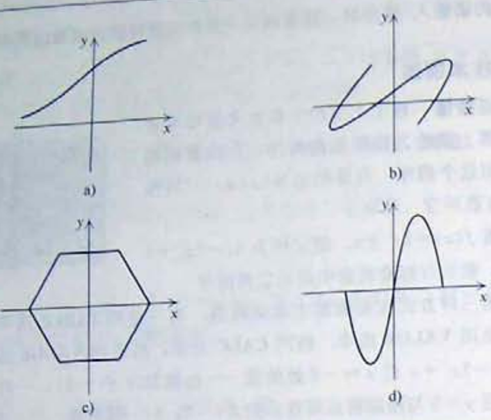
竖直线检验法

一个图形表示一个函数，是指不可能画出一条竖直线与该图形的交点多于一个.

例 8 确定下列各图形是否为一个函数的图形.

解

a) 该图形是函数的图形. 不可能画出一条竖直线与该图形的交点多于一个.



b)该图形不是函数的图形．有一条竖直线(实际上是许多条)与该图形的交点多于一个．

c)该图形不是函数的图形．

d)该图形是函数的图形．

分段函数

有些函数是分段定义的，也就是说，对定义域的不同区段有不同的输出表达式．

例 9 作出如下定义的函数图形．

$$f(x)=\begin{cases}4, & \text{若 } x\leqslant 0 \\ & \text{(这表示对任何小于或等于 0 的输入 } x\text{，输出都是 4.)} \\ 4-x^2, & \text{若 } 0<x\leqslant 2 \\ & \text{(这表示对任何大于 0 且小于或等于 2 的 } x\text{，输出都是 } 4-x^2\text{.)} \\ 2x-6, & \text{若 } x>2 \\ & \text{(这表示对任何大于 2 的 } x\text{，输出都是 } 2x-6\text{.)}\end{cases}$$

解 该函数的图形如右图所示．

a)对小于或等于 0 的输入(即 $x\leqslant 0$)作 $f(x)=4$ 的图形．

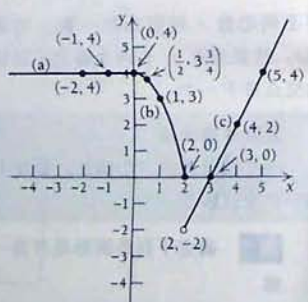
因为 $f(x)=4$,

所以 $f(-2)=4$,

$f(-1)=4$,

$f(0)=4$.

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-2	4	$(-2, 4)$
-1	4	$(-1, 4)$
0	4	$(0, 4)$



b)对大于 0 且小于或等于 2 的输入(即 $0<x\leqslant 2$)作 $f(x)=4-x^2$ 的图形．

因为 $f(x)=4-x^2$,

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=4-\left(\frac{1}{2}\right)^2=3\frac{3}{4}$,

$f(1)=4-1^2=3$,

$f(2)=4-2^2=0$.

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	$\left(\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}\right)$
1	3	$(1, 3)$
2	0	$(2, 0)$

实圆点表示点(2，0)是该图形上的点．

c)对大于 2 的输入(即 $x>2$)作 $f(x)=2x-6$ 的图形．

因为 $f(x)=2x-6$,

所以 $f(3)=2(3)-6=0$,

$f(4)=2(4)-6=2$,

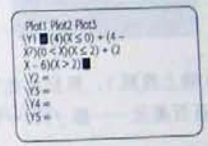
$f(5)=2(5)-6=4$.

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
3	0	$(3, 0)$
4	2	$(4, 2)$
5	4	$(5, 4)$

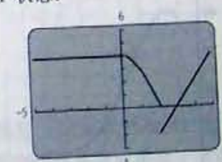
在(2，-2)处的空圆点表示该点不是这个图形上的点． ■

上机技术演练

作分段函数的图形 在绘图器上作分段函数的图形一般要用到不等号．在 TI-83 上，则采用 **TEST** 菜单．输入例 9 中的函数如下：



图形如下所示，呈 DOT 状态．



练习 作出下列分段函数的图形．

1. $f(x)=\begin{cases}-x-2, & \text{若 } x<-2, \\ \sqrt{4-x^2}, & \text{若 } -2\leqslant x<2, \\ x+3, & \text{若 } x\geqslant 2.\end{cases}$

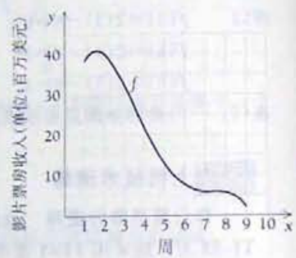
2. $f(x)=\begin{cases}x^2-2, & 若\ x\leqslant 3,\\ 1, & 若\ x>3.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}x+3, & 若\ x\leqslant -2,\\ 1, & 若\ -2<x\leqslant 3,\\ x^2-10, & 若\ x>3.\end{cases}$

函数及其图形的应用

无论是否给出了方程，函数通常都可以用图形来描述．要注意的是，图形上的每个点表示一对输入-输出值．

例 10 商业：影片票房收入．下面的图形近似表示从影片《空军一号》中获得的每周票房收入，以百万美元为单位．(资料来源：Exhibitor Relations Co.，Inc.)从影片发行开始，该收入是周数的一个函数 f．该函数没有给出方程(稍后将讨论这个问题)．



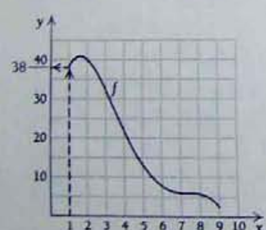
用图形回答下列问题．

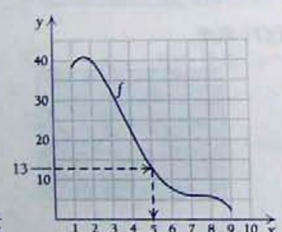
a)在第 1 周，该影片的票房收入是多少？即求 $f(1)$．

b)在第几周，该影片的票房收入接近 13 百万美元？即求任一输入 x，使得 $f(x)=13$．

解

a)为了估计第 1 周的收入，在 x 轴上找到 1，然后由此竖直向上达到图形为止，接着水平移动达到 y 轴．估计该值大约为 38 百万美元——即 $f(1)=38$．





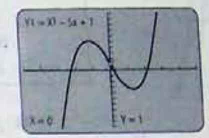


b)在 y 轴上找到 13，然后水平移动达到图形，注意到有一个输入值对应 13．估计该值大约是 5，即 $f(5)=13$．在第 5 周内，该收入接近 13 百万美元． ■

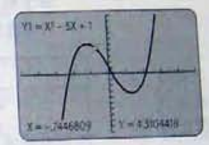
上机技术演练

TRACE 选项 利用 TRACE 选项可以确定图形上点的坐标．当这个选项启动后，光标就出现在已画出的直线(或曲线)上，并且显示那个点的坐标．用左箭头键和右箭头键可以沿着图形移动光标．

考虑函数 $f(x)=x^3-5x+1$，它的图形画在窗口$[-5,5,-10,10]$中．选择 TRACE 选项．



底部的坐标表明，光标处在坐标为(0，1)的点上．使用左箭头键和右箭头键可以求得其他点的坐标．例如，按左箭头键◁七次，把光标移动到如下显示的位置便可得到图形上坐标为(−0.744 680 9，4.310 441 8)的点．



练习

1. 试用 TRACE 选项求出方程

$$f(x)=x^3-5x+1$$

的五个不同的有序解对．

最后几点注释

在本书中，几乎所有的函数都可以用方程来描述．但是，有些函数不能用方程描述．例如，在本课程中，会给出一个为学生评定成绩的函数，而该函数就可能没有表达式．

有时我们采用术语"y 是 x 的函数"．这表示 x 是输入而 y 是输出．当 x 表示输入时，常称 x 是**自变量**，当 y 表示输出时，则称 y 为**因变量**．我们可以说"函数 $y=x^2$"，无需用字母 f 来冠名．还可以更简便地(仅)把 x^2 称为一个函数．

在微积分中，我们要研究当输入变化时，一个函数的输出如何变化．

2007/08/16

习题 1.2

确定以下对应是否为函数.

1. 定义域 → 值域
   - 2 → 9
   - 5 → 8
   - 19 → 9

2. 定义域 → 值域
   - 5 → 3
   - −3 → 3
   - 7 → 7
   - −7 → 7

3. 定义域 → 值域
   - 6 → −6
   - 6 → −7
   - 7 → −7
   - 3 → −3

4. 定义域 → 值域
   - −5 → 1
   - 5 → 1
   - 8 → 1

5. 美国能源消耗.

定义域	值域
1960	43.80
1965	52.68
1970	67.86
1975	72.04
1980	78.43
1985	76.78
1990	84.19
1995	90.94
1999	96.60

值域的单位是 10^{15} BTU(千瓦/小时)(资料来源: Census Bureau).

6. 定义域(城市) → 值域(球队)
   - San Francisco → Giants
   - Chicago → White Sox
   - Chicago → Cubs
   - Kansas City → Royals

确定以下对应是否为函数.

	定义域	对应	值域
7.	一个数学班	每人的座位号	号码的集合
8.	一个数的集合	每个数的平方再加 8	大于或等于 8 的正数之集合
9.	女性的集合	每个女性的母亲	女性的集合
10.	女性的集合	每个女性的女儿	女性的集合
11.	形状的集合	每个形状的周长	正数的集合
12.	一个家庭	每个成员的高度	正数的集合
13.	一本教科书	该书的偶数页	各页数的集合
14.	大马路的集合	一条交叉的道路	交叉街道的集合

15. 函数 f 表示为

$$f(x) = 2x + 3.$$

这个函数取数 x, 乘以 2, 再加上 3.

a)完成这个表.

x	$f(x)$
4.1	
4.01	
4.001	
4	

b)求 $f(5)$, $f(-1)$, $f(k)$, $f(1+t)$ 和 $f(x+h)$.

16. 函数 f 表示为

$$f(x) = \frac{4}{x-3}.$$

这个函数取数 x, 减去 3, 然后用其差除 4.

a)完成这个表.

x	$f(x)$
5.1	
5.01	
5.001	
5	

b)求 $f(4)$, $f(3)$, $f(-2)$, $f(k)$, $f(1+t)$ 和 $f(x+h)$.

17. 函数 g 表示为

$$g(x) = x^2 - 3.$$

这个函数取数 x, 平方, 再减去 3. 求 $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(5)$, $g(u)$, $g(a+h)$ 和 $g(1-h)$.

18. 函数 g 表示为

$$g(x) = x^2 + 4.$$

这个函数取数 x, 平方, 再加 4. 求 $g(-3)$, $g(0)$, $g(-1)$, $g(7)$, $g(v)$, $g(a+h)$ 和 $g(1-t)$.

19. 函数 f 表示为

$$f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$$

这个函数取 x, 加上 3, 平方其和, 再取该平方的倒数.

a)求 $f(4)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(a)$, $f(t+1)$, $f(t+3)$ 和 $f(x+h)$.

b)注意, f 也可以表示为

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 9}.$$

说明这个函数对输入数 x 如何取值.

20. 函数 f 表示为

$$f(x) = (x+4)^2.$$

这个函数取 x, 加上 4, 然后平方其和.

a)求 $f(3)$, $f(-6)$, $f(0)$, $f(k)$, $f(t-1)$, $f(t-4)$ 和 $f(x+h)$.

b)注意, f 也可以表示为

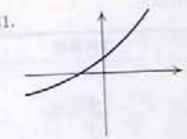
$$f(x) = x^2 + 8x + 16.$$

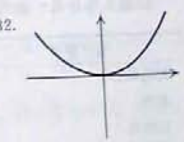
说明这个函数对输入数 x 如何取值.

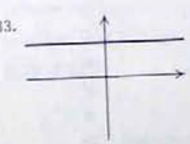
作出下列函数的图形.

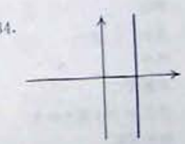
21. $f(x) = 2x + 3$
22. $f(x) = 3x - 1$
23. $g(x) = -4x$
24. $g(x) = -2x$
25. $f(x) = x^2 - 1$
26. $f(x) = x^2 + 4$
27. $f(x) = 4 - x^2$
28. $g(x) = -x^2 - 1$
29. $g(x) = x^3$
30. $g(x) = \frac{1}{2}x^3$

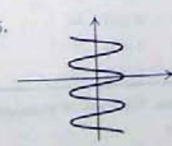
用竖直线检验法确定下列图形是否为函数的图形(在习题 39～42 中, 竖直虚线不是图形的一部分.)

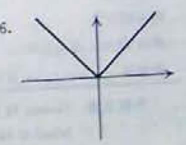
31.


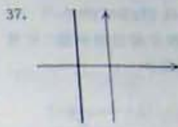
32.


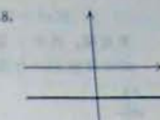
33.


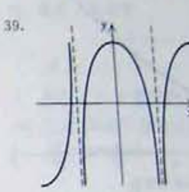
34.


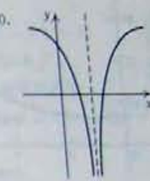
35.


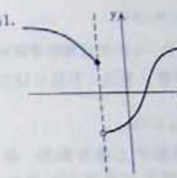
36.


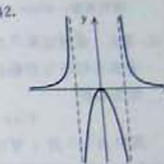
37.


38.


39.


40.


41.


42.


43. a)作出 $x = y^2 - 1$ 的图形.

b)这是一个函数吗?

44. a)作出 $x = y^2 - 3$ 的图形.

b)这是一个函数吗?

45. 对 $f(x) = x^2 - 3x$, 求 $f(x+h)$.

46. 对 $f(x) = x^2 + 4x$, 求 $f(x+h)$.

作出下列分段函数的图形.

47. $f(x) = \begin{cases} 1, & 若\ x < 0, \\ -1, & 若\ x \geqslant 0. \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} 2, & 若\ x\ 是整数, \\ -2, & 若\ x\ 不是整数. \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} -3, & 若\ x = -2, \\ x^2, & 若\ x \neq -2. \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} -2x - 6, & 若\ x \leqslant -2, \\ 2 - x^2, & 若\ -2 < x < 2, \\ 2x - 6, & 若\ x \geqslant 2. \end{cases}$

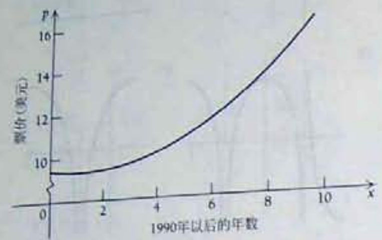
应用

商业与经济

51. 棒球大联赛票价. 棒球大联赛的平均票价可以用函数

$$p(x) = 9.41 - 0.19x + 0.09x^2$$

来建模，其中 x 是 1990 年以后的年数．计算 2005 年和 2008 年的平均票价．



资料来源：Major League Baseball

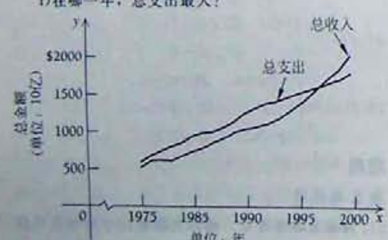
52. **复利**．在储蓄账户上，以 6% 的年复利率结算的存款本利和与初始投资额 x 有关，并且可以表示为函数

$$A(x) = x + 6\%x.$$

其中 $A(x)$ 是 1 年以后账户上的本利和．求 $A(100)$ 和 $A(1\ 000)$．

53. **影片票房收入**．参看例 10 中的图形．
   a)第 2 周的影片票房收入是多少？
   b)在第几周，影片票房收入接近 9 百万美元？
   c)在第几周，影片票房收入接近 30 百万美元？

54. **联邦预算**．下面的图形表示联邦政府从 1975 年以来的总收入和总支出．单位是 10 亿美元．
   a)每个图形都是函数吗？
   b)估计联邦政府在 1990 年的总收入．
   c)估计哪一年的总支出是 8 000 亿美元．
   d)在哪一年，总收入和总支出近似相等？
   e)在哪一年，总收入最少？
   f)在哪一年，总支出最大？



资料来源：Census Bureau

生命科学与物理学

化学疗法．在计算化学疗法的药剂量时，需要知道患者身体的表面面积．其表面面积的一个好的近似表示是由公式

$$s = \sqrt{\frac{hw}{3\ 600}}$$

给出的，其中 s 是其表面面积，单位是平方米(m^2)；w 是其体重，单位是千克(kg)；h 是其身高，单位是厘米(cm)．（资料来源：U.S. Oncology.）上述信息用于 55 题和 56 题．

55. 如果患者身高是 170cm，求患者的近似表面面积，假定：
   a)患者的体重是 70kg．
   b)患者的体重是 100kg．
   c)患者的体重是 50kg．

56. 如果患者的体重是 70kg，求患者的近似表面面积，假定：
   a)患者身高是 150cm．
   b)患者身高是 180cm．

57. **按比例换算压力系数**．在心理学中，常用一个称为按比例换算的流程把一组数值评分与一组生活经历联系起来．在下面所示的表中，根据各种较大事情的压力水平，从 1 到 100 对它们作出评分．
   a)该表构成一个函数吗？为什么？
   b)输入是什么？输出是什么？

较大事情	影响系数
配偶死亡	100
离婚	73
监禁期	63
结婚	50
失业	47
怀孕	40
亲朋死亡	37
借出 10 000 美元以上	31
孩子离家	29
转学或升学	20
借出 10 000 美元以下	17
圣诞节	12

资料来源：Thomas H. Holmes，University of Washington School of Medicine

综合题

解出 y，用 x 表示．确定得到的方程是否为函数．

58. $2x + y - 16 = 4 - 3y + 2x$
59. $2y^2 + 3x = 4x + 5$
60. $(4y^{2/3})^3 = 64x$
61. $(3y^{3/2})^2 = 72x$

*62. 假定你与朋友讨论函数的概念．你应如何说明它？

*63. 说明函数图形的某些特性．

上机技术演练

在 64 题和 65 题中，利用 **TABLE** 选项制作符合给定条件的函数表．

64. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 13$；
   TblStart $= -3$；ΔTbl $= 2$

65. $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$；
   TblStart $= -3$；ΔTbl $= 1$

66. 函数 f 表示为
$$f(x) = |x - 2| + |x + 1| - 5.$$
求 $f(-3)$，$f(-2)$，$f(0)$ 和 $f(4)$．

67. 画出 47～50 题中每一个函数的图形．

68. 利用 **TRACE** 选项求出函数 $f(x) = \sqrt{10 - x^2}$ 的几个有序解对．

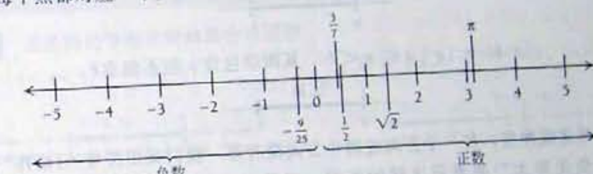
1.3 求定义域与值域

要点

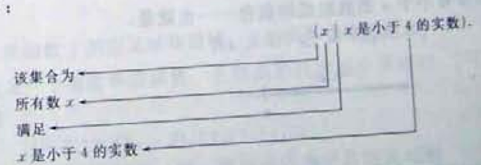
- 用区间记号表示点的集合．
- 求函数的定义域和值域．

集合记号

一个**集合**(set)是一些对象的全体．在微积分中所讨论的集合大都是**实数集**(real number)．在数轴上，每个点都对应一个实数．



包含数 $-\frac{9}{25}$，0 和 $\sqrt{2}$ 的集合可以写成 $\left\{-\frac{9}{25}, 0, \sqrt{2}\right\}$．这种描述集合的方法称为**枚举法**(roster method)．它列举出该集合的所有成员．为了描述较大的集合，常用**集合-成员记号**(set-builder notation)来表示一个集合中的对象满足规定的条件．例如，所有小于 4 的实数可以描述如下：



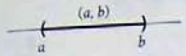
26 / 29

2007/08/16

区间记号

还可以用**区间记号**(interval notation)来描述集合. 如果 a 和 b 是实数, 且 $a<b$, 规定区间 (a,b) 为 a 与 b 之间所有实数的集合, 但不包含 a 和 b——即适合 $a<x<b$ 的所有 x 组成的集合. 因此,

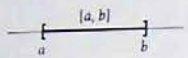
$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$



点 a 和 b 是该区间的**端点**(endpoint). 圆括号表示端点不包含在图形内.

规定区间 $[a,b]$ 为适合 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有 x 组成的集合. 因此,

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

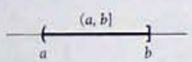


方括号表示端点包含在图形内.⊖

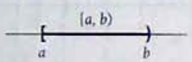
注意, 不要把区间 (a,b) 与有序对 (a,b) 相混淆, 后者与平面中两个变量的方程有关, 如1.1节中所述. 某处出现该记号, 通过上下文便可弄清其意义.

下述区间包含一个端点而不包含另一个端点:

$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}.\ \text{其图形不包含 } a \text{ 但包含 } b.$$



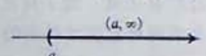
$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}.\ \text{其图形包含 } a \text{ 但不包含 } b.$$



30

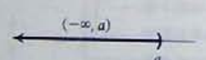
有些区间可无限伸展, 在一个方向或两个方向没有界. 我们采用符号 ∞(读作"无穷大")以及 $-\infty$(读作"负无穷大")来表示这样的区间. 记号 (a,∞) 表示所有大于 a 的数组成的集合——也就是,

$$(a,\infty)=\{x \mid x>a\}.$$



类似地, 记号 $(-\infty,a)$ 表示所有小于 a 的数组成的集合——也就是,

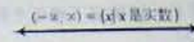
$$(-\infty,a)=\{x \mid x<a\}.$$



⊖ 有些书分别用图形 和 代替 和 .

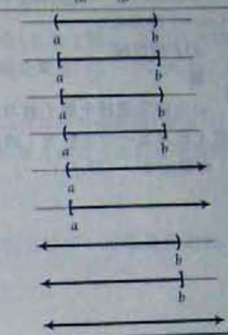


记号 $[a,\infty)$ 和 $(-\infty,a]$ 是指它们包含其端点. 区间 $(-\infty,\infty)$ 是指所有实数组成的集合.

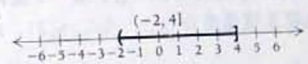


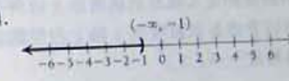
把各区间记号总结在下表中.

区间: 记号与图形

区间记号	集合记号	图形
(a,b)	$\{x \mid a<x<b\}$	
$[a,b]$	$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
$[a,b)$	$\{x \mid a\leqslant x<b\}$	
$(a,b]$	$\{x \mid a<x\leqslant b\}$	
(a,∞)	$\{x \mid x>a\}$	
$[a,\infty)$	$\{x \mid x\geqslant a\}$	
$(-\infty,b)$	$\{x \mid x<b\}$	
$(-\infty,b]$	$\{x \mid x\leqslant b\}$	
$(-\infty,\infty)$	$\{x \mid x$ 是实数$\}$	

例1~4 用区间记号表示所给集合或图形.

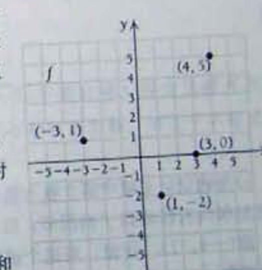
1. $\{x \mid -4<x<5\}=(-4,5)$
2. $\{x \mid x\geqslant -2\}=[-2,\infty)$
3. 

4. 

31

求定义域和值域

各有序对的集合是一个**关系**. 两个变量的方程的各个解组成有序对的集合, 从而形成一个关系. 当有序对组成的集合中没有两个不同的有序对共有一个相同的第一个坐标时, 就得到一个函数. **定义域**是所有第一个坐标组成的集合, 而**值域**是所有第二个坐标组成的集合.



例5 求函数 f 的定义域和值域, f 的图形如右图所示.

解 这是一个很简单的函数. 它的图形只含四个有序对且可以写成

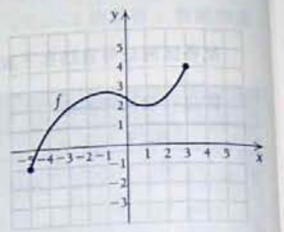
$$\{(-3,1),(1,-2),(3,0),(4,5)\}.$$

直接从图形就可读出 x 值和 y 值, 因而可以确定其定义域和值域.

2007/08/16

定义域是第一个坐标组成的集合，即{−3，1，3，4}．值域是第二个坐标组成的集合，即{1，−2，0，5}． ■

例6 设函数 f 的图形如右图所示，试确定下列每个问题的结果．



a)值域中与(定义域中的)数1组成有序对的数．即求 $f(1)$．

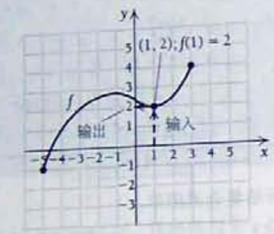
b) f 的定义域．

c)定义域中与(值域中的)数1组成有序对的数．即求使 $f(x)=1$ 的所有 x．

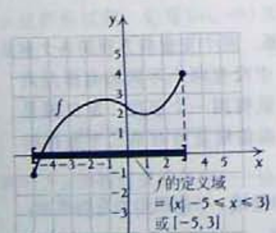
32 d) f 的值域．

解

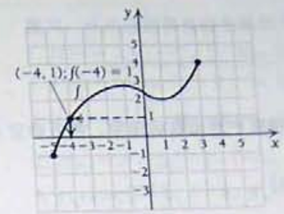
a)为确定值域中哪个数与定义域中的1组成有序对，先在 x 轴上找到数1．其次，在 f 的图形上找其第一个坐标为1的点．从该点出发，朝 y 轴方向移动可以求得相应的 y 坐标2．输入1有输出2——即 $f(1)=2$．

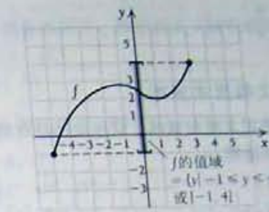


b)函数的定义域是由该图形上的所有点的 x 值或输入组成的集合．它们从−5延伸到3，并且可以看成是该曲线在 x 轴上的投影或射影．因此定义域是集合 $\{x \mid -5 \leqslant x \leqslant 3\}$，或用区间记号写成 $[-5, 3]$．



c)为确定定义域中哪个数与值域中的数1组成有序对，在 y 轴上找到数1(见左下图)．从此向左和向右移动到 f 的图形，以求一些点(输入)使得1是其第二个坐标(输出)．存在这样的点，即(−4，1)．注意，对这个函数，$x=-4$ 是定义域中与数1成有序对的唯一成员．对于其他函数，可能有定义域的多个成员与值域的一个成员组成有序对．





33

d)函数的值域是由该图形上的所有点的 y 值或输出组成的集合(见右上图)．它们从−1延伸到4，并且可以看成是该曲线在 y 轴上的投影或射影．因此，值域是集合 $\{y \mid -1 \leqslant y \leqslant 4\}$，或用区间记号表示为 $[-1, 4]$． ■

如果一个函数是由方程或公式给出的，其定义域可理解为由一些使得其函数值(输出)可以计算出来的实数(输入)组成的最大集合．即定义域是由所有允许输入到该公式的数组成的集合．为求定义域，想一想，“哪些数可以代入?”

例7 求 $f(x)=|x|$ 的定义域．

解 要问“哪些数可以代入?”换句话说，有数 x 使 $|x|$ 不能计算吗? 回答是否定的．因此，f 的定义域是所有实数组成的集合． ■

例8 求 $f(x)=\dfrac{3}{2x-5}$ 的定义域．

解 要问“哪些数可以代入?”或者，有哪些数 x 使 $3/(2x-5)$ 不能计算? 因为，当分母 $2x-5$ 为0时，不能计算出 $3/(2x-5)$，所以，为了使 f 的定义域不包括那些实数，需要解下列方程：

$$2x-5=0 \quad \text{令分母等于 0}$$

$$2x=5 \quad \text{两边加 5}$$

$$x=\frac{5}{2}. \quad \text{两边除以 2}$$

因此，$\dfrac{5}{2}$ 不在定义域内，而其他实数都在定义域内．

f 的定义域是 $\left\{x \mid x \text{ 是一个实数，且 } x \neq \dfrac{5}{2}\right\}$，或用区间记号表示为 $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2}, \infty\right)$． ■

例9 求 $f(x)=\sqrt{4+3x}$ 的定义域．

解 要问“哪些数可以代入?”或者，有哪些数 x 使 $\sqrt{4+3x}$ 不能计算? 因为当被开方数 $4+3x$ 是负数时 $\sqrt{4+3x}$ 不是实数，所以其定义域是使 $4+3x \geqslant 0$ 的所有实数．解这个不等式求出这些实数．(参看附录，复习不等式的求解．)

$$4+3x \geqslant 0$$

$$3x \geqslant -4 \quad \text{化简}$$

$$x \geqslant -\frac{4}{3}. \quad \text{两边除以 3}$$

2007/08/16

[34] 定义域是$\left[-\frac{4}{3}, \infty\right)$.

上机技术演练

确定定义域和值域　试用绘图器在给定的视窗中画函数的图形，然后确定其定义域和值域.

a) $f(x)=3-|x|$, $[-10, 10, -10, 10]$

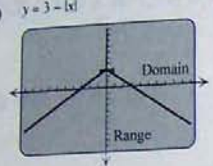
b) $f(x)=x^3-x$, $[-3, 3, -4, 4]$

c) $f(x)=\frac{12}{x}$, 或 $12x^{-1}$, $[-14, 14, -14, 14]$

d) $f(x)=x^4-2x^2-3$, $[-4, 4, -6, 6]$

我们画出了下列图形.

a) $y=3-|x|$

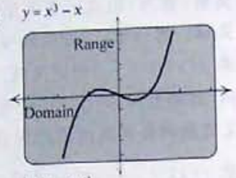


$[-10, 10, -10, 10]$

定义域＝所有实数；

值域＝$(-\infty, 3]$.

b) $y=x^3-x$

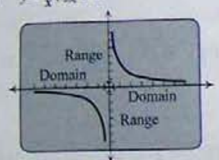


$[-3, 3, -4, 4]$

定义域＝所有实数；

值域＝所有实数.

c) $y=\frac{12}{x}$, 或 $12x^{-1}$



$[-14, 14, -14, 14]$

数 0 不能作为输入.

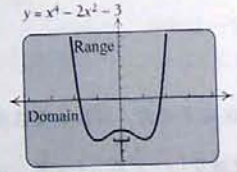
定义域＝$\{x \mid x$ 是实数，且 $x \neq 0\}$，

或$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$；

值域＝$\{y \mid y$ 是实数，且 $y \neq 0\}$，或

$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

d) $y=x^4-2x^2-3$



$[-4, 4, -6, 6]$

定义域＝所有实数；

值域＝$[-4, \infty)$.

利用 **TRACE** 选项，沿着曲线从左到右移动光标，可以进一步证实所得结果. 另外，还可以利用 **TABLE** 选项. 在例 d)中，看上去其定义域好像不可能是所有实数，因为其图形显得"苗条"，但是，再验证其表达式可知，的确可以代入任何实数.

练习　试用绘图器在给定的视窗中画函数的图形，确定其定义域和值域.

1. $f(x)=|x|-7$, $[-10, 10, -10, 10]$
2. $f(x)=2+3x-x^3$, $[-5, 5, -5, 5]$
3. $f(x)=\frac{-16}{x}$, 或 $-16x^{-1}$, $[-20, 20, -20, 20]$
4. $f(x)=x^4-2x^2-7$, $[-4, 4, -9, 9]$
5. $f(x)=\sqrt{x+4}$, $[-8, 8, -8, 8]$
6. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $[-5, 5, -5, 5]$
7. $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$, $[-5, 5, -5, 5]$
8. $f(x)=x^3-5x^2+x-4$, $[-10, 10, -20, 10]$ [35]

函数在应用中的定义域

由表达式给出的函数的定义域(实际上也涉及值域)有时会因其应用背景而改变. 再看一看 1.1 节中的例 5.

例 10　商业：复利. 假定存入 10 000 美元，年复利率为 i，存期为 8 年. 由 1.1 节定理 1 可知，账户上的结存可表示为

$$A=P(1+i)^t=10\,000(1+i)^8.$$

结存 A 是利率 i 的函数，且可表示为

$$A(i)=10\,000(1+i)^8.$$

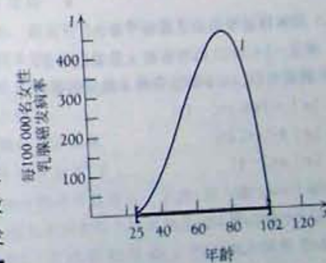
试确定其定义域.

解　i 为任何实数都可代入表达式中，但是负利率和零利率都没有意义. 应用的实际情况不考虑非正数. 因此，其定义域是所有正数的集合$(0, \infty)$. 不过，大的输入对 i 可能是很不现实的. ■

例 11　生命科学：乳腺癌发病率. 右下图(在 1.1 节讨论过，没有方程)近似反映了每 100 000 名女性的乳腺癌发病率 I，它是年龄 x 的函数. 该图形的方程是多项式函数

$$I(x)=-0.000\,055\,4x^4+0.006\,7x^3-0.099\,7x^2-0.84x-0.25.$$

试用图形求其定义域.



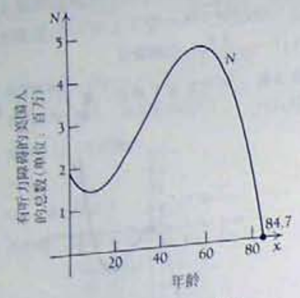
资料来源：National Cancer Institute [36]

解　按本例的情形，产生负输出的输入是没有意义的. 由图形可知，对于介于 25 与 102 之间的 x 值，函数值(输出)是非负的. 在这个年龄段考察女性乳腺癌的发病率应该是合理的. 因此定义域是$[25, 102]$[⊖]. ■

在本书中，当讨论其他类型的函数时，确定函数

⊖ 值域实际上是由介于 0 与大约 450 之间的整数组成的集合，但是我们把它近似地表示为非负实数.

2007/08/16



*b)说明为什么数 −20 不在定义域中.

*c)说明为什么数 90 不在定义域中.

肺癌. 从 1930 年以来，每 100 000 名男性肺癌和支气管癌的发病率可近似地用函数

$$r(x)=-0.000\,775x^3+0.069\,6x^2-0.209x+4.68$$

来表示，其中 x 是从 1930 年到 2000 年的年数.（资料来源：American Cancer Society，Surveillance Research，2002.）

这个函数的图形如右图所示.

59. a)试用图形估计其定义域.

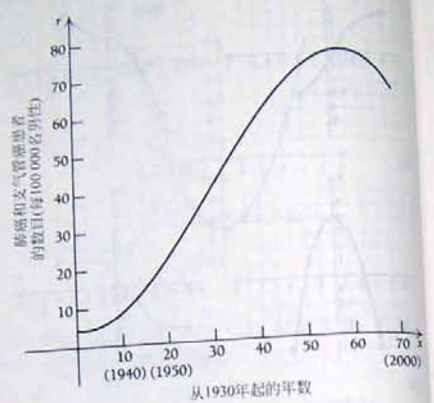
b)试用图形估计其值域.

60. a)试用图形近似给出每 100 000 名男性癌症发病率为 50 的所有 x 值.

37
~
39

b)试用图形近似给出每 100 000 名男性癌症发病率为 70 的所有 x 值.

c)试用公式近似求出 1995 年肺癌和支气管癌的发病率.



综合题

*61. 设给定的函数使 $f(2)=-5$. 试对这个事实给出你所能给出的多个解释.

*62. 说明一个函数的定义域与值域有何不同.

*63. 给出一个函数的例子，数 3 不在其定义域中，并且说明数 3 为何不在其中.

上机技术演练

64. 确定 32，35，39，40 和 47 题中每个函数的值域.

65. 确定 33，36，48，51 和 52 题中每个函数的值域.

1.4 斜率与线性函数

要点

- 作形如 $x=a$ 和 $y=f(x)=b$ 的方程的图形.
- 作线性函数的图形.
- 已知一条直线的斜率和该直线上的一点，以及已知一条直线上的两个点，求直线方程.
- 解涉及斜率和线性函数的应用问题.

水平线与竖直线

讨论方程 $y=b$ 和 $x=a$ 的图形.

例 1

a)作出 $y=4$ 的图形.

b)确定该关系是否为一个函数.

解

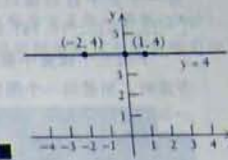
a)该图形由第二个坐标是 4 的所有有序对组成. 为了看出如(−2，4)这样的有序对为何是 $y=4$ 的解，可把上述方程写成

$$y=0x+4.$$

于是(−2，4)是它的解，因为

$$4=0(-2)+4$$

成立.



b)竖直线检验法行之有效. 因此这个关系是一个函数. ■

例 2

a)作出 $x=-3$ 的图形.

b)确定该关系是否为一个函数.

解

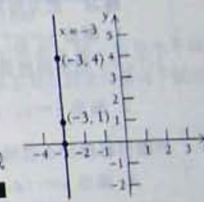
a)该方程由第一个坐标是 −3 的所有有序对组成. 为了看出如(−3，4)这样的有序对为何是 $x=-3$ 的解，可以把上述方程写成

$$x+0y=-3, \quad 或 \quad x=0y-3.$$

于是(−3，4)是解，因为

$$(-3)+0(4)=-3$$

成立.



b)这个关系不是一个函数，因为竖直线检验法失效. 该竖直线本身与该图形多处相交——实际上是无限多处相交. ■

40

一般地，我们有下面的定理.

定理 3 $y=b$ 或 $f(x)=b$ 的图形(即水平线)是函数的图形. $x=a$ 的图形(即竖直线)不是函数的图形.

上机技术演练

目检斜率

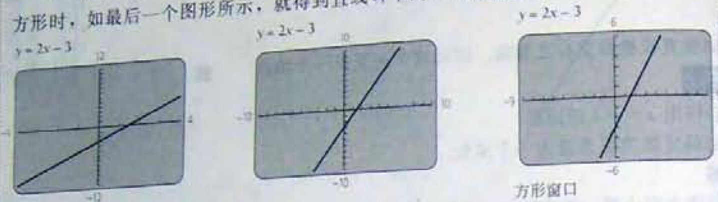
探索 改变视窗. 考察下面所示[−10，10，−10，10]视窗. 注意，可看出两个轴上的单位距离是不相等的. 在这种情形，y 轴上所显示的区间长度大约是 x 轴上的区间长度的三分之二. 如果把窗口的尺寸转换成[−6，6，−4，4]，所得到的图形在两个轴上的单位看上去是大致相等的.



2007/08/16

创建这样一个窗口称之为**改变窗口**(squaring the window). 在 TI-83 绘图器上，有一个关于自动窗口修正的 **ZSQUARE** 选项. 该选项把标准窗口尺寸修改成 [−15.1 613, 15.161 3, −10, 10].

下列三个视窗中都是直线 $y=2x-3$ 的图形，但是视窗是不同的. 当窗口是方形时，如最后一个图形所示，就得到直线斜率的一个准确表示.



方形窗口

练习 把方形视窗用于下列各题.

1. 画出 $y=x+1$，$y=2x+1$，$y=3x+1$ 和 $y=10x+1$ 的图形. 你认为 $y=247x+1$ 的图形将像什么直线?

41 2. 画出 $y=x$，$y=\frac{7}{8}x$，$y=0.47x$ 和 $y=\frac{2}{31}x$ 的图形. 你认为 $y=0.000\,018x$ 的图形将像什么直线?

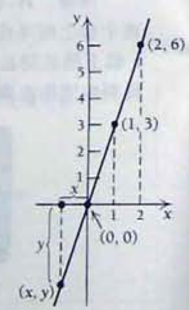
3. 画出 $y=-x$，$y=-2x$，$y=-5x$ 和 $y=-10x$ 的图形. 你认为 $y=-247x$ 的图形将像什么直线?

4. 画出 $y=-x-1$，$y=-\frac{3}{4}x-1$，$y=-0.38x-1$ 和 $y=-\frac{5}{32}x-1$ 的图形. 你认为 $y=-0.000\,043x-1$ 的图形将像什么直线?

方程 $y=mx$

考察下列数表，然后描出图形.

x	1	−1	$-\frac{1}{2}$	2	−2	3	−7	5
y	3	−3	$-\frac{3}{2}$	6	−6	9	−21	15



注意到表中下方的数与上方的数之比是 3. 也就是

$$\frac{y}{x}=3 \quad 或 \quad y=3x.$$

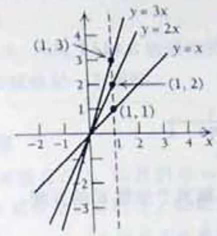
利用表中各有序对可以画出方程 $y=3x$ 的图形(见右图). 注意这是一个函数.

定理 4 由表达式

$$y=mx \quad 或 \quad f(x)=mx$$

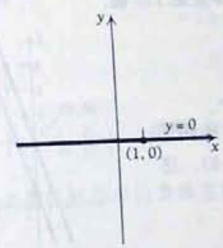
给出的函数的图形是经过原点(0, 0)和点(1, m)的直线. 常数 m 称为该直线的**斜率**(slope).

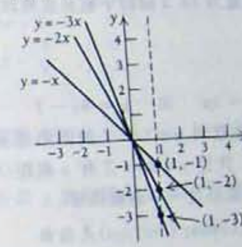
当 m 为正数时，$y=mx$ 的各种图形如左下图所示. 注意，这样的图形从左到右的走向是向上倾斜. 正斜率大的直线比正斜率较小的直线上升得快.




各种斜率的直线 42

当 $m=0$ 时，$y=0x$，或 $y=0$. 左下图是 $y=0$ 的图形. 注意，它既是 x 轴，也是水平线. 当 m 为负数时，$y=mx$ 的图形如右下图所示. 注意，这样的图形从左到右的走向是向下倾斜.





正向变化

有许多应用与形如 $y=mx$ 的方程有关，其中 m 是某个正数. 在这种情形，我们就说有**正向变化**(direction variation)，而 m(斜率)称为**变化常数**(variation constant)，或**比例常数**(constant of proportionality). 一般说来，只考虑 x 和 y 的正数值.

定义 变量 y 随 x **正向变化**，是指存在某个正常数 m 使得 $y=mx$. 也称 y 与 x **成正比例**.

例 3 生命科学：地球上和月球上的重量. 一个物体在月球上的重量 M(磅[⊖])与该物体在地球上的重量 E 成正比. 在地球上体重 180 磅的宇航员在月球上的体重将为 28.8 磅.

a)求变化的方程.

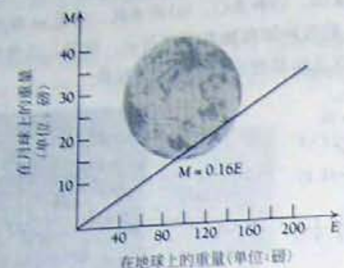
b)一个宇航员在月球上体重为 19.2 磅. 该宇航员在地球上的体重将是多少?

⊖ 磅的单位符号为 lb，1lb=0.453 592 37kg. ——编辑注

2007/08/16

解

a)因为 $M=mE$，于是 $28.8=m(180)$，所以 $0.16=m$。因此 $M=0.16E$。



43 b)为求在月球上体重 19.2 磅的宇航员在地球上的体重，解关于变量 E 的方程

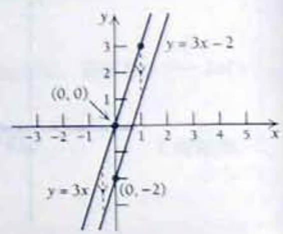
$$19.2=0.16E，\quad 令 M=19.2$$

得

$$120=E.$$

因此，在月球上体重为 19.2 磅的宇航员在地球上的体重是 120 磅。■

方程 $y=mx+b$



比较方程

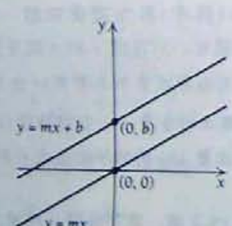
$$y=3x \quad 和 \quad y=3x-2$$

的图形(见右图)。注意到 $y=3x-2$ 的图形是 $y=3x$ 的图形向下平移两个单位，并且 $y=3x-2$ 有 y 截距 $(0,\ -2)$。还注意到 $y=3x-2$ 的图形是一个函数图形。

定义 **线性函数**(linear function)是指由

$$y=mx+b \quad 或 \quad f(x)=mx+b$$

给出的函数，它的图形是一条平行于 $y=mx$ 且有 y 截距 $(0,\ b)$ 的直线。常数 m 称为**斜率**。(见下图)。



当 $m=0$ 时，$y=0x+b=b$，于是得到称之为**常值函数**(constant function)的特殊函数(参看本节定理 3)。这个函数的图形是一条水平线。

上机技术演练

探索 b 在画 $f(x)=mx+b$ 的图形时，可以利用绘图器考察 b 的作用。

练习

1. 画 $y_1=x$ 的图形，然后用同一个视窗画 $y_2=x+3$ 和 $y_3=x-4$ 的图形。把 y_2 和 y_3 的图形与 y_1 的图形进行比较。最后，不画图，比较 $y=x$ 与 $y=x-5$ 的图形。

2. 利用 **TABLE** 选项比较 $x=0$ 时 y_1，y_2 和 y_3 的值，然后滚动到其他值，看是否能确定一个图形。

斜截式方程

任何非竖直线 l，由其斜率 m 和 y 截距唯一确定。换句话说，斜率描述该直线的“倾斜度”，而 y 截距是该直线与 y 轴相交的点。因此有下述定义。 44

定义 $y=mx+b$ 称为直线的**斜截式方程**(slope-intercept equation)。

例 4 求 $2x-4y-7=0$ 的斜率和 y 截距。

解 解出 y 得

$$-4y=-2x+7$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$$

斜率：$\frac{1}{2}$　　y 截距：$\left(0,\ -\frac{7}{4}\right)$ ■

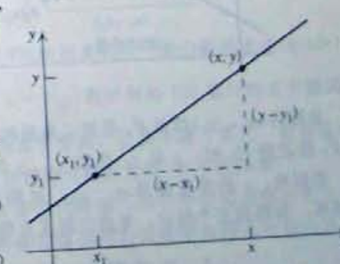
点斜式方程

假定已知一条直线的斜率以及该直线上不是 y 截距的某个点，仍然可以求出该直线的方程。

例 5 求包含点 $(-1,\ -5)$ 且斜率为 3 的直线方程。

解 斜率用 $m=3$ 表示，由斜截式方程有

$$y=3x+b,$$



因而只需确定 b。因为 $(-1,\ -5)$ 在该直线上，因而有

$$-5=3(-1)+b,$$

所以

$$-2=b \quad 且 \quad y=3x-2.$$ ■

如果点 $(x_1,\ y_1)$ 在直线

$$y=mx+b \quad (1)$$

上，则 45

$$y_1=mx_1+b. \quad (2)$$

方程(1)减方程(2)消去 b 就得到

$$y-y_1=(mx+b)-(mx_1+b)=mx+b-mx_1-b$$
$$=mx-mx_1=m(x-x_1),$$

定义　$y-y_1=m(x-x_1)$称为直线的**点斜式方程**(point-slope equation).

这个定义告诉我们，只要已知一条直线的斜率及其上任一点，就可以写出它的方程.

例 6　求包含点$(-1,\ -5)$且斜率为$\frac{2}{3}$的直线方程.

解　取$m=\frac{2}{3}$，$(-1,\ -5)$为已知点，代入

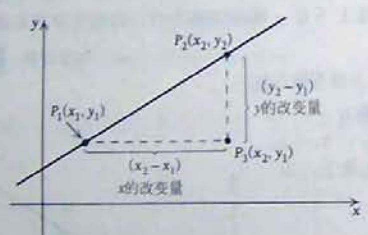
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

中可得

$$y-(-5)=\frac{2}{3}[x-(-1)]$$
$$y+5=\frac{2}{3}(x+1)$$
$$y+5=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$$
$$y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}-5=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}-\frac{15}{3}=\frac{2}{3}x-\frac{13}{3}.$$ ■

计算斜率

如果已知一条直线的两个点的坐标，就可以确定计算其斜率的方法．设有一条非竖直线，$(x_1,\ y_1)$和$(x_2,\ y_2)$分别是该直线上的两个不同点P_1和P_2的坐标．考虑其直角边平行于坐标轴的直角三角形，如下图中所示.



46

坐标为$(x_2,\ y_1)$的点P_3是该三角形的第三个顶点．当从P_1移动到P_2时，y从y_1变到y_2．y的改变量是y_2-y_1．类似地，x的改变量是x_2-x_1．这两个改变量之比就是斜率．为得到这个结论，考虑点斜式方程

$$y-y_1=m(x-x_1).$$



哪些直线有相同的斜率?

因为$(x_2,\ y_2)$在该直线上，因而一定有

$$y_2-y_1=m(x_2-x_1).$$

又因为它是非竖直线，所以两个x坐标一定不同，因而x_2-x_1非零且可以用它去除上式两边，于是得到下述定理.

定理 5　$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y\text{ 的改变量}}{x\text{ 的改变量}}$=包含点$(x_1,\ y_1)$和$(x_2,\ y_2)$的直线的斜率.

例 7　求包含点$(-2,\ 6)$和$(-4,\ 9)$的直线的斜率.

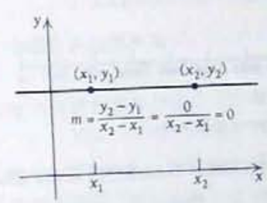
解　由定理5有

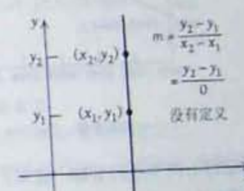
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-9}{-2-(-4)}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}.$$

注意，取哪个点为第一个点无所谓，只要x坐标和y坐标都按同一顺序相减即可．在本例中，也可以如下求m：

$$m=\frac{9-6}{-4-(-2)}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}.$$ ■

如果直线是水平线，则任意两个点的y改变量都是0．因此水平直线的斜率为0．如果直线是竖直的，则任意两个点的x改变量都是0．因为0不能作除数，所以斜率没有定义．竖直线没有斜率．因此，"0斜率"和"无斜率"是两个完全不同的概念.





47

斜率的应用

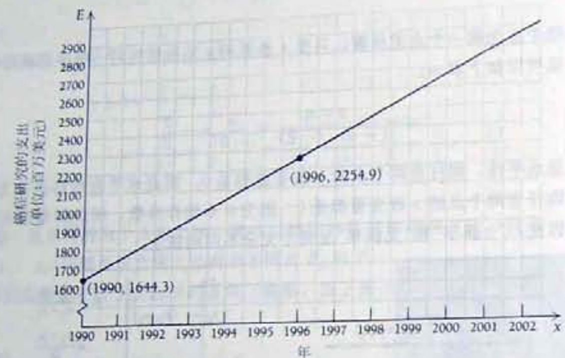
斜率有许多实际应用．例如，常用如2%，3%和6%的数来表示一条公路的坡度(grade)，以此说明丘陵或山地上的公路有多陡．3%的坡度$\left(3\%=\frac{3}{100}\right)$表示每经100英尺的水平距离，公路升高3英尺，而−3%的坡度表示每经100英尺的水平距离，公路下降3英尺．跑步运动员在体育锻炼时可以改变跑步机踏板的坡度．客机上的舷梯可能有大约−0.6的斜率.

建筑师和木匠在设计和建造楼梯、扶手或屋顶时要用到斜率．另一个应用出现在水文学中．当一条江河流过时，河水的强度或力量跟河水的垂直落差与它的水平流程之比的大小有关．斜率还可以理解为**平均变化率**(average rate of change).

2007/08/16



例8 生命科学：关于癌症研究的总支出．癌症研究的总支出逐年稳步增长，如下图所示．求总支出的平均变化率．



资料来源：The New England Journal of Medicine.

48

解 首先确定图上两个点的坐标．这里，取它们为(1990，1644.3)和(1996，2254.9)．然后计算斜率或变化率如下：

$$\text{斜率}=\text{平均变化率}=\frac{y\text{的改变量}}{x\text{的改变量}}$$

$$=\frac{2254.9-1644.3}{1996-1990}=\frac{610.6}{6}\approx 101.8(\text{美元/年}).$$

这个结果告诉我们，癌症研究的总支出每年增长大约 101.8 百万美元． ■

线性函数的应用

许多应用可以用线性函数来建立模型．

例9 商业：总成本．Raggs 服装有限公司每年的**固定成本**(fixed cost)是 10 000 美元．这些成本，如租金、业务维持费等是必须支付的，无论该公司生产多少套服装都如此．要生产某个式样的服装 x 件，除固定成本外，每套(件)服装要花费 20 美元．即生产 x 套这种服装的**变动成本**(variable cost)是 $20x$ 美元．这些是直接跟生产有关的成本，如原料、薪金、燃料等．于是，一年生产 x 套服装的**总成本**(total cost)$C(x)$可表示为函数 C：

$$C(x)=(\text{变动成本})+(\text{固定成本})=20x+10\,000.$$

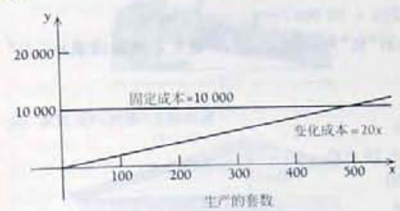
a)画出变动成本、固定成本和总成本的函数图形．

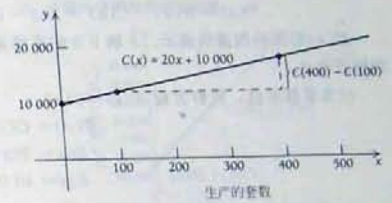
b)生产 100 套服装的总成本是多少？400 套呢？

c)生产 400 套服装比生产 100 套服装多支出多少成本？

解

a)变动成本函数和固定成本函数如左下图所示．总成本函数如右下图所示．从实际情况来看，这些函数的定义域是非负整数 0，1，2，3 等等，因为服装的套数既不能取负数，也不能取分数．通常的做法是，把这些图形的定义域描绘成好像是由非负实数组成的整个集合．





b)生产 100 套服装的总成本是 49

$$C(100)=20\cdot 100+10\,000=12\,000(\text{美元}).$$

生产 400 套服装的总成本是

$$C(400)=20\cdot 400+10\,000=18\,000(\text{美元}).$$

c)生产 400 套服装的成本比生产 100 套服装的成本多

$$C(400)-C(100)=18\,000-12\,000=6\,000(\text{美元}).$$ ■

例10 商业：损益分析．参看例9．Raggs 有限公司决定，从销售 x 套服装所获得的总收益按每套 80 美元来计算．即总收益 $R(x)$可表示为函数

$$R(x)=(\text{单价})\times(\text{卖出的套数})=80x.$$

a)用同一个坐标系画出 $R(x)$和 $C(x)$的图形．

b)总利润 $P(x)$可表示为函数 P：

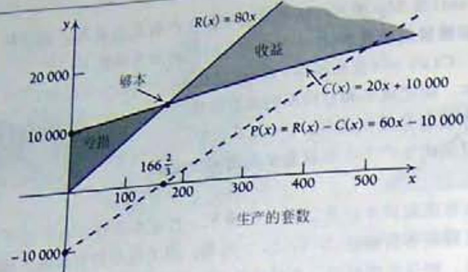
$$P(x)=(\text{总收益})-(\text{总成本})=R(x)-C(x).$$

确定 $P(x)$，并且利用 a)项中画图时所采用的同一个坐标系画出 $P(x)$的图形．

c)在使 $P(x)=0$ 的 x 值处，公司将够本(即无利润又无亏损)．这是使 $R(x)=C(x)$的点．求 x 的**够本值**(break-even value)．

解

a)$R(x)=80x$ 和 $C(x)=20x+10\,000$ 的图形如下所示．当 $C(x)$在 $R(x)$上方时，将出现亏损．当 $R(x)$在 $C(x)$上方时，将有收益．



b)我们知道

$$P(x) = R(x) - C(x) = 80x - (20x + 10\ 000) = 60x - 10\ 000.$$

$P(x)$的图形用虚线表示. x 轴下方的虚线表示“负”利润或亏损. x 轴上方的虚线表示“正”

50 利润或收益.

c)为求够本值，需解方程 $R(x)=C(x)$：

$$R(x) = C(x)$$
$$80x = 20x + 10\ 000$$
$$60x = 10\ 000$$
$$x = 166\frac{2}{3}.$$

因为不可能生产$\frac{2}{3}$套服装，如何处理这个分数答案？可以把它四舍五入成 167. 预测够本值通常要进行充分的考虑，因为公司为了获利最大，必须有效经营. ■

习题 1.4

作下列方程的图形.

1. $y=-4$
2. $y=-3.5$
3. $x=4.5$
4. $x=10$

作下列函数的图形. 求斜率和 y 截距.

5. $y=-3x$
6. $y=-0.5x$
7. $y=0.5x$
8. $y=3x$
9. $y=-2x+3$
10. $y=-x+4$
11. $y=-x-2$
12. $y=-3x+2$

求斜率和 y 截距.

13. $2x+y-2=0$
14. $2x-y+3=0$
15. $2x+2y+5=0$
16. $3x-3y+6=0$
17. $x=2y+8$
18. $x=-4y+3$

求直线方程：

19. 已知 $m=-5$ 且包含点(1，−5).
20. 已知 $m=7$ 且包含点(1，7).
21. 已知 $m=-2$ 且包含点(2，3).
22. 已知 $m=-3$ 且包含点(5，−2).
23. 已知斜率为 2 且包含点(3，0).
24. 已知斜率为−5 且包含点(5，0).
25. 已知 y 截距(0，−6)和斜率$\frac{1}{2}$.
26. 已知 y 截距(0，7)和斜率$\frac{4}{3}$.
27. 已知斜率为 0 且包含点(2，3).
28. 已知斜率为 0 且包含点(4，8).

求包含一对已知点的直线斜率，如果其斜率存在的话.

29. (−4，−2)和(−2，1)
30. (−2，1)和(6，3)
31. $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$和$\left(-3, \frac{4}{5}\right)$
32. $\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{8}\right)$和$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{16}\right)$
33. (3，−7)和(3，−9)

34. (−4，2)和(−4，10)
35. (2，3)和(−1，3)
36. $\left(-6, \frac{1}{2}\right)$和$\left(-7, \frac{1}{2}\right)$
37. $(x, 3x)$和$(x+h, 3(x+h))$
38. $(x, 4x)$和$(x+h, 4(x+h))$
39. $(x, 2x+3)$和$(x+h, 2(x+h)+3)$
40. $(x, 3x-1)$和$(x+h, 3(x+h)-1)$

41—52. 求 29—40 题中包含一对已知点的直线方程.

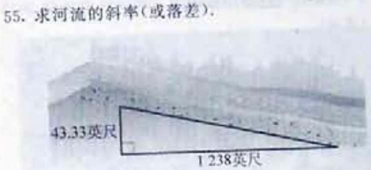
53. 求跑步机踏板的斜率(或坡度).



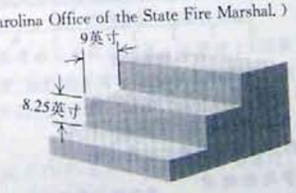
54. 求屋顶的斜率(或倾斜度).



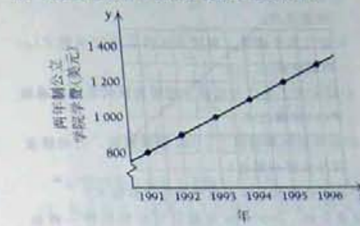
55. 求河流的斜率(或落差).



56. 楼梯技术要求. 北卡罗来纳州法律要求，楼梯踏板宽度不能小于 9 英寸[⊖]，而其梯高不能超过 8.25 英寸. 见下图. 根据这条法律，北卡罗来纳州的楼梯的最大坡度是多少？(资料来源：North Carolina Office of the State Fire Marshal.)

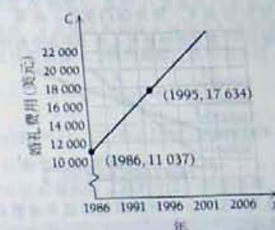


57. 求两年制公立学院的学费的平均变化率.



资料来源：*Statistical Abstract of the United States*

58. 求婚礼费用的平均变化率.



资料来源：*Modern Bride Magazine*

应用

商业与经济

59. 投资. 某人投资 P 美元，利率为 8%. 一年后，投资增长到金额 A.
 a)说明 A 与 P 成正比例.
 b)当 $P=100$ 美元时，求 A.
 c)当 $A=259.20$ 美元时，求 P.

60. 损益分析. 滑雪板厂商正在规划一条新的滑雪板生产线. 第一年，装备新生产线的固定成本是 22 500 美元. 生产每副滑雪板的变动成本估计为 40 美元. 销售部门预计，在第一年间，按每副 85 美元的价格可卖出 3 000 副.



⊖ 英寸的单位符号为 in，1in=0.025 4m. ——编辑注

a)建立关于生产 x 副滑雪板的总成本函数 $C(x)$ 的表达式.

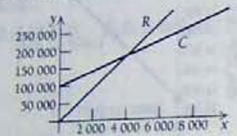
b)建立关于销售 x 副滑雪板的总收益函数 $R(x)$ 的表达式.

c)建立关于生产与销售 x 副滑雪板的总利润函数 $P(x)$ 的表达式.

d)如果按预期销售了 3 000 副滑雪板，公司将实现什么样的损益?

e)公司必须卖出多少副滑雪板才会够本?

61. 损益分析. Boxowitz 电脑公司计划销售一种新的绘图计算器. 第一年，建立新生产线的固定成本是 100 000 美元. 生产每台计算器的变动成本估计为 20 美元. 销售部门预计，在第一年间，按每台 45 美元的价格可卖出 150 000 台计算器.



a)建立关于生产 x 台计算器的总成本函数 $C(x)$ 的表达式.

b)建立关于销售 x 台计算器的总收益函数 $R(x)$ 的表达式.

c)建立关于生产和销售 x 台计算器的总利润函数 $P(x)$ 的表达式.

d)如果按预期销售了 150 000 台计算器，公司将实现什么样的损益?

e)公司必须卖出多少台计算器才会够本?

62. 直线折旧法. 一个公司在某年 1 月花5 200 美元购买了一台办公设备. 预期该设备的使用期是 8 年. 在哪一年末，它的折旧价(trade-in value)或残值(salvage value)将为 1 100 美元? 如果公司每年按金额递减折旧法计算折旧，那么在 $t(0\leqslant t\leqslant 8)$ 年以后，其账面值(book value)或残值可以表示为线性函数

$$V(t)=C-t\left(\frac{C-S}{N}\right).$$

其中 C 为资产的原始成本(5 200)，N 为预期寿命的年数(8)，S 为残值(1 100).

a)求关于适用该办公设备的直线折旧法的线性函数.

b)分别求 0 年，1 年，2 年，3 年，4 年，7 年和 8 年后的残值.

63. 损益分析. 一名大学生决定夏天去修剪草坪. 剪草机的初始成本是 250 美元. 汽油和维修费是每块草坪 1 美元.

a)建立关于修剪 x 块草坪的总成本函数 $C(x)$ 的表达式.

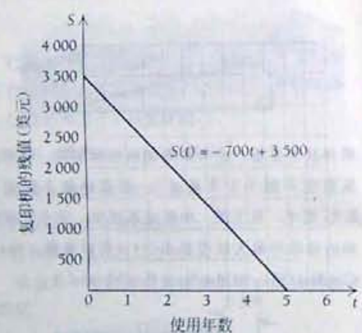
b)该学生确定，关于修剪草坪的总利润函数用 $P(x)=9x-250$ 表示. 求从修剪 x 块草坪所获总收益的函数表达式. 该学生每块草坪收费多少?

c)学生在获得利润以前，需要修剪多少草坪?

64. 直线折旧法. (参看 62 题.)一个承租商用每平方英尺 40 美元的费用来改建一个 25 000 平方英尺的营业场地. 在关于直线折旧法的 IRS 准则下，这些改建在 39 年以后将完全折旧——即零残值. 试求 10 年后这些改建的残值.

65. 残值. (见 62 题.)某公司花 60 000 美元购买一套新的计算机系统，并且计划 5 年以后其残值将为 2 000 美元. 试用直线折旧法求其 3 年后的残值.

66. 残值. Tyline Electric 公司用函数 $S(t)=-700t+3\,500$来求一台复印机购买 t 年以后的残值 $S(t)$ (美元).



a)数 −700 和 3 500 各表示什么?

b)这台复印机完全折旧需多长时间?

*c)S 的定义域是什么? 试作说明.

生命科学与物理学

67. 能量守恒. 房屋绝缘材料的 R-系数与其厚度 T 成正比.

a)如果在 $T=3$ 英寸时，$R=12.51$. 求变化的方程.

b)6 英寸厚的绝缘材料的 R 系数是多少?

68. 神经脉冲速度. 神经纤维中的脉冲以 293 英尺/秒的速度传播. 在 t 秒内传播距离 D 可表示为 $D=293t$. 脉冲从身高 6 英尺的某人的脑髓传播到脚趾需要多长的时间?

69. 脑髓的重量. 人的脑髓的重量 B 与他的体重 W 成正比.

a)已知体重 200 磅的人有 5 磅重的脑髓. 求把 B 表示成 W 的函数的变化方程.

b)把变化方程的常数写成百分比，并解释所得到的方程.

c)体重 120 磅的人的脑髓的重量是多少?

70. 肌肉的重量. 人的肌肉的重量 M 与他的体重 W 成正比.

a)已知体重 200 磅的人有 80 磅重的肌肉. 求把 M 表示成 W 的函数的变化方程.

b)把变化方程的常数写成百分比，并解释所得到的方程.

c)体重 120 磅的人的肌肉的重量是多少?



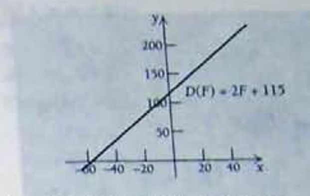
肌肉重量与体重成正比

71. 在薄冰上的刹车距离. 在薄冰上(用某个固定速度)运行的普通轮胎的刹车距离可以表示为气温 F 的线性函数

$$D(F)=2F+115.$$

其中 $D(F)$ 是刹车距离，单位为英尺，而气温 F 的单位是华氏温度数.

a)求 $D(0)$，$D(-20)$，$D(10)$ 和 $D(32)$.



*b)说明为什么定义域限制在区间[−57.5, 32].

72. 反应时间. 在你开车行驶时，看见一位女士突然横穿马路. 你的大脑自动记录这一非常时刻，并发指令到脚紧急刹车. 在这段时间汽车运行了距离 D(英尺). 其中 D 是速度 r(英里/小时)的函数，r 是指你看到女士时汽车行驶的速度. 其反应距离是一个线性函数，且可表示成

$$D(r)=\frac{11r+5}{10}.$$

a)求 $D(5)$，$D(10)$，$D(20)$，$D(50)$ 和 $D(65)$.

b)画出 $D(r)$ 的图形.

*c)该函数的定义域是什么? 试作说明.



73. 估计身高. 如果知道某个男性或女性的某些骨头的长度，人类学家可以用某个线性函数来估计这个人的身高. 肱骨是从肘部到肩部的骨头. 设 x 为肱骨的长度，单位为厘米. 那么，肱骨长为 x 的男性的身高(厘米)可表示为

$$M(x)=2.89x+70.64.$$

肱骨长为 x 的女性的身高可表示为

$$F(x)=2.75x+71.48.$$



某废墟中发现一根 26 厘米长的肱骨.

a)如果假定肱骨属于男性，他该多高?

b)如果假定肱骨属于女性，她该多高?

74. **野鸭的数目.** 1999 年 8 月，在 Mono Lake Fall Shorebird/Waterfowl Count 的年度统计中，野鸭数是 215 只. 2001 年 8 月，野鸭数是 286 只.

a)把年数作为 x 坐标，把野鸭数作为 y 坐标. 求包含这两个数据的点的直线方程.

b)用 a)中的方程估计在 2000 年 8 月的年度统计中的野鸭数.

*c)2000 年 8 月，实际统计的野鸭数是 272 只. a)中求出的方程能给出每年所统计的野鸭数的一个准确表达式吗?

75. **海牛的数目.** 1999 年 1 月，在佛罗里达州的航空测量中，统计有 1 873 头海牛. 2001 年 1 月统计有 3 276 头海牛.（资料来源：Florida Fish and Wildlife Conservation Commission.）

a)设年数是 x 坐标，海牛数是 y 坐标，求包含这两个数据的点的直线方程.

b)用 a)中的方程估计在 2000 年 1 月的年度统计中的海牛数.

*c)2000 年 1 月，实际统计的海牛数是 1 629 头. a)中求出的方程能给出每年所统计的海牛数的一个准确表达式吗?

社会科学

76. **都市人口.** 某镇的人口是 P. 增长 2%以后，它的新人口数是 N.

a)假定 N 与 P 成正比例，求变化的方程.

b)当 $P=200\,000$ 时，求 N.

c)当 $N=367\,200$ 时，求 P.

77. **女性新婚的平均年龄.** 一般说来，我们的社会正在走向晚婚. 女性新婚的平均年龄可近似地表示为线性函数

$$A(t)=0.08t+19.7.$$

其中 $A(t)$ 是 1950 年以后的第 t 年女性新婚的平均年龄. 因此，$A(0)$ 是 1950 年女性新婚的平均年龄，$A(50)$ 是 2000 年的平均年龄，如此等等.

a)求 $A(0)$，$A(1)$，$A(10)$，$A(30)$ 和 $A(50)$.

b)2003 年，女性新婚的平均年龄是多少?

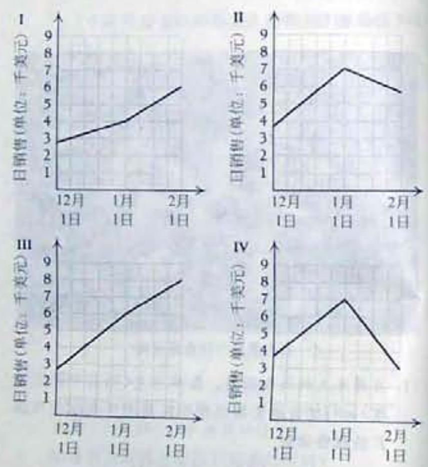
c)作出 $A(t)$ 的图形.

综合题

*78. 说明并且比较在哪种情形应该用斜截式方程而不用点斜式方程.

*79. 讨论并且表述以下概念及其联系：固定成本、总成本、总收益和总利润.

80. **商业：日销售.** 把下述命题与下列最合适的图形相搭配.



a)1 月以后，日销售继续上升，但速度放慢.

b)1 月以后，销售下降，且下降的速度比其以往上升的速度要快.

c)1 月以后，日销售呈现成倍增长的态势.

d)1 月以后，日销售下降，其下降速度是其(去年)12 月增长速度的 $\frac{1}{2}$.

上机技术演练

81. 用同一个坐标系，画出上述某些习题中的总收益函数、总成本函数和总利润函数. 标出其收益区域和亏损区域.

51/55

1.5 其他函数与模型

要点

- 作函数图形和解应用题.
- 计算根式和有理指数.
- 确定有理函数的定义域以及作某些有理函数的图形.
- 求已知供给函数和需求函数的平衡点.

二次函数

定义 二次函数(quadratic function) f 可表示为

$$f(x)=ax^2+bx+c,\text{其中 } a\neq 0.$$

我们已经讨论过某些二次函数，例如，$f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x^2-1$. 利用下面的信息可以作出二次函数的手画图形.

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图形称为**抛物线**(parabola).

a)其图形总是杯子形状的曲线，如下述例 1 和例 2 中的曲线.

b)其图形有一个转向点(turning point)，即**顶点**(vertex)，顶点的第一个坐标可表示为

$$x=-\frac{b}{2a}.$$

c)其图形有竖直线 $x=-b/(2a)$ 作为其对称轴(line of symmetry)(它不是图形的一部分).

d)如果 $a>0$，其图形开口向上；如果 $a<0$，其图形开口向下.

例 1 作 $f(x)=x^2-2x-3$ 的图形.

解 先求顶点或转向点. 顶点的 x 坐标是

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2(1)}=1.$$

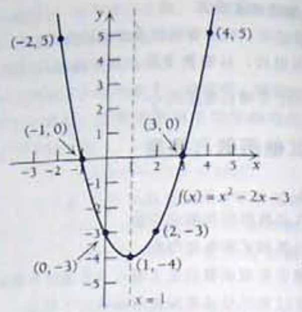
在方程中，用 1 代替 x，求顶点的第二个坐标：

$$y=f(1)=1^2-2(1)-3$$
$$=1-2-3=-4.$$

顶点是(1，−4). 竖直线 $x=1$ 是图形的对称轴. 在顶点的每一边选取某些 x 值，再计算出 y 值，标出这些点，最后画出抛物线：

$$f(x)=x^2-2x-3.$$

x	$f(x)$	
1	−4	←顶点
0	−3	
2	−3	
3	0	
4	5	
−1	0	
−2	5	



例 2 作 $f(x)=-2x^2+10x-7$ 的图形.

解 先求顶点或转向点. 顶点的 x 坐标是

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{10}{2(-2)}=\frac{5}{2}.$$

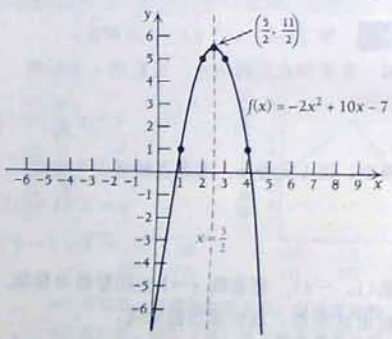
在方程中用$\frac{5}{2}$代替 x，求顶点的第二个坐标：

$$y=f\left(\frac{5}{2}\right)=-2\left(\frac{5}{2}\right)^2+10\left(\frac{5}{2}\right)-7$$
$$=-2\left(\frac{25}{4}\right)+25-7=\frac{11}{2}.$$

顶点是$\left(\frac{5}{2},\ \frac{11}{2}\right)$，而对称轴是 $x=\frac{5}{2}$. 在顶点的两边选一些 x 值，计算 y 值，标出这些点，然后画出抛物线：

$$f(x)=-2x^2+10x-7.$$

x	$f(x)$	
$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$	←顶点
0	−7	
1	1	
2	5	
3	5	
4	1	
5	−7	



上机技术演练

练习 利用例 1 和例 2 的步骤画出下列每个函数图形. 用 **TABLE** 选项对每个函数创建一个输入-输出表. 最后用绘图器检验其图形.

1. $f(x)=x^2-6x+4$
2. $f(x)=-2x^2+4x+1$

57

二次函数与 x 轴的交点(x 截距)的第一个坐标可以通过解二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 来求得，只要其交点存在. 如果有实数解，则可以用二次公式(quadratic formula)来求解.

定理 6 二次公式

任意二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的解可用下式给出：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

在解二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$时，先试着分解因式，然后利用零乘积原理(见附录 A). 当分解因式行不通或有困难时，就可以用二次公式. 它总能给出解. 如果 $b^2-4ac<0$，则无实数解，但在称之为复数(complex number)的扩充数系中有解. 在本书中，我们只考虑实数解.

例 3 解方程：$3x^2-4x=2$.

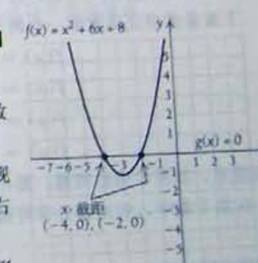
解 先求其标准形式 $ax^2+bx+c=0$，然后确定 a，b 和 c：

$$3x^2-4x-2=0,$$
$$a=3,\quad b=-4,\quad c=-2.$$

再用二次公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(3)(-2)}}{2\cdot3}$$
$$=\frac{4\pm\sqrt{16+24}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{40}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{4\cdot10}}{6}=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{6}$$
$$=\frac{2(2\pm\sqrt{10})}{2\cdot3}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}.$$

它的解是$(2+\sqrt{10})/3$ 和$(2-\sqrt{10})/3$.



58

代数法与图示法的关系

在二次方程的解与二次函数的 x 截距之间可以建立代数法与图示法的联系.

刚才讨论了二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图形. 现在看一看函数 $f(x)=x^2+6x+8$ 的图形以及它的 x 截距，如右图所示.

x **截距**(x-intercept)，如$(-4,\ 0)$和$(-2,\ 0)$，是该图形

与 x 轴相交的点. 这两个点也是函数 $f(x)=x^2+6x+8$ 的图形与 $g(x)=0$ 的图形(x 轴)的交点.

现在解二次方程

$$x^2+6x+8=0.$$

虽然可以用二次公式，但我们改用因式分解.

$$x^2+6x+8=0$$

$$(x+4)(x+2)=0 \qquad \text{因式分解}$$

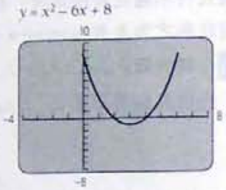
$$x+4=0 \quad \text{或} \quad x+2=0 \qquad \text{零乘积原理}$$

$$x=-4 \quad \text{或} \quad x=-2.$$

由此看出，$0=x^2+6x+8$ 的解 -4 和 -2 是 $f(x)=x^2+6x+8$ 的图形的 x 截距 $(-4,0)$ 和 $(-2,0)$ 的第一个坐标.

上机技术演练

练习



1. a) 右图是

$$f(x)=x^2-6x+8$$

的图形. 只用图形求该图的 x 截距.

b) 只用图形求 $x^2-6x+8=0$ 的解.

c) 比较 a) 和 b) 的答案.

59

多项式函数

线性函数和二次函数只是一般多项式函数的一部分.

定义 **多项式函数**(polynomial function) f 可表示为

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0,$$

其中，n 是非负整数，而 a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 是实数，称之为多项式的**系数**(coefficient).

下面是多项式函数的一些例子：

$f(x)=-5$, (常函数)

$f(x)=4x+3$, (线性函数)

$f(x)=-x^2+2x+3$, (二次函数)

$f(x)=2x^3-4x^2+x+1$. (三次函数)

一般说来，如果不用绘图器，要作一个不同于线性函数和二次函数的多项式函数的图形比较困难. 在第3章中，利用微分学可画出这类图形的草图. 有些**幂函数**(power function)，例如

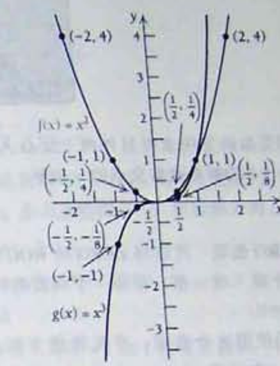
$$f(x)=ax^n$$

的图形比较好画.

例 4 试用同一个坐标系作出 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x^3$ 的图形.

解 作数值表，标出这些点，然后画图.

x	x^2	x^3
-2	4	-8
-1	1	-1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$
0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
1	1	1
2	4	8



■ 60

上机技术演练

解多项式方程

INTERSECT 选项 假定要求方程

$$x^3=3x+1$$

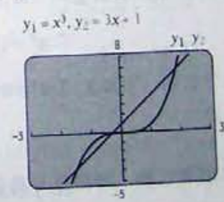
的解. 这相当于求两个函数

$$f(x)=x^3 \quad \text{和} \quad g(x)=3x+1$$

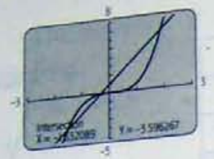
的图形的交点的 x 坐标. 把两个函数按

$$y_1=x^3 \quad \text{和} \quad y_2=3x+1$$

输入，然后画图. 采用[−3, 3, −5, 8]视窗便看到曲线和可能的交点.



看来至少有 3 个交点. 利用 CALC 菜单中的 INTERSECT 选项看到左边的交点大约是(−1.53, −3.60).

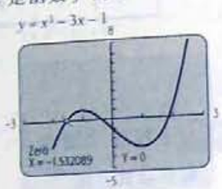


用类似的方法求得另外两个交点大约是(−0.35, −0.04)和(1.88, 6.64).

$x^3=3x+1$ 的解是这些交点的 x 坐标:

$$-1.53, -0.35 \quad 和 \quad 1.88.$$

ZERO 选项 可以用 ZERO 或 ROOT 选项求方程的解. 在这里, "零点"一词是指一个输入或 x 值, 使得一个函数的输出是 0. 即 C 是函数 f 的**零点**(zero)是指 $f(c)=0$.



为了使用这个选项, 首先要使方程的一边变为 0. 因此, 为了求 $x^3=3x+1$ 的解, 两边减去 $3x$, 再减去 1, 就有 $x^3-3x-1=0$. 画出 $y=x^3-3x-1$ 的图形, 然后利用 ZERO 选项求左边的零点, 就得到如右图所示的屏幕.

当 $x\approx-1.53$ 时, 我们看到 $x^3-3x-1=0$, 所以 −1.53 是方程 $x^3=3x+1$ 的近似解. 继续采用类似的方法, 可以近似得到其他解, 如 −0.35 和 1.88.

练习 试用 INTERSECT 选项解下列方程.

1. $x^2=10-3x$ 2. $2x+24=x^2$

3. $x^3=3x-2$ 4. $x^4-2x^2=0$

试用 ZERO 选项解下列方程.

5. $0.4x^2=280x$

(提示: 采用[−200, 800, −100 000, 200 000].)

6. $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2=2x-1$ 7. $x^2=0.1x^4+0.4$

8. $0=2x^4-4x^2+2$ 9. $x^4+x^3=4x^2+2x-4$

10. $11x^2-9x-18=x^4-x^3$

求下列函数的零点.

11. $f(x)=3x^2-4x-2$ 12. $f(x)=-x^3+6x^2+5$

61

有理函数

定义 用两个多项式的商或比给出的函数称为**有理函数**(rational function).

下述函数都是有理函数的例子.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3},$$

$$g(x)=\frac{x^2-16}{x+4},$$

$$h(x)=\frac{x-3}{x^2-x-2}.$$

只要求有理函数定义域的输入值不会导致用零作除数即可. 因而, 对于上述的 f, 其定义域由所有不等于 3 的实数组成. 为了确定 h 的定义域, 令其分母等于 0, 然后解方程:

$$x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$x=-1 \quad 或 \quad x=2.$$

因此, −1 和 2 不在其定义域中. h 的定义域由所有不等于 −1 和 2 的实数组成. 称 −1 和 2 为**裂数**(split number), 因为在涉及有理函数的情况下, 它们"分裂"或"割裂"有理函数定义域中的区间.

大多数有理函数的图形画起来相当麻烦, 最好是采用第 2 章和第 3 章中将要论述的微分学工具. 这里, 只考察比较易画的图形, 而把较难画的图形放到第 3 章或绘图器中讨论.

例 5 作 $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ 的图形.

解 在画这个特殊函数的图形之前, 可以先化简该函数. 这通过分解分子然后消去因子 1 就可做到, 如下所述:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

$$=\frac{x-3}{x-3}\cdot\frac{x+3}{1}$$

$$=x+3, x\neq3.$$

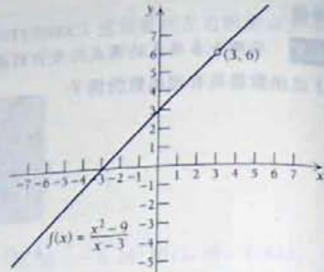
62

上述简化过程假定 x 不等于 3. 数 3 不在定义域中, 因为它会使零为除数. 因此, 可以把所给函数表示成如下函数:

$$y=f(x)=x+3, \quad x\neq3.$$

求这个函数的值, 可以代入任何不等于 3 的数. 把计算结果做成下述表格, 然后画图. 在点(3, 6)处的空圆点表示它不是该图形上的点.

x	1	0	2	−3	4	−1	−2
y	4	3	5	0	7	2	1

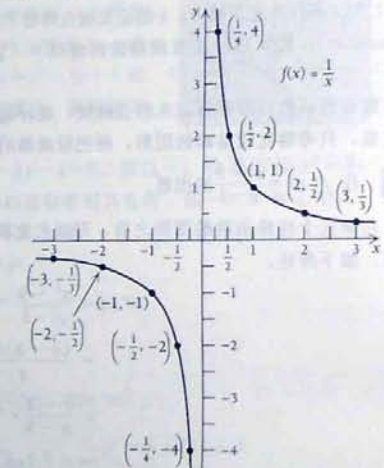


有一类重要的有理函数是由 $f(x)=k/x$ 给出的，其中 k 是常数.

例 6　作 $f(x)=1/x$ 的图形.

解　作其数值表，标出这些点，然后画出图形.

x	$f(x)$
−3	$-\frac{1}{3}$
−2	$-\frac{1}{2}$
−1	−1
$-\frac{1}{2}$	−2
$-\frac{1}{4}$	−4
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$



63

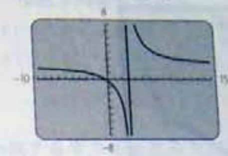
上机技术演练

有理函数的图形　考虑由

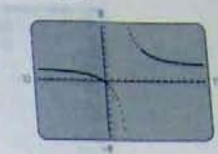
$$f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$$

给出的有理函数．下面用两种方式画出它的图形.

CONNECTED 模式



DOT 模式



这里，我们看到了绘图器的弱点．**CONNECTED** 模式可能会描绘出一个不正确的图形．这是因为，采用 **CONNECTED** 模式时，绘图器用线段连接标出的点，它连接图形的各个分支，造成竖直线 $x=3$ 好像是该图形的一部分的"假象".

另一方面，如果采用 **DOT** 模式，绘图器可简单地用虚线表示各点的坐标.

在描绘用有理式给出的函数时，如果可以选择，就采用 **DOT** 模式.

练习　用 DOT 模式作出下列各函数的图形.

1. $f(x)=\frac{4}{x-2}$
2. $f(x)=\frac{x}{x+2}$
3. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x-6}$
4. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}$
5. $f(x)=\frac{10}{x^2+4}$
6. $f(x)=\frac{8}{x^2-4}$
7. $f(x)=\frac{2x+3}{3x^2+7x-6}$
8. $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+1}$
9. 作出

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

的图形．把你的结果与例 5 作一比较.

尝试一下，既用 **DOT** 模式，也用 **CONNECTED** 模式；既用不同的视窗，也用 **TRACE** 选项．显然会出现"空圆点"吗?

在例 6 中，注意 0 不在函数的定义域中，因为它使零作分母．该函数在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \infty)$ 上是下降的．函数 $f(x)=1/x$ 是**逆变化**(inverse variation)的一个例子.

定义　y 随 x 作**相反地变化**(vary inversely)是指，有某个正数 k 使 $y=k/x$．也称 y 与 x **成反比例**(inversely proportional).

例 7　商业：股票与黄金．某些经济学家推断，股票价格与黄金价格成反比．也就是说，当黄金的价格上涨时，股票的价格就下跌；而当黄金的价格下跌时，股票的价格就上涨．假定道・琼斯工业平均指数 D(一种股票综合价格指数)与黄金价格 G 成反比，单位：美元/盎司[1]. 64

[1] 盎司的单位符号为 USfloz，1USfloz=29.573 53cm³．——编辑注

一天，道·琼斯指数是 9 177，而黄金的价格是 364 美元/盎司. 如果黄金的价格跌至 300，道·琼斯指数将是多少？



资料来源：Dow Jones Industrial Average

解 已知 $D=k/G$，所以 $9\,177=k/364$ 且 $k=3\,340\,428$. 因此

$$D=\frac{3\,340\,428}{G}$$

用 300 代替 G，然后计算 D：

$$D=\frac{3\,340\,428}{300}\approx 11\,134.76.$$

警示！ 不要按这个例子的方程抛售太多的"股票"．这个例子只是让我们对经济关系有所了解，准确预测股票市场的方程尚未得到. ■

绝对值函数

下面给出的是一个绝对值函数及其图形的例子．一个数的绝对值是在数轴上 0 到该数的距离．数 x 的绝对值记作 $|x|$.

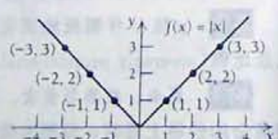
例 8 作 $f(x)=|x|$ 的图形.

解 作数值表，标出一些点，然后画出图形.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0	1	2	3

可以把这个函数看作是根据绝对值的定义分段定义的函数：

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & 如果\ x\geqslant 0,\\ -x, & 如果\ x<0.\end{cases}$$



■

上机技术演练

练习 作出下列函数的图形.

1. $f(x)=|x|$
2. $f(x)=|x^2-4|$ 65

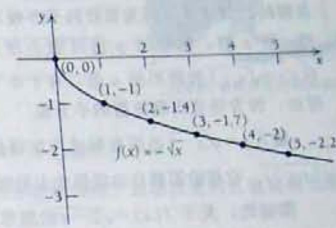
平方根函数

下面给出的例子是平方根函数及其图形.

例 9 作 $f(x)=-\sqrt{x}$ 的图形.

解 这个函数的定义域只取非负数——区间 $[0,\infty)$，可以在计算器上求平方根的近似值. 作数值表，标出一些点，然后画出图形.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$ 或 $-\sqrt{x}$	0	-1	-1.4	-1.7	-2	-2.2



■

指数为有理数的幂函数

受平方根与整数指数幂的启发，定义有理指数，只要使指数律仍然成立就行（见附录）．例如，如果指数律是成立的，就应该有

$$a^{1/2}\cdot a^{1/2}=a^{1/2+1/2}=a^1=a.$$

因此启示我们把 $a^{1/2}$ 定义为 $\sqrt{a}$．类似地，可把 $a^{1/3}$ 定义为 a 的立方根 $\sqrt[3]{a}$．一般地，

$$a^{1/n}=\sqrt[n]{a}，只要\sqrt[n]{a}\ 有意义.$$

接下来，如果指数律成立，就应该有

$$\sqrt[n]{a^m}=(a^m)^{1/n}=(a^{1/n})^m=a^{m/n}.$$

表示式 $a^{-m/n}$ 则可定义为 66

$$a^{-m/n}=\frac{1}{a^{m/n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

例 10 转换成有理指数.

a) $\sqrt[3]{x^2}=x^{2/3}$

b) $\sqrt[4]{y}=y^{1/4}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{b^5}}=\dfrac{1}{b^{5/3}}=b^{-5/3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{x^{1/2}}=x^{-1/2}$

e) $\sqrt{x^8}=x^{8/2}$，或 x^4

■

例 11　转换成根式.

a) $x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$　　b) $t^{6/7}=\sqrt[7]{t^6}$

c) $x^{-2/3}=\frac{1}{x^{2/3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$　　d) $e^{-1/4}=\frac{1}{e^{1/4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$

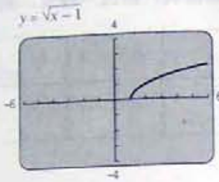
例 12　化简.

a) $8^{5/3}=(8^{1/3})^5=(\sqrt[3]{8})^5=2^5=32$

b) $81^{3/4}=(81^{1/4})^3=(\sqrt[4]{81})^3=3^3=27$

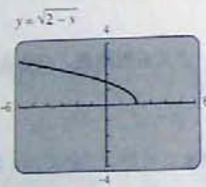
上机技术演练

作根式函数的图形　作由根式定义的函数图形涉及根的近似计算. 因为负数的平方根不是实数，所以，对一些 x 值，相应的 y 值可能不存在. 例如，关于对于小于 1 的 x 值就不 $f(x)=\sqrt{x-1}$ 的图形的 y 值，存在，因为将会出现负数的平方根.



输入 $y=\sqrt{x-1}$ 必须在根式内加圆括号，写成 $y_1=\sqrt{(x-1)}$. 有些绘图器自动提供舍去的圆括号.

类似地，关于 $f(x)=\sqrt{2-x}$ 的图形的 y 值，对于大于 2 的 x 值不存在.



练习　作出下列每个函数的图形. 然后用 **TABLE** 选项和 **TRACE** 选项确定每个函数的定义域和值域. **MATH** 菜单中有函数 $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ 和 $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$，可输入 k 次方根.

1. $f(x)=\sqrt{x}$　　2. $g(x)=\sqrt{x+2}$
3. $f(x)=\sqrt[3]{x}$　　4. $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$
5. $f(x)=\sqrt[4]{x-1}$　　6. $F(x)=\sqrt[5]{6-x}$
7. $g(x)=5-\sqrt{x+3}$　　8. $f(x)=4-\sqrt[3]{x}$
9. $f(x)=x^{2/3}$　　10. $g(x)=x^{1.41}$

用 **GRAPH** 选项和 **TABLE** 选项确定下列各式是否正确.

11. $\sqrt{x+4}=\sqrt{x}+2$　　12. $\sqrt{25x}=5\sqrt{x}$

早先，我们画过 $f(x)=\sqrt{x}$ 的图形，也可以说画过 $f(x)=x^{1/2}$ 或 $f(x)=x^{0.5}$ 的图形. 幂函数

$$f(x)=ax^k,\quad k\text{ 为分数}$$

常出现在一些应用问题中.

例 13　生命科学：栖息地范围. 动物的栖息地范围是指该动物为它自己设定的活动区域. 在统计学研究中①，已经假设该区域的面积 H 可近似表示为函数

$$H=W^{1.41},$$

其中 W 是动物的体重. 试作这个函数的图形.



（北美洲）驯鹿在它们的地盘内

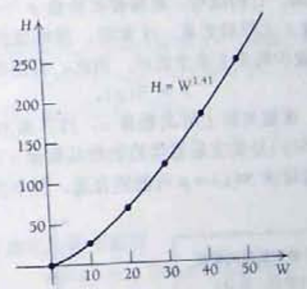
解　在计算器上用幂键 $\boxed{y^x}$ 可以求该函数的近似值.

W	0	10	20	30	40	50
H	0	26	68	121	182	249

我们知道

$$H=W^{1.41}=W^{141/100}=\sqrt[100]{W^{141}}.$$

其图形如下所示. 注意到函数值从左到右递增. 当体重增加时，动物活动的区域面积也增加.



供给函数与需求函数

经济学中的供给与需求是用增函数与减函数来建模的.

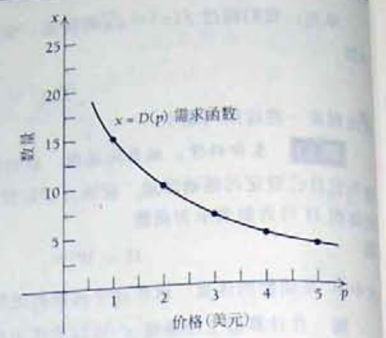
需求函数

考察下面的表和图. 它们说明，每袋糖的价格 p 与消费者以该价格购买这种净重 5 磅袋装糖的袋数 x 之间的关系.

① 资料来源：Emlen, J. M., *Ecology: An Evolutionary Approach*, p. 200 (Reading, MA: Addison-Wesley, 1973).

需求表

每袋净重 5 磅的价格(p)(单位：美元)	净重 5 磅袋装糖的袋数(x)(单位：百万)
5	4
4	5
3	7
2	10
1	15



注意到，当每袋的价格下降时，消费者的需求数量就会增加；而当每袋的价格上涨时，消费者的需求数量就会减少. 因此，自然把 x 看成 p 的函数，

$$x = D(p),$$

并且在水平轴上标出价格 p，在竖直轴上标出数量 x，然后画出该函数的图形. 因此，对于需**求函数**(demand function)D，如果价格为 p，则 $D(p)$是消费者所需求的物品数量 x.

在有些情形，把需求函数写成 $D(x)=p$ 可能更合适，其中价格是需求数量的函数.

供给函数

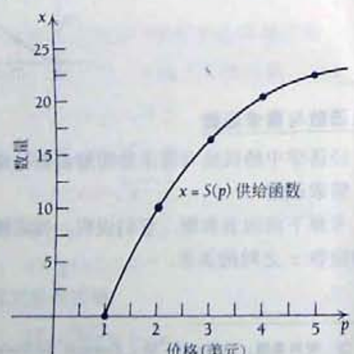
考察下面所给出的表和图. 它们说明，每袋糖的价格 p 与卖主愿意供应的(或以该价格卖出的)净重 5 磅袋装糖的袋数 x 之间的关系. 注意到，当每袋价格上涨时，更多的卖主乐于供应；而当每袋价格下降时，较少的卖主乐于供给. 因此，自然把 x 看作 p 的函数，

$$x = S(p),$$

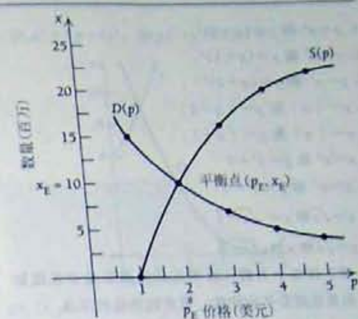
并且在水平轴上标出价格 p，在竖直轴上标出数量 x，然后画出该函数的图形. 因此，对于供**给函数**(supply function)S，$S(p)$是卖主乐意供给的物品数量 x 或以价格 p 卖出的物品数量 x.

69 在有些情形，把供给函数写成 $S(x)=p$ 可能更合适，其中价格是所供给的数量的函数.

每袋净重 5 磅的价格(p)(单位：美元)	净重 5 磅袋装糖的袋数(x)(单位：百万)
1	0
2	10
3	16
4	20
5	22



现在一起来考察这两条曲线. 当价格上涨时，供给增加而需求减少；当价格下降时，供给减少而需求增加. 这两条曲线的交点(p_E, x_E)称为**平衡点**(equilibrium point). 平衡价格 p_E(在本例中，每袋 2 美元)是以该价格使供需数量为 x_E(在本例中，x_E 为 10 百万袋)的点. 这是卖方乐意供给同时也是消费者愿意购买的数量. 上述情形类似于买主和卖主在一种物品的销售上讨价还价，平衡点或销售价格是他们最后都认可的价格.



例 14 经济：平衡点. 求需求函数

$$D(p) = 300 - 49p$$

和供给函数

$$S(p) = 100 + p$$

的平衡点. 70

解 为求平衡点，令 $D(p)=S(p)$，然后解方程：

$$300 - 49p = 100 + p$$
$$-50p = -200$$
$$p = \frac{-200}{-50} = 4.$$

所以 $p_E = 4$ 美元. 为求 x_E，可把 p_E 代入 $D(p)$或 $S(p)$. 例如，代入 $S(p)$：

$$x_E = S(p_E) = S(4) = 100 + 4 = 104.$$

因此平衡数量是 104 个单位，而平衡点是(4, 104). ■

上机技术演练

练习

1. 用 **INTERSECT** 选项求需求函数

$$D(p) = 1\,123.6 - 61.4p$$

和供给函数

$$S(p) = 201.8 + 4.6p$$

的平衡点.

习题 1.5

用同一个坐标系画出各对方程的图形.

1. $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$

2. $y=\frac{1}{4}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{4}x^2$

3. $y=x^2$ 和 $y=(x-1)^2$

4. $y=x^2$ 和 $y=(x-3)^2$

5. $y=x^2$ 和 $y=(x+1)^2$

6. $y=x^2$ 和 $y=(x+3)^2$

7. $y=|x|$ 和 $y=|x+3|$

8. $y=|x|$ 和 $y=|x+1|$

9. $y=x^2$ 和 $y=x^2+1$

10. $y=x^2$ 和 $y=x^2-1$

11. $y=\sqrt{x}$ 和 $y=\sqrt{x+1}$

12. $y=\sqrt{x}$ 和 $y=\sqrt{x-2}$

对下列每个方程，说明其函数图形是否是抛物线。如果该图形是抛物线，则求抛物线的顶点。

13. $y=x^2+4x-7$　　14. $y=x^2-2x+3$

15. $y=2x^4-4x^2-3$　　16. $y=3x^2-6x$

作下列函数的图形.

17. $y=x^2-4x+3$　　18. $y=x^2-6x+5$

19. $y=-x^2+2x-1$　　20. $y=-x^2-x+6$

21. $y=\frac{2}{x}$　　22. $y=\frac{3}{x}$

23. $y=\frac{-2}{x}$　　24. $y=\frac{-3}{x}$

25. $y=\frac{1}{x^2}$　　26. $y=\frac{1}{x-1}$

27. $y=\sqrt[3]{x}$　　28. $y=\frac{1}{|x|}$

29. $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$　　30. $g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$

31. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$　　32. $g(x)=\frac{x^2-25}{x+5}$

解下列方程.

33. $x^2-2x=2$　　34. $x^2-2x+1=5$

35. $x^2+6x=1$　　36. $x^2+4x=3$

37. $4x^2=4x+1$　　38. $-4x^2=4x-1$

39. $3y^2+8y+2=0$　　40. $2p^2-5p=1$

41. $x+7+\frac{9}{x}=0$（提示：两边乘以 x.）

42. $1-\frac{1}{w}=\frac{1}{w^2}$

转换成有理指数的表示式.

43. $\sqrt{x^3}$　　44. $\sqrt{x^5}$

45. $\sqrt[5]{a^3}$　　46. $\sqrt[4]{b^2}$

47. $\sqrt[5]{t}$　　48. $\sqrt[7]{c}$

49. $\frac{1}{\sqrt[3]{t^4}}$　　50. $\frac{1}{\sqrt[5]{b^6}}$

51. $\frac{1}{\sqrt{t}}$　　52. $\frac{1}{\sqrt{m}}$

53. $\frac{1}{\sqrt{x^2+7}}$　　54. $\sqrt{x^3+4}$

转换成根式.

55. $x^{1/5}$　　56. $t^{1/6}$

57. $y^{2/3}$　　58. $t^{2/5}$

59. $t^{-2/5}$　　60. $y^{-2/3}$

61. $b^{-1/3}$　　62. $b^{-1/5}$

63. $e^{-17/6}$　　64. $m^{-19/6}$

65. $(x^2-3)^{-1/2}$　　66. $(y^2+7)^{-7/4}$

67. $\frac{1}{t^{2/3}}$　　68. $\frac{1}{w^{-4/5}}$

化简.

69. $9^{3/2}$　　70. $16^{3/2}$

71. $64^{2/3}$　　72. $8^{2/3}$

73. $16^{3/4}$　　74. $25^{5/2}$

确定函数的定义域.

75. $f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$

76. $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$

77. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-5x+6}$

78. $f(x)=\frac{x^4+7}{x^2+6x+5}$

79. $f(x)=\sqrt{5x+4}$

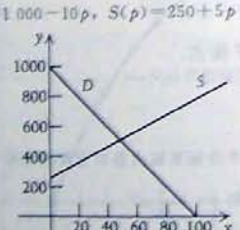
80. $f(x)=\sqrt{2x-6}$

应用

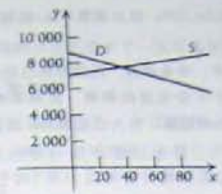
商业与经济

求下列已知需求函数与供给函数的平衡点.

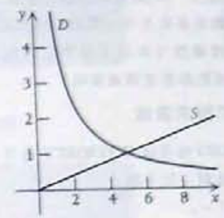
81. $D(p)=1\,000-10p$，$S(p)=250+5p$



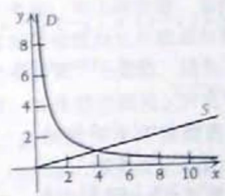
82. $D(p)=8\,800-30p$，$S(p)=7\,000+15p$



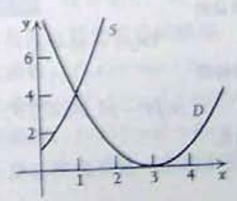
83. $D(p)=\frac{5}{p}$，$S(p)=\frac{p}{5}$



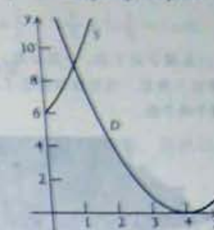
84. $D(p)=\frac{4}{p}$，$S(p)=\frac{p}{4}$



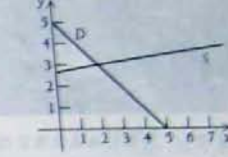
85. $D(p)=(p-3)^2$，$S(p)=p^2+2p+1$



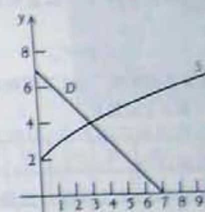
86. $D(p)=(p-4)^2$，$S(p)=p^2+2p+6$



87. $D(p)=5-p$，$S(p)=\sqrt{p+7}$



88. $D(p)=7-p$，$S(p)=2\sqrt{p+1}$



89. 股票价格与最优惠利率. 从理论上推断，一种股票的每股股价与其最优惠利率成反比. 2001 年 2 月，Microsoft 股票每股股价 S 是 62.38 美元，而最优惠利率 R 是 8.5%. 2001 年 5 月，最优惠利率跌至 6.5%. 如果成反比例的假设是正确的，该股票每股股价应该是多少?

90. 某种品牌的传真机的销售数量 x 与其价格成反比. 已得知，如果每台传真机的售价是 320 美元，则将销售 240 000 台. 如果每台售价是 480 美元，将会销售多少台?

生命科学与物理学

91. 水果分层堆放. 按下图所示的样式堆放的橘子

的个数可近似地表示为函数

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x,$$

其中 $f(x)$ 是橘子的个数，x 是层数，每一层都是一个等边三角形．当层数分别是 7，10 和 12 时，求橘子的个数．



92. *地盘*．参看例 13．动物的地盘是指它的防护区域或专有区域．例如，一头狮子有它统治的某个区域．该区域的面积 T 可以近似地表示为幂函数

$$T=W^{1.31},$$

其中 W 是狮子的体重．完成下面的近似函数数值表，然后画出它的图形．

W	0	10	20	30	40	50	100	150
T	0	20						

93. *Zipf 定律*．根据 Zipf 定律，人口数超过 S 的城市个数与 S 成反比．在 2000 年，美国有 48 个城市的人口数超过 350 000．试计算人口数超过 200 000 的美国城市个数．

94. *表面面积与质量*．质量为 75 千克的人的表面面积可以近似表示成函数

$$f(h)=0.144h^{1/2},$$

其中 $f(h)$ 用平方米来度量，而人的身高 h 用厘米来度量．（资料来源：U. S. Oncology.）

a)求质量为 75 千克而身高为 180 厘米的人的近似表面面积．

b)求质量为 75 千克而身高为 170 厘米的人的近似表面面积．

c)对 $0\leqslant h\leqslant 200$，画出函数 $f(h)$ 的图形．

综合题

95. *生命科学：污染控制*．污染控制已经成为所有国家的一个十分重要的课题．如果不把污染控制放在适当的位置，有人已经预测，可以用函数

$$P=1\,000t^{5/4}+14\,000$$

来描述大部分城市在时间 t（年）的平均污染程度，按每立方厘米含污染颗粒数来计算，其中 $t=0$ 对应于 1970 年，而 $t=32$ 对应于 2002 年．

a)分别预测 2002，2005 和 2010 年的污染程度．

b)在区间[0，40]画出该函数的图形．

*96. 一个函数至多有几个 y 截距？试作说明．

*97. 说明有理函数与多项式函数之间的区别．每个多项式函数都是有理函数吗？

上机技术演练

试用 **ZERO** 选项或 **INTERSECT** 选项近似求函数的零点，精确到三位小数．

98. $f(x)=x^3-x$

（也可以用代数方法求该函数的零点．）

99. $f(x)=x^3-2x^2-2$

100. $f(x)=2x^3-x^2-14x-10$

101. $f(x)=\frac{1}{2}(|x-4|+|x-7|)-4$

102. $f(x)=x^4+4x^3-36x^2-160x+300$

103. $f(x)=\sqrt{7-x^2}$

104. $f(x)=|x+1|+|x-2|-5$

105. $f(x)=|x+1|+|x-2|$

106. $f(x)=|x+1|+|x-2|-3$

107. $f(x)=x^8+8x^7-28x^6-56x^5+70x^4+56x^3-28x^2-8x+1$

108. 求需求函数

$$D(p)=83-p$$

和供给函数

$$S(p)=24\sqrt{p+1.9}$$

的平衡点．

1.6 数学模型与曲线拟合

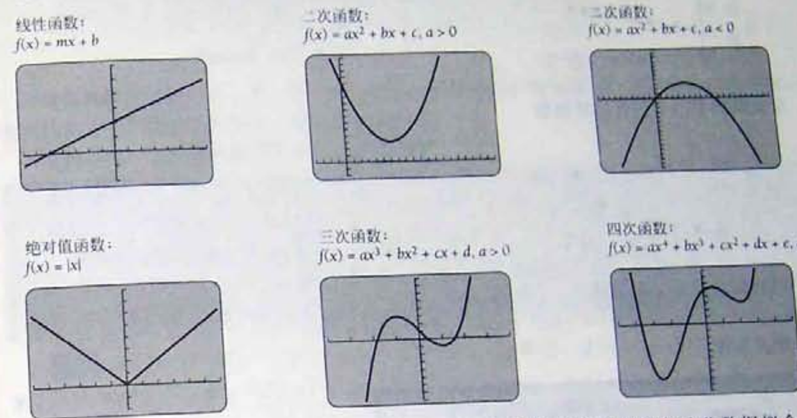
要点

- 用曲线拟合求适合于一组数据的数学模型，以及用模型作预测．

函数与数据拟合

我们已建立起了一个函数库，这些函数可以作为模型应用于许多方面．虽然以后还要引入一些其他函数，但本节先考察已经讨论过的函数，且暂不考虑有理函数．

71 / 74



现在考察一些实际数据．如何确定哪一类函数（如果有的话）有可能与这些数据拟合？一个简单的办法是检验由这些数据组成的图形，称之为**散点图**（scatterplot）．我们希望这个图形与上述图形中的某一个类似．例如，如果散点图类似于一条线段，就可以用一个线性函数为这些数据建模；如果散点图先上升后下降，或先下降后上升，且类似于抛物线的弯曲方式，就可以用一个二次函数为这些数据建模．这里不详细讨论三次函数（cubic function）、四次函数（quartic function）或多项式函数（留到第 3 章去讨论），但展示它们的图形以供参考．

下面，利用已有的函数库试探其中哪一类函数（如果有的话）有可能与某一组数据所反映的情形拟合．

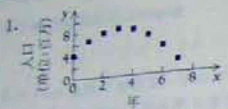
例 1～5 选择模型．对于下述散点图和图形，确定下列函数中的哪一个（如果有的话）有可能用作与该组数据拟合的模型．

线性函数，$f(x)=mx+b$；

二次函数，$f(x)=ax^2+bx+c$，$a>0$；

二次函数，$f(x)=ax^2+bx+c$，$a<0$；

既不是二次也不是一次的多项式．

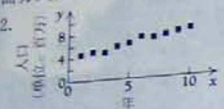
1. 

这组数据按拟合二次函数

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a < 0$$

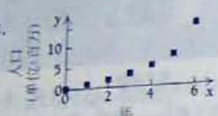
75

的弯曲方式先上升后下降.

2. 

这组数据看起来拟合线性函数

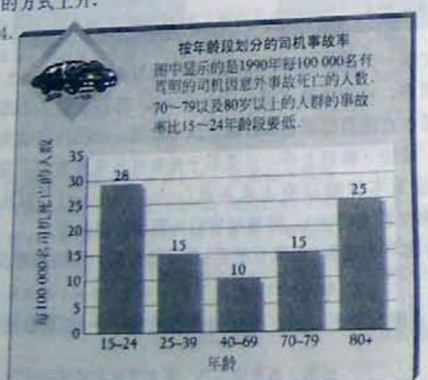
$$f(x) = mx + b.$$

3. 

这组数据按拟合二次函数

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0$$

右侧的方式上升.

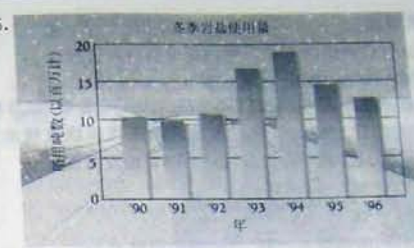
4. 

资料来源：National Highway Traffic Administration

这组数据按拟合二次函数

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0$$

的弯曲方式先下降后上升.

5. 

资料来源：Salt Institute

76

这组数据先下降，后上升，再下降，所以它们既不拟合线性函数，也不拟合二次函数，但有可能拟合一个既非二次也非一次的多项式函数. ■

下面小结一下求数学模型时可以效仿的步骤.

曲线拟合

设给定了一组数据：

1. 画该组数据组成的图形(用散点图的形式).
2. 考察该散点图以确定是否有一个已知函数近似与它拟合.
3. 用几个数据点得到的(已知函数的)几个常系数，求出与该组数据拟合的函数.

例 6 商业：迪斯尼乐园的门票. 下表列出了一组数据，显示了从 1993 年以来的若干年里，一个成年人当日进入迪斯尼乐园的门票价格 P.

年数 x (从 1993 年起)	一个成人当日游览迪斯尼乐园的门票价格 P(美元)	散点图
0(1993)	34.00	
1(1994)	36.00	
2(1995)	37.00	
3(1996)	40.81	
4(1997)	42.14	
5(1998)	44.52	

资料来源：Amusement Business



a)作该组数据的散点图，确定该组数据是否近似拟合一个线性函数.

b)求一个线性函数(近似)与该组数据拟合.

c)用模型预测 2005 年($x=12$)一个成人当日的门票价格.

解

a)散点图如上所示. 该组数据有沿直线分布的趋势，虽

然不能画出一条“理想”的直线经过所有数据点.

b)考虑线性函数

$$P(x) = mx + b, \tag{1}$$

77 其中 P 是1993年后的 x 年一个成人当日进入迪斯尼乐园的门票价格. 为了求常数(或参数) m 和 b, 需选定两个数据点. 虽然选点的方式是任意的, 但是应尽量选择能代表该直线图形的点. 这里, 可以选(1, 36)和(5, 44.52). 因为这两个点是方程(1)的解, 由此可得

$$44.52 = m \cdot 5 + b, \quad 或 \quad 44.52 = 5m + b. \tag{2}$$

$$36.00 = m \cdot 1 + b, \quad 或 \quad 36.00 = m + b. \tag{3}$$

这是一个方程组. 为了解方程组, 从方程(2)的两边减去方程(3)的两边可消去 b:

$$8.52 = 4m.$$

于是有

$$m = \frac{8.52}{4} = 2.13.$$

用2.13代替方程(3)中的 m 可以解出 b:

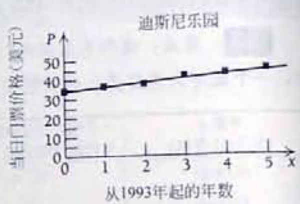
$$36 = 2.13 + b$$

$$33.87 = b.$$

把 m 的值和 b 的值代入方程(1), 我们得到由

$$P(x) = 2.13x + 33.87 \tag{4}$$

给出的函数(模型). 在右图中, 可以看到一些具有代表性的点和线性函数:



c)在方程(4)中令 $x=12$ 可以求得2005年一个成人当日的门票价格:

$$P(12) = 2.13(12) + 33.87 = 59.43.$$

78 因此, 预计2005年的门票价格是59.43美元. ■

上机技术演练

线性回归: 求一个线性函数与一组数据拟合 现在讨论**线性回归**(linear regression)法, 该方法可以用一个线性函数去与一组数据拟合. 虽然这个方法的基本原理要到7.5节才介绍, 我们在这里讨论它, 是因为利用绘图技术可以容易地实施这个方法. 线性回归的一个优点是它采用所有数据点, 而不是只采用两个点. 绘图器可以帮助我们求线性模型, 利用模型进行预测.

例 商业: 迪斯尼乐园的门票. 考虑例6中的数据.

a)利用绘图器上的 **REGRESSION** 选项作一条回归直线与已知数据拟合.

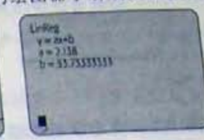
b)画带有散点图的回归直线.

c)用该模型预测2005年($x=12$)一个成人当日门票价格.

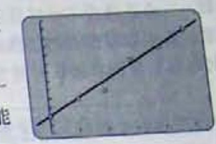
解

a)可以利用线性回归作一个线性函数与已知数据拟合. 把数据输进 **STAT** 表中, 利用 **STAT CALC** 菜单中的 **LINEAR REGRESSION** 选项, 然后把Y写成Y1, 将回归方程复制到屏幕上. 查询你个人的绘图器手册或关于按键操作的GCM.





b)设置 **STAT PLOT** 画散点图, 然后选一个窗口显示所有数据.



如果散点图不是如例6中所显示的, 则先从创建一个散点图开始做这个例子, 看是否有一个线性函数可能与这些数据点拟合.

c)为了预测2005年的门票价格, 在起始屏幕上输入Y1(12).



因此, 预测2005年的门票价格大约是59.39美元. 因此, 预测2005年的门票价格大约是59.39美元.

因此, 预测2005年的门票价格大约是59.39美元. 注意到该值与例6中所求得的值仅差0.04美元. 这种细微的差别不可能经常发生.

练习

1. 学习时间与考试成绩. 下表中的数据涉及学习时间与考试成绩.

学习时间(单位: 小时)	考试成绩(百分制)
19	83
20	85
21	88
22	91
23	?

利用绘图器上的 **REGRESSION** 选项求一条回归直线与表中数据拟合.

a)利用绘图器上的 **REGRESSION** 选项画带有散点图的回归直线.

b)作这些数据的散点图, 然后画带有散点图的回归直线.

c)利用线性模型预测某人学习了23小时可以取得的考试成绩.

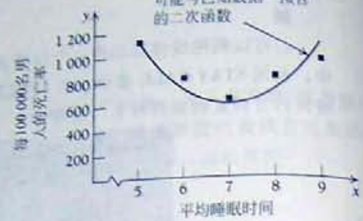
*d)讨论表中数据的线性模型的适合程度.

79

例7 生命科学: 睡眠时间与死亡率. 在耶鲁大学 Harold J. Morowitz 博士的研究报告中, 从所收集到的数据推测, 男人的死亡率与他们平均每天的睡眠时间呈现一定的关系. 这些数据在下表中列出.

平均睡眠时间 x(小时)	每 100 000 名男人的死亡率 y
5	1 121
6	805
7	626
8	813
9	967

资料来源：Morowitz，Harold J.，"Hiding in the Hammond Report，"*Hospital Practice*





a)作表中数据的散点图，并且确定该组数据是否近似拟合一个二次函数.

b)求与表中数据拟合的二次函数.

c)利用模型分别求睡眠时间为 2，8 和 10 小时的男人的死亡率.

解

a)散点图如右上图所示. 注意到死亡率先下降后上升，这表明有一个二次函数可能与该组数据拟合.

b)考察二次模型

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (1)$$

为了确定常量(或参数)a，b 和 c，采用三个数据点(5，1 121)，(7，626)和(9，967). 因为这些点是方程(1)的解，因而有

$$1\,121 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c, \quad \text{或} \quad 1\,121 = 25a + 5b + c,$$

$$626 = a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c, \quad \text{或} \quad 626 = 49a + 7b + c,$$

$$967 = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c, \quad \text{或} \quad 967 = 81a + 9b + c.$$

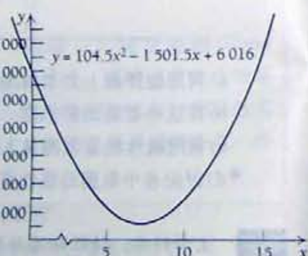
用代数方法解关于变量 a，b 和 c 的三个方程组成的方程组，可得

$$a = 104.5, \quad b = -1\,501.5 \quad \text{和} \quad c = 6\,016.$$

80

把 a，b，c 的值代入方程(1)就得到所求函数(模型)

$$y = 104.5x^2 - 1\,501.5x + 6\,016.$$



c)睡眠 2 小时的死亡率是

$$y = 104.5(2)^2 - 1\,501.5(2) + 6\,016 = 3\,431.$$

睡眠 8 小时的死亡率是

$$y = 104.5(8)^2 - 1\,501.5(8) + 6\,016 = 692.$$

睡眠 10 小时的死亡率是

$$y = 104.5(10)^2 - 1\,501.5(10) + 6\,016 = 1\,451. \quad ■$$

上机技术演练

用回归建立数学模型：求二次函数或其他多项式函数与一组数据拟合　回归函数可以推广到二次、三次和四次多项式函数. 绘图器能够帮助我们求出这些多项式模型，提出选择哪类模型最适合，利用模型作预测.

例　生命科学：年龄为 x 的女性产下活着的婴儿. 下表与一些特殊年龄的女性的活产数有关.

a)利用绘图器上的 REGRESSION 选项求一个二次函数与表中数据拟合.

b)作该组数据的散点图，然后画带有散点图的二次函数的图形.

c)利用绘图器上的 REGRESSION 选项求一个三次函数与表中数据拟合.

d)作该组数据的散点图，然后画带有散点图的三次函数的图形.

*e)确定哪个函数与表中数据拟合得较好.

年龄 x	每 1 000 个女性的活产平均数
16	34
18.5	86.5
22	111.1
27	113.9
32	84.5
37	35.4
42	6.8

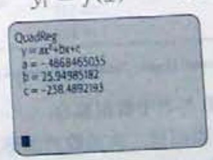
资料来源：Centers for Disease Control and Prevention

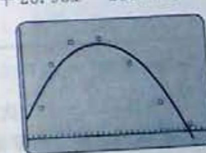
f)用 e)中的函数计算年龄为 20 和 30 的女性的活产平均数.

解　下面逐项给出解答.　81

a)用 REGRESSION 选项使一个二次函数与表中数据拟合. 其具体做法类似于前面给出的关于线性回归的上机技术演练中所提到的要点. 不过，现在是选择 QUADREG 代替 LINREG($ax+b$). 欲知详情，请查询你的手册. 于是得到下列函数：

$$y_1 = f(x) = -0.49x^2 + 25.95x - 238.49.$$

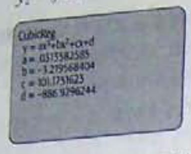


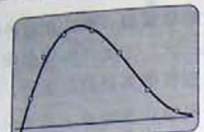


b)画出带有上述散点图的二次函数的图形.

c)用 REGRESSION 选项使一个三次函数与表中数据拟合. 选择 CUBICREG 可以求得下列函数：

$y_2=f(x)=0.03x^3-3.22x^2+101.18x-886.93.$

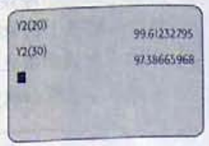




d)画出带有上述散点图的三次函数的图形.

e)三次函数的图形看上去与数据点拟合得较密切. 因此选它作为模型.

f)用绘图器进行计算，得到 Y2(20)≈99.6 和 Y2(30)≈97.4，如右图所示.



因此年龄为 20 的女性每 1 000 人的活产平均数是 99.6，而年龄为 30 的女性每 1 000 人的活产平均数是 97.4.

练习

1. 生命科学：活产.

a)用 **REGRESSION** 选项求一个四次方程与表中活产数据拟合. 作该组数据的散点图，然后画带有散点图的四次函数的图形. 确定四次函数给出的拟合是否比二次函数或三次函数要好.

b)说明为什么关于活产的三次函数的定义域把女性的年龄限制在区间[15，45].

2. 商业：按年龄划分的平均家庭收益.

年龄 x	1996 年的平均收益(美元)
19.5	21 438
29.5	35 888
39.5	44 420
49.5	50 472
59.5	39 815
65	19 448

资料来源：U. S. Bureau of the Census；The Conference Board；Simmons Bureau of Labor Statistics

a)用 **REGRESSION** 选项求一个二次函数与表中数据拟合.

b)作该组数据的散点图，然后画带有散点图的二次函数的图形.

c)用 **REGRESSION** 选项求一个三次函数与表中数据拟合.

d)作该组数据的散点图，然后画带有散点图的三次函数的图形.

e)用 **REGRESSION** 选项求一个四次函数与表中数据拟合.

f)作该组数据的散点图，然后画带有散点图的四次函数的图形.

g)确定二次、三次或四次函数中的哪一个看上去与表中数据拟合得最好.

h)利用 e)中的函数分别计算年龄为 25 和 45 的人的平均家庭收益.

3. 生命科学：睡眠时间与死亡率. 用二次回归重做例 7，求一个函数与已知数据拟合. 82

习题 1.6

选择模型. 对 1—9 题中的散点图和图形，确定下列哪个函数(如果有的话)可以用作所给数据的一个模型.

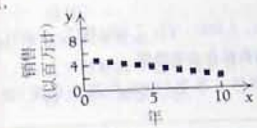
线性函数，$f(x)=mx+b$；

二次函数，$f(x)=ax^2+bx+c$，　$a>0$；

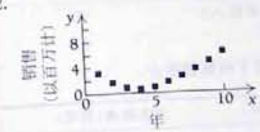
二次函数，$f(x)=ax^2+bx+c$，　$a<0$；

既不是二次也不是一次的多项式.

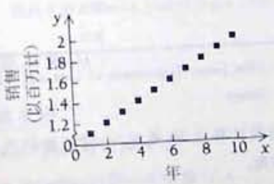
1.



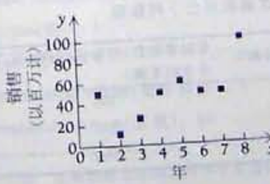
2.



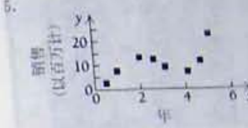
3.



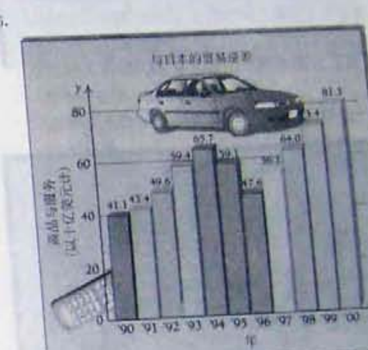
4.



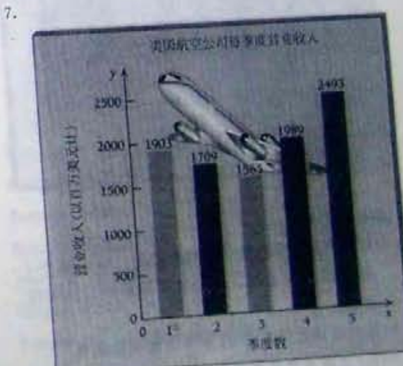
5.



6.

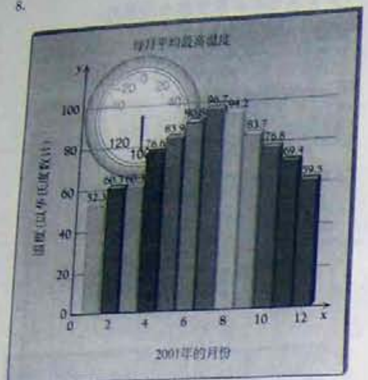


7.

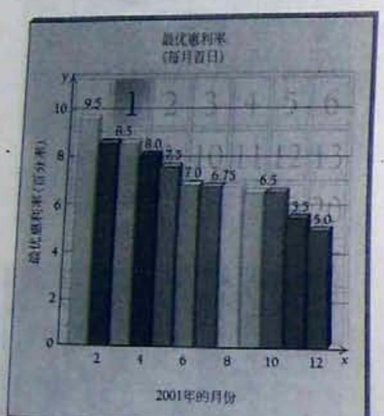


注：①这里 1 季度为 2001 年第 2 季度. 83

8.



9.



10. 最优惠利率.

a)对于第 9 题中的最优惠利率数据，用 2001 年 1 月和 12 月所给值，求与该组数据拟合的线性函数.

b)用线性函数计算 2001 年 6 月最优惠利率.

11. NHL(美国曲棍球联盟)的平均票价.

年数 x(从 1995 年起)	平均票价 y(美元)
0(1995)	33.49
1(1996)	34.72
2(1997)	38.04
3(1998)	42.15
4(1999)	42.78
5(2000)	46.38
6(2001)	47.70

a)从表中数据中选取两个点，然后求一个线性函数与该组数据拟合.

b)在同一坐标系下画出散点图和函数图形.

c)利用函数预测 2005 年和 2010 年的 NHL 门票的平均价格.

12. 美国航空公司营业净收入. 采用第 7 题中的数据.

a)利用数据点(1, 1 903), (3, 1 565)和(5, 2 493)，求一个二次函数拟合表中数据.

b)用该函数预测第 6 季度(2002 年第 3 季度)营业净收入.

*c)这个二次函数将如何计算第 4 季度(2002 年第 1 季度)的营业收入?

13. 刹车距离.

a)求二次函数与下列数据拟合.

行驶速度(英里/小时)	刹车距离(英尺)
20	25
40	105
60	300

资料来源：New Jersey Department of Law and Public Safety

b)用所求函数计算以 50 英里/小时行驶的汽车的刹车距离.

14. 日间事故.

a)求一个二次函数拟合下列数据.

行驶速度(千米/小时)	日间事故数(对每运行 200 百万千米的车辆)
60	100
80	130
100	200

b)用所求函数计算以 50 千米/小时行驶的车辆的事故数.

15. 女性心血管疾病.

a)从下列数据中选取两个点，然后求一个线性函数与表中数据拟合.

女性年龄	高血压女性所占百分比
30	3.4
40	12.7
50	25.1
60	44.2
70	60.8

资料来源：Health United States 2000, CDC/NCHS

b)在同一个坐标系下画出散点图和函数图形.

c)用所求函数计算 55 岁的高血压女性所占百分比.

16. 男性心血管疾病.

a)从下列数据中选取两个点，然后求一个线性函数与表中数据拟合.

男性年龄	高血压男性所占百分比
30	8.6
40	20.9
50	34.1
60	42.9
70	57.3

资料来源：Health United States 2000, CDC/NCHS

b)在同一个坐标系下画出散点图和函数的图形.

c)用所求函数计算 55 岁的高血压男性所占百分比.

综合题

*17. 说明对第 12 题中所求二次函数的定义域应作何规定，并且说明为什么需作这种规定.

*18. 说明对第 13 题中所求二次函数的定义域应作何规定，并且说明为什么需作这种规定.

上机技术演练

19. 最优惠利率.

a)用 **REGRESSION** 选项求一个线性函数与第 9 题中的数据拟合.

b)用所求函数计算 2001 年 6 月的最优惠利率.

*c)把你得到的答案与第 10 题中所求答案作一比较.

20. NHL 平均门票价格.

a)用 **REGRESSION** 选项求一个线性函数与第 11 题中的数据拟合.

b)用所求函数分别预测 2005 年和 2010 年的平均门票价格.

*c)把你所得到的答案与第 11 题中所求答案作一比较.

21. 与日本的贸易逆差.

a)用 **REGRESSION** 选项求一个三次函数与第 6 题中的数据拟合.

b)用所求函数分别预测 2006 年和 2010 年的贸易逆差. 84~85

*c)如果有的话，对其定义域应有什么规定? 试作说明.

概要与复习

关键术语

Ordered pair(有序对), 4[⊖]

First coordinate(第一个坐标), 4

Second coordinate(第二个坐标), 4

Solution(解), 4

Graph(图形), 4

Mathematical model(数学模型), 9

Compound interest(复利), 10

Domain(定义域), 15

Range(值域), 15

Function(函数), 15

Relation(关系), 16

Input(输入), 16

Output(输出), 16

Vertical-line test(竖直线检验法), 22

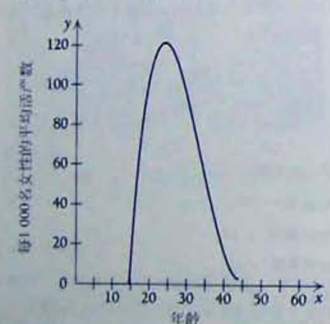
⊖ 这是指原书页码，与书中页边标注的页码一致. ——编辑注

Functions defined piecewise(分段函数)，22
Independent variable(自变量)，25
Dependent variable(因变量)，25
Set(集合)，29
Real numbers(实数)，29
Roster method(枚举法)，29
Set-builder notation(集合-成员记号)，29
Interval notation(区间记号)，30
Endpoints(端点)，30
Slope(斜率)，42
Direct variation(正向变化)，43
Variation constant(变化常数)，43
Linear function(线性函数)，44
Constant function(常值函数)，44
Slope-Intercept equation(斜截式方程)，45
Point-slope equation(点斜式方程)，46
Average rate of change(平均变化率)，48
Fixed costs(固定成本)，49
Variable costs(变动成本)，49
Total cost(总成本)，49
Break-even value(够本值)，50
Quadratic function(二次函数)，56
Parabola(抛物线)，56
Vertex(顶点)，56
Quadratic formula(二次公式)，58
x-intercepts(x 截距)，59
Polynomial function(多项式函数)，60
Coefficients of a polynomial(多项式的系数)，60
Power function(幂函数)，60
Rational function(有理函数)，62
Split numbers(裂数)，62
Inverse variation(逆变化)，64
Absolute-value function(绝对值函数)，65
Square-root function(平方根函数)，66
Demand function(需求函数)，69
Supply function(供给函数)，69
Equilibrium point(平衡点)，70

复习题

这些复习题是为测验准备的，它们也可以用作不限时间的练习测验。答案在书后。答案中还包括方括号内的参考章节，它告诉你，如果你的答案不正确，应该再学习哪个章节。

1. 生命科学：年龄为 x 的女性的活产率。下面的图形描述了每 1 000 名年龄为 x 的女性的活产数 B。



试用图形回答下述问题。

a)年龄为 20 的女性的活产率是多少？

b)对于哪个年龄，每 1 000 名女性中大约有 100 名女性生下活婴？

*c)估计一下这个函数的定义域，并且说明为什么会如此。

2. 商业：复利。假定以 10% 半年复利率投资 1 100 美元，问一年以后的结存是多少？

3. 商业：复利。假定以 12% 年复利率投资 4 000 美元，问 2 年后的结存是多少？

用区间记号表示下列集合。

4. $\{x \mid -6 < x \leqslant 1\}$.

5. 所有非负实数的集合。

设函数 f 由 $f(x)=2x^2-x+3$ 给出，求下列各函数值。

6. $f(-2)$ 7. $f(1+h)$ 8. $f(0)$

设函数 f 由 $f(x)=(1-x)^2$ 给出，求下列各函数值。

9. $f(-5)$ 10. $f(2-h)$ 11. $f(4)$

画下列函数的图形。

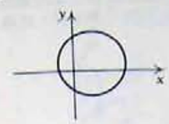
12. $y=|x+1|$

13. $f(x)=(x-2)^2$

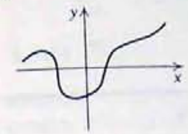
14. $f(x)=\frac{x^2-16}{x+4}$

用竖直线检验法确定下列各图是否是函数图形。

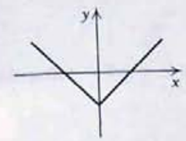
15.



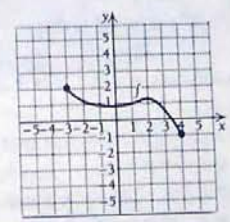
16.



17.



18. 对下述函数图形 f，求 a) $f(2)$；b)定义域；c)使 $f(x)=2$ 的所有 x 值；d)值域。



画下列函数的图形。

19. $x=-2$

20. $y=4-2x$

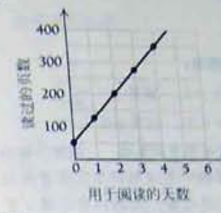
21. 写出包含点 $(4,-2)$ 和 $(-7,5)$ 的直线方程。

22. 写出包含点 $\left(\frac{2}{3},4\right)$ 且斜率为 3 的直线方程。

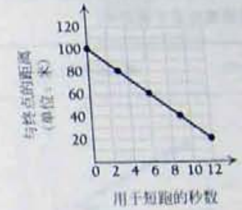
23. 对于线性方程 $y=3-\frac{1}{6}x$，求其斜率和 y 截距。

求平均变化率。

24.



25.



26. 生命科学：肌肉重量与体重。人的肌肉重量 M 与其体重 W 成正比。已知体重 150 磅的人有 60 磅重的肌肉。问体重 210 磅的人的肌肉重量是多少？

27. 商业：损益分析。某家具厂生产某种类型的大学教室桌椅的固定成本为 80 000 美元。生产 x 套桌椅的变动成本是 $16x$ 美元。桌椅将以每套 28 美元的价格出售。

a)建立关于销售 x 套桌椅的总收益函数 $R(x)$ 的表达式。

b)建立关于生产 x 套桌椅的总成本函数 $C(x)$ 的表达式。

c)建立关于生产与销售 x 套桌椅的总利润函数 $P(x)$ 的表达式。

d)公司从 8 000 套桌椅的预期销售中将实现什么样的损益？

e)公司必须卖出多少套桌椅才会够本？

28. 把 $y^{1/4}$ 转换成根式。

29. 把 $\sqrt[10]{x^3}$ 转换成有理指数表示式。

30. 化简 $27^{2/3}$.

求下列函数的定义域.

31. $f(x)=\sqrt{18-6x}$

32. $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

33. 画出下述函数的图形：

$$f(x)=\begin{cases}x-5, & 如果\ x>2,\\ x+3, & 如果\ x\leqslant 2.\end{cases}$$

34. *社会科学：学习时间与考试成绩.* 一位数学教师在她的基础数学课程中要求她的学生按百分制记分，并且记录下学习每一章的内容花费了多少时间. 她把该信息连同章测验成绩一起收集下来. 把这些数据列成下面的表.

学习时间(小时)	考试成绩(百分制)
9	74
11	94
13	81
15	86
16	87
17	81
21	87
23	92

a)用数据点(9, 74)和(23, 92)求一个线性函数与表中数据拟合.

b)用所求函数预测学习时间分别为 18 小时和 25 小时的学生的考试成绩.

35. *商业：信用卡.* 越来越多的人在按月度偿付他们的信用卡债务. 根据下表中的数据，这样做的人所占百分比在不断增加.

a)用数据点(0, 29), (3, 32)和(7, 41)求一个二次函数与表中数据拟合.

b)用所求函数预测在 2000 年和 2008 年中将偿付其债务的人所占百分比.

*c)对这个函数的定义域作一个估计，说明这样限制的理由.

86
~
88

年数 x(从 1990 年起)	偿付其债务的人所占百分比 P
0(1990)	29
1(1991)	30
2(1992)	31
3(1993)	32
4(1994)	33
5(1995)	34
6(1996)	36
7(1997)	41

资料来源：RAM Research.

综合题

36. 化简$(64^{3/2})^{-1/2}$.

上机技术演练

画下列函数的图形，并且求其零点、定义域和值域.

37. $f(x)=x^3-4x$

38. $f(x)=\sqrt[3]{|9-x^2|}-1$

39. 近似计算 37 题和 38 题中两个函数图形的交点.

40. *社会科学：学习时间与考试成绩.* 用第 34 题中的数据.

a)用 **REGRESSION** 选项求一个线性函数与已知数据拟合.

b)用所求函数预测学习时间分别为 18 小时和 25 小时的学生的考试成绩.

*c)把你的答案与第 34 题中所求答案作一比较.

41. *商业：信用卡.* 用第 35 题中的数据.

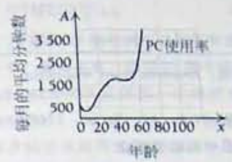
a)用 **REGRESSION** 选项求一个二次函数与已知数据拟合.

b)用所求函数预测在 2000 年和 2008 年中将偿付其债务的人所占百分比.

*c)对这个函数的定义域作一个估计，说明这样限制的理由.

测验

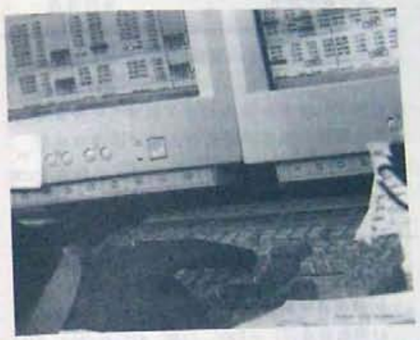
1. *社会科学：使用家用计算机的时间.* 下图述及年龄为 x 的人每月使用家用计算机的平均分钟数.



资料来源：Media Matrix；The PC Meter Company

试用图形回答下述问题.

a)年龄为 20 的人每月平均用多少分钟？



b)在哪个年龄，每月大约平均用 3 000 分钟？

*c)对该函数的定义域作一下估计，并且说明为什么应这样规定.

2. 商业：复利. 某人以 13% 的年复利率进行一项投资. 一年以后结存增长到 1 039.60 美元. 问其本金是多少？

3. 设一个函数用 $f(x)=2x^2+3$ 表示. 求

a) $f(-2)$.

b) $f(x+h)$.

4. $y=-3x+2$ 的斜率和 y 截距各是多少？

5. 求包含点(8, −5)且有斜率$\frac{1}{4}$的直线方程.

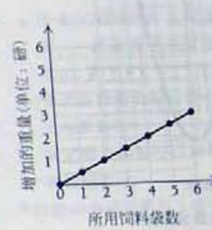
6. 求包含点(2, −5)和(−3, 10)的直线的斜率.

求平均变化率.

7.



8.



9. *生命科学：人的体液.* 一个人所含体液的重量 F 与其体重 W 成正比. 已知体重 180 磅的人含 120 磅的体液. 求 F 表示为 W 的函数的变化方程.

10. *商业：损益分析.* 一音乐公司用 10 000 美元的固定成本生产一种 CD 母盘. 之后，从 CD 母盘每复制一张 CD 的变动成本是 0.50 美元. 预期每张 CD 的营业收入是 7.50 美元.

a)建立关于生产 x 张 CD 的总成本函数 $C(x)$的表达式.

b)建立关于销售 x 张 CD 的总收益函数 $R(x)$的表达式.

c)建立关于生产与销售 x 张 CD 的总利润函数 $P(x)$的表达式.

d)公司必须卖出多少张 CD 才会够本？

11. *经济：平衡点.* 求需求函数

$$D(p)=(p-7)^2, 0\leqslant p\leqslant 7$$

与供给函数

$$S(p)=p^2+p+4$$

的平衡点.

用竖直线检验法确定下列每个图形是否为一个函数图形.

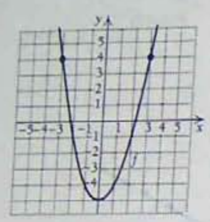
12.



13.



14. 对下述函数 f 的图形，求 a) $f(1)$；b)定义域；c)使 $f(x)=4$ 的所有 x 值；d)值域.



15. 画出 $f(x)=8/x$ 的图形.

16. 把 $1/\sqrt{t}$ 转换成有理指数表示式.

17. 把 $t^{-1/2}$ 转换成根式.

18. 画出 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 的图形.

求下列函数的定义域.

19. $f(x)=\dfrac{x^2+20}{(x-2)(x+7)}$

20. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x+6}}$

21. 用区间记号表示下述图形.



22. 画出下述函数的图形：

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2, 若\ x\geqslant 0,\\ x^2-2, 若\ x<0.\end{cases}$$

23. **生命科学：最大心率.** 一个人运动时的心率不应当超过一个最大值. 其最大心率与他的性别、年龄和静息心率有关. 下表给出的数据述及 20 岁的女性的静息心率与其最大心率.

89/l/90

静息心率 r（每分钟的心跳次数）	最大心率 M（每分钟的心跳次数）
50	170
60	172
70	174
80	176

资料来源：American Heart Association.

a)用数据点(50，170)和(80，176)求一个线性函数与表中的数据拟合.

b)用所求线性函数预测静息心率分别为 62 和 75 的女性的最大心率.

24. **商业：戏票利润.** Valley Community 学院上演一出戏剧. 演出 x 天后获利 P(美元)，其相关数据在下表中给出.

天数 x	利润 P
0	−100
90	560
180	872
270	870
360	548
450	−100

a)作表中数据的一个散点图.

b)确定表中数据是否近似拟合一个二次函数.

c)用数据点(0，−100)，(180，872)和(360，548)求一个二次函数与表中数据拟合.

d)用所求函数计算 225 天后的利润.

*e)对这个函数的定义域作一个估计. 说明这样限定的理由.

综合题

25. **经济：需求.** 关于一个产品的需求函数可表示为

$$x=D(p)=800-p^3,\quad 0\leqslant p\leqslant 9.28.$$

a)当每个单位的价格为 6.50 美元时求卖出的产品数.

b)当卖出 720 个产品时，求每个产品的价格.

上机技术演练

画出下列函数的图形，然后求其零点、定义域和值域.

26. $f(x)=x^3-9x^2+27x+50$

27. $f(x)=\sqrt[3]{|4-x^2|}+1$

28. 近似求 26 题和 27 题中两个函数图形的交点.

29. **生命科学：最大心率.** 采用 23 题中的数据.

a)用 **REGRESSION** 选项使一个线性函数与已知数据拟合.

b)用所求线性函数预测静息心率分别为 62 和 75 的女性的最大心率.

c)把你的答案与 23 题中所求答案作一比较.

30. **商业：戏票利润.** 采用 24 题中的数据.

a)用 **REGRESSION** 选项使一个二次函数与已知数据拟合.

b)用所求函数计算 225 天后的利润.

*c)对这个函数的定义域作一个估计. 说明这样限制的理由.

31. **社会科学：使用家用计算机的时间.** 下列数据述及年龄为 x 的人每月使用家用计算机的平均分钟数.

年龄(岁)	平均用时(分/月)
6.5	363
14.5	645
21	1 377
29.5	1 727
39.5	1 696
49.5	2 052
55	2 299

资料来源：Media Matrix；The PC Meter Company.

a)用 **REGRESSION** 选项使线性函数、二次函数、三次函数和四次函数分别与表中数据拟合.

b)作该组数据的散点图，然后在散点图上画每个函数的图形.

*c)确定哪个函数与已知数据拟合得最好，并解释你的结论.

*d)把 a)中的结果与 1 题中所求答案作一比较.

上机技术的深入应用

职业篮球队员的薪金

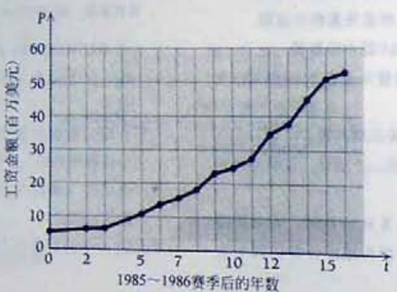
上机技术的深入应用出现在每章的末尾，用来考察某些深层次的应用，要求能熟练地使用绘图器，并且考虑到小组学习或合作学习的需要.



所有行业的薪金都在一次又一次地上升，职业篮球也不例外. 下面的表格与图形展示出全国篮球协会(即 NBA)的运动员的平均薪金，时间从 1985～1986 赛季到 2001～2002 赛季.(省略了有关 1986～1987 和 1989～1990 赛季的数据.)

91

1985～1986 赛季后的年数 t	NBA 的平均薪金 P(百万美元)	1985～1986 赛季后的年数 t	NBA 的平均薪金 P(百万美元)
0	4.763	10	24.975
2	6.050	11	28.519
3	6.780	12	32.708
5	11.307	13	38.050
6	13.688	14	45.105
7	15.909	15	51.563
8	18.793	16	53.549
9	22.179		



资料来源：Patricia Bender.

练习

1. a)用绘图器完成一个线性回归. 考虑所有数据，求一个线性函数与该组数据拟合.

b)作线性函数的图形.

c)用所求函数计算关于 1986～1987 和 1989～1990 赛季 NBA 的平均薪金. 这些计算结果是否合理?

d)用所求函数预测 2005～2006 和 2049～2050 赛季 NBA 的薪金.

e)用所求函数预测什么时候 NBA 的平均薪金将达到 100 百万美元?

2. a)考虑所有数据，求一个二次多项式函数

$$y = ax^2 + bx + c$$

与已知数据拟合.

b)画二次多项式函数的图形.

c)用所求函数计算关于 1986～1987 和 1989～1990 赛季 NBA 的平均薪金. 这些计算结果是否合理?

d)用该函数预测关于 2005～2006 和 2049～2050 赛季 NBA 的薪金.

e)用该函数预测什么时候 NBA 的平均薪金将达到 100 百万美元?

3. a)考虑所有数据，求一个三次多项式函数

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

与已知数据拟合.

b)画三次多项式函数的图形.

c)用所求函数计算关于 1986～1987 和 1989～1990 赛季 NBA 的平均薪金.

d)用该函数预测关于 2005～2006 和 2049～2050 赛季 NBA 的薪金.

e)用该函数预测什么时候 NBA 的平均薪金将达到 100 百万美元?

4. a)考虑所有数据，求一个四次多项式函数

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

与已知数据拟合.

b)画四次多项式函数的图形.

c)用所求函数计算关于 1986～1987 和 1989～1990 年赛季 NBA 的平均薪金.

d)用该函数预测关于 2005～2006 和 2049～2050 赛季 NBA 的薪金.

e)用该函数预测什么时候 NBA 的平均薪金将达到 100 百万美元?

5. 上述各类函数作为 NBA 过去与未来的平均薪金的模型各有什么优点和危险? 试讨论之.

92

第2章 微 分 法

应用 当某用户得到 x 件产品时，就会获得一定量的满足或效用 U. 假定对一个新的视频游戏，其效用与所得到的微型磁带的个数 x 有关，且可表示为

$$U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}.$$

求其边际效用.

其边际效用是 U 关于 x 的瞬时变化率，且可以表示为

$$\underbrace{U'(x) = \frac{200}{(3x+4)^2}\cdot\sqrt{\frac{3x+4}{2x+1}}}.$$

这个函数是一个导数

这个问题出现在习题 2.8 的 76 题中.

引言 这一章开始研究微积分. 首先要讨论的概念是极限与连续性，然后应用这些概念建立微分法，微分法是微积分的两个主要构件中的第一个构件.

微分法是对一个函数求表达式的过程，并且得到另一个函数的表达式，称之为导数；利用导数可以求一条曲线在某点处的切线的斜率，导数还可以表示瞬时变化率. 在本章里，我们将
93 学习各种求导数的方法.

2.1 极限与连续性：数值法与图示法

要点

- 求函数的极限，如果其极限存在的话，用数值法或图示法考察极限.
- 从函数的图形确定函数的连续性.
- 确定一个函数在一点的连续性.

在本节里，我们要给出两个重要概念：极限与连续，并且采用直觉的方式(即基于先前的和现有的经验)进行论述.

极限

假定一支处于防守的橄榄球队在它自己的 5 码[1]线上犯规并被判罚球. 这个罚球线到球门的距离是犯规线到球门距离的一半. 然后，进攻从 5 码线推进到 $2\frac{1}{2}$码线再推进到 $1\frac{1}{4}$码线，如此进行下去. 注意，在这个前提下，球队一直未能得分，但是它与球门的距离不断接近且越来越接近于 0. 我们就说其极限是 0.

微积分研究的一个重要方面是，分析当输入变化时函数值或输出的变化趋势. 这个研究的基础就是极限概念. 假定输入越来越接近于某个数，如果相应的输出越来越接近于一个常数，

[1] 码的单位符号为 yd，1yd=0.914 4m. ——编辑注

那么该常数称为一个极限.

考虑用

$$f(x) = 2x+3$$

给出的函数 f. 假定选择输入数 x 使其越来越接近于数 4，并考察输出数 $2x+3$. 研究下面给出的输入-输出表及其图形.

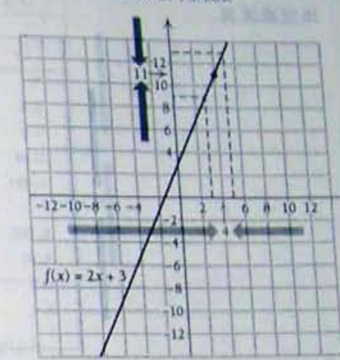
用数值法考察极限

x	$f(x)$
2	7
3.6	10.2
3.9	10.8
3.99	10.98
3.999	10.998
…	…
4.001	11.002
4.01	11.02
4.1	11.2
4.8	12.6
5	13

这些输入从左侧趋近于4 → 4 ← 这些输入从右侧趋近于4

这些输出趋近于11 → 11 ← 这些输出趋近于11

用图示法考察极限



从表与图中看到，当输入数从左侧趋近于 4 但又不等于 4 时，输出数趋近于 11. 当输入数 94
从右侧趋近于 4 但又不等于 4 时，输出数趋近于 11. 于是我们说：

当 x 从两侧趋近于 4 时，$2x+3$ 趋近于 11.

常用箭头"→"表示词语"从两侧趋近于". 因此以上表述可以写成

当 $x\to 4$ 时，$2x+3\to 11$.

当 x 从两侧趋近于 4 但又不等于 4 时，就称数 11 是 $2x+3$ 的极限. 可以把这句话简写成

$$\lim_{x\to 4}(2x+3) = 11.$$

这读成："当 x 从两侧趋近于 4 时，$2x+3$ 的极限是 11."

定义 当 x 从两侧趋近于 a 时，函数 f 有**极限**(limit)L，记作

$$\lim_{x\to a}f(x) = L,$$

是指对于任意接近于 a 但又不等于 a 的 x 的值，f 的所有值 $f(x)$ 都接近于 L.

在上述定义中所用词语"从两侧"是很重要的. 我们用记号

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ 表示右极限}$$

且

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ 表示左极限}.$$

因此，为了确定极限存在，上述两个单侧极限必须都存在且相等. 于是，上述定义又可以改述如下.

定理 当 x 趋近于 a 时函数 f 有**极限** L，是指其左极限和右极限都存在，且两个单侧极限都是 L——也就是说， 95

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a}f(x).$$

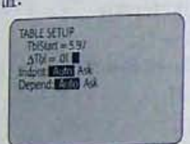
上机技术演练

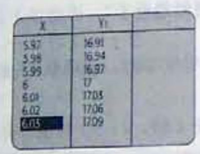
利用 TABLE 选项和 TRACE 选项求极限

探索 考虑函数 $f(x)=3x-1$. 我们用 TABLE 选项来制作下述表格. 注意，输入从一个值到下一个值没有取相同的增量，但从左侧或者从右侧都趋近于 6. 在 ASK 模式下设置带有自变量的表格. 然后设定所显示的输入，并且用相应的输出完成该表.

x	$f(x)$
5	14
5.8	16.4
5.9	16.7
5.99	16.97
5.999	16.997
6 →	→ ?
6.001	17.003
6.01	17.03
6.1	17.3
6.4	18.2
7	20

现在把该表设定在 AUTO 模式，并且启动(TblStart)一个与 6 相近的数，为了确定$\lim_{x\to 6} f(x)$，可做各种表格使其某些增量(ΔTbl)取如 0.1，0.01 等数值以及如−0.1，−0.01 等数值.





接下来，利用带有图形的 TRACE 选项，从左到右移动光标，使 x 坐标从左侧趋近于 6. 为看到会出现什么情况，可能需要多次修改视窗. 例如，尝试采用 [5.3, 6.4, 14, 18]. 另外，从右到左移动光标，使 x 坐标从右侧趋近于 6. 一般说来，TRACE 选项虽不是求极限的有效方式，但是，在你学习极限的初级阶段，它可以帮你具体观察到极限过程.

利用 TABLE 选项和 TRACE 选项所观察到的结果可以完成下列填空：

$$\lim_{x\to 6^-} f(x)=\underline{\ 17\ } \text{ 和 } \lim_{x\to 6^+} f(x)=\underline{\ 17\ }.$$

于是

$$\lim_{x\to 6} f(x)=\underline{\ 17\ }.$$

练习 考虑 $f(x)=3x-1$. 利用 TABLE 选项和 TRACE 选项制作表格来求下列每个极限.

1. $\lim_{x\to 2} f(x)$　　2. $\lim_{x\to -1} f(x)$

对第 3 题至第 5 题，考虑 $g(x)=x^3-2x-2$.

3. 完成下表.

x	$g(x)$
7	
7.8	
7.9	
7.99	
7.999	
8 →	→ ?
8.001	
8.01	
8.1	
8.4	
8.9	

用 TABLE 选项求下列每个极限.

4. $\lim_{x\to 8} g(x)$　　5. $\lim_{x\to -1} g(x)$

96

例 1 考虑如下定义的函数 H：

$$H(x)=\begin{cases}2x+2, & \text{如果 } x<1,\\ 2x-2, & \text{如果 } x\geqslant 1.\end{cases}$$

画出该函数的图形，然后求下列每个极限，如果极限存在的话.

a) $\lim_{x\to 1} H(x)$　　b) $\lim_{x\to -3} H(x)$

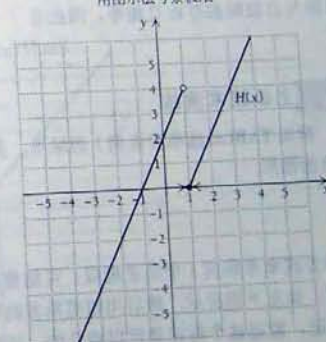
解 我们来验证其左极限和右极限，既用通过输入-输出表的数值法考察极限，也用图示法考察极限.

a) 用数值法考察极限

$x\to 1^-$ $(x<1)$	$H(x)$
0	2
0.5	3
0.8	3.6
0.9	3.8
0.99	3.98
0.999	3.998

$x\to 1^+$ $(x>1)$	$H(x)$
2	2
1.8	1.6
1.1	0.2
1.01	0.02
1.001	0.002
1.000 1	0.000 2

用图示法考察极限



当输入 x 从左侧趋近于 1 时，输出 $H(x)$趋近于 4，因而其左极限是 4. 即

$$\lim_{x\to1^-}H(x)=4.$$

但是当输入 x 从右侧趋近于 1 时，输出 $H(x)$趋近于 0，因而其右极限是 0. 即

$$\lim_{x\to1^+}H(x)=0.$$

因为其左极限 4 与其右极限 0 不相同，所以说

$$\lim_{x\to1}H(x)\ \text{不存在}.$$

97 注意，$H(1)=0$，但其极限不是 0. 函数值存在，但极限值不存在.

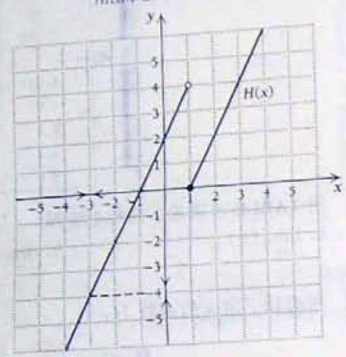
b)

用数值法考察极限

$x\to-3^-(x<-3)$	$H(x)$
−4	−6
−3.5	−5
−3.1	−4.2
−3.01	−4.02
−3.001	−4.002

$x\to-3^+(x>-3)$	$H(x)$
−2	−2
−2.5	−3
−2.9	−3.8
−2.99	−3.98
−2.999	−3.998

用图示法考察极限



当输入 x 从左侧趋近于 −3 时，输出 $H(x)$趋近于 −4，因而其左极限是 −4. 即

$$\lim_{x\to-3^-}H(x)=-4.$$

当输入 x 从右侧趋近于 −3 时，输出 $H(x)$趋近于 −4，因而其右极限是 −4. 即

$$\lim_{x\to-3^+}H(x)=-4.$$

因为左极限与右极限都存在且相等，因此有

$$\lim_{x\to-3}H(x)=-4.$$ ■

上机技术演练

利用 **TABLE** 选项验证例 1 的结果. 参看 1.2 节，回顾如何在绘图器上作分段函数的图形.

"墙"法

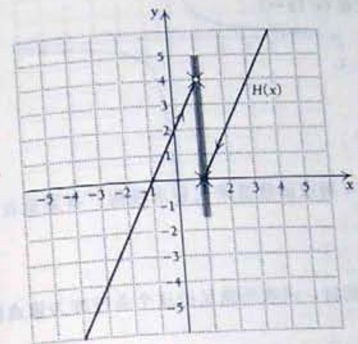
换一种方式来考察例 1 中所求极限，可能使极限概念更富有意义. 我们在 $x=1$ 这条线上画一道"墙"，如左下图所示. 然后用铅笔沿着曲线从左侧向墙壁移动，直到碰壁为止，并在该处用"×"标记，假定这个标记是可以确认的. 另外，用铅笔沿着曲线从右侧向墙壁移动，直到

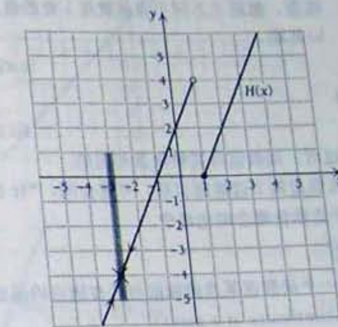
碰壁为止，并在该处用"×"标记. 如果上述两处是同一处，则有极限. 于是

$$\lim_{x\to1}H(x)\ \text{不存在},$$

而

$$\lim_{x\to-3}H(x)=-4.$$ 98





以下论述在求极限过程中也是很重要的.

函数在数 a 的极限并不依赖该函数在 a 的值，即使函数值 $f(a)$存在. 也就是说，函数在 a 是否有极限，与函数值 $f(a)$毫无关系.

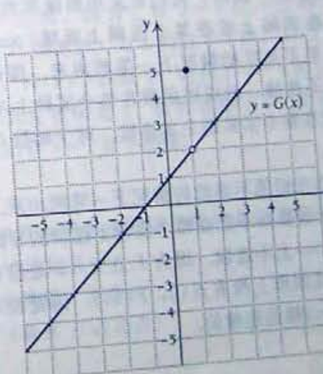
例 2　考虑如下定义的函数：

$$G(x)=\begin{cases}5, & \text{如果 } x=1,\\ x+1, & \text{如果 } x\neq1.\end{cases}$$

作出该函数的图形，然后求下列每个极限，如果极限存在的话.

a) $\lim_{x\to1}G(x)$　　b) $\lim_{x\to3}G(x)$

解　图形如下所示.



99

a)当输入 x 从左侧趋近于 1 时，输出 $G(x)$ 趋近于 2，因而其左极限是 2. 当输入 x 从右侧趋近于 1 时，输出 $G(x)$ 趋近于 2，因而其右极限是 2. 因为左极限是 2，右极限也是 2，所以有

$$\lim_{x\to 1} G(x) = 2.$$

注意，极限 2 不同于该函数在 1 处的值，其值是 $G(1)=5$.

b)易知

$$\lim_{x\to 3} G(x) = 4.$$

可知

$$G(3) = 4.$$

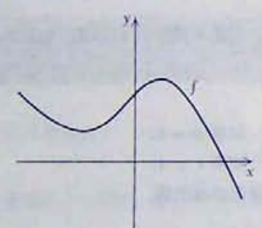
这时，函数值与其极限是相同的.

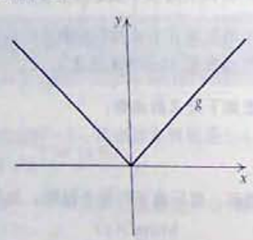
在做过例 2 这道题以后，可能会问，"什么时候可用求函数值来代替求极限?"答案就在下面关于连续性概念的论述中.

连续性

当一个函数在某点的极限与其在该点的函数值相同时，函数所满足的这个条件称为**该点的连续性**(continuity at a point).

下面是在整个实轴($-\infty$, $+\infty$)上都连续的函数图形.

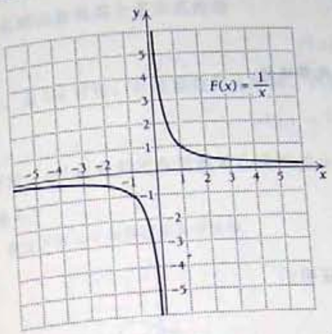


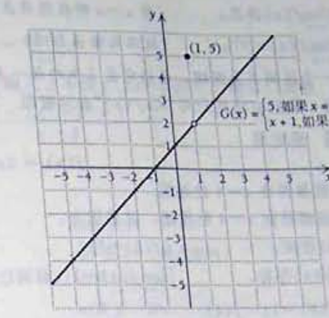


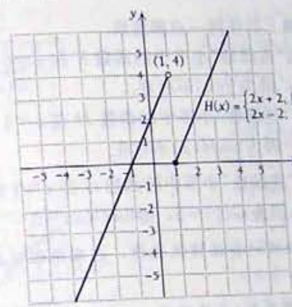
注意，在图形中没有"跳跃"或空洞. 此时，我们要采用稍微直观一些的连续性定义，以后再给出精确定义. 我们说函数**在实轴上或在某个区间上连续**(continuous over, or on, some interval)，是指其图形可在铅笔不离纸的情况下一笔画出来. 即函数在区间中的每一点都连续. 如果一个函数在某一点处不连续，就说该函数在整个实轴上不连续. 下面给出的函数 F，G 和 H 的图形说明，这些函数在整个实数轴上不连续. 对于函数 G 和 H，空圆点表示该点不
100 是图形上的点.

在每种情形，其图形都不能在铅笔不离纸的情况下一笔画出来. 但是，每种情形各描绘出不同的性态. 下面讨论一下每个函数都不能在整个实轴上连续的原因.

函数 F 在整个实轴($-\infty$, ∞)上不连续，因为 F 在 $x=0$ 处没有定义，点 $x=0$ 不是定义域内的值，因而 $F(0)$ 不存在，其图形上没有点(0，$F(0)$). 因此找不到对应于 $x=0$ 的点. 但是，F 在区间($-\infty$, 0)和(0, ∞)都是连续的.







函数 G 在整个实轴上不连续，因为它在 $x=1$ 处不连续. 我们从 $x=1$ 的左侧开始跟踪 G 的图形. 当 x 趋近于 1 时，$G(x)$ 看上去趋近于 2. 但在 $x=1$ 处，$G(x)$ 上跳到 5，而到了 $x=1$ 的右侧，$G(x)$ 回落到接近于 2 的某个值. 因此，$G(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.



连续曲线

函数 H 在整个实轴上不连续，因为它在 $x=1$ 处不连续. 我们从 $x=1$ 的左侧开始跟踪 H 的图形. 当 x 趋近于 1 时，$H(x)$ 趋近于 4. 但是，在 $x=1$ 处，$H(x)$ 下跌到 0；而到了 $x=1$ 的右侧，$H(x)$ 就接近于 0. 因为其左极限是 4，而右极限是 0，所以 $\lim_{x\to 1} H(x)$ 不存在. 因此，$H(x)$ 在 $x=1$ 处不连续. 101

极限与连续

现在可以回答"什么时候可以用求函数值来取代求极限"的问题了. 答案就在较正式的连续性定义中.

定义　函数 f 在 $x=a$ 处**连续**，是指:

a) $f(a)$ 存在，　　　　(输出 $f(a)$ 存在)

b) $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，　　（当 $x\to a$ 时极限存在）

c) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.　　（极限与输出相同）

函数在一个区间 I 上连续，是指它在 I 中的每一点处都连续.

注意，我们也将用记号“$\lim_{x\to a} f(x)$”表示极限.

例3 确定用

$$f(x)=2x+3$$

给出的函数是否在 $x=4$ 处连续.

解 该函数在 $x=4$ 处连续，这是因为：

a) $f(4)$ 存在，　　$(f(4)=11)$

b) $\lim_{x\to 4} f(x)$ 存在，　　$[\lim_{x\to 4} f(x)=11$(前面已证明)$]$

c) $\lim_{x\to 4} f(x)=11=f(4)$.

事实上，$f(x)=2x+3$ 在实轴上的任何一点都连续. ■

例4 确定在前面刚讨论过的“连续性”小节中的函数 F 在 $x=0$ 处是否连续.

解 该函数在 $x=0$ 处不连续，因为 $f(0)$ 不存在. ■

例5 确定在前面刚讨论过的“连续性”小节中的函数 H 在 $x=1$ 处是否连续.

解 该函数在 $x=1$ 处不连续，因为 $\lim_{x\to 1} H(x)$ 不存在. ■

例6 确定在前面刚讨论过的“连续性”小节中的函数 G 在 $x=1$ 处是否连续.

102 **解** 该函数在 $x=1$ 处不连续，因为 $G(1)=5$，而 $\lim_{x\to 1} G(x)=2$. ■

连续性原理 下面不加证明地叙述一些连续性原理，这些原理使我们能判断一个函数是否连续.

C1. 任一常数函数(即恒不变化的函数)是连续的.

C2. 对任一正整数 n 和任何连续函数 f，$[f(x)]^n$ 和 $\sqrt[n]{f(x)}$ 都是连续的. 当 n 为偶数时，对 $\sqrt[n]{f(x)}$ 中 f 的输入有所限制，要求输入 x 满足 $f(x)\geq 0$.

C3. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都连续，则 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 也都连续.

C4. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都连续，则 $g(x)/f(x)$ 也连续，只要输入 x 不会使 $f(x)=0$.

例7 提供论据，证明

$$f(x)=x^2-3x+2$$

是连续的.

解 首先注意到 x 是连续函数. 这可以用连续性定义来确定. 根据 C2 可知 x^2 是连续函数. 由 C1 可知常数函数 3 是连续的，又函数 x 是连续的，根据 C3 可知，乘积 $3x$ 是连续函数. 因而，又根据 C3 可知，x^2-3x 是连续函数，又因为常值函数 2 是连续的，再应用 C3 便可证明 x^2-3x+2 是连续的. ■

用类似的方式可以证明，任一线性函数 $f(x)=mx+b$ 以及任一多项式函数，例如

$$f(x)=x^4-5x^3+x^2-7,$$

都是连续的.

有理函数是两个多项式的商

$$r(x)=\frac{g(x)}{f(x)}.$$

于是，由 C4 可知，有理函数是连续的，只要输入 x 不使 $f(x)=0$ 即可. 例如，函数

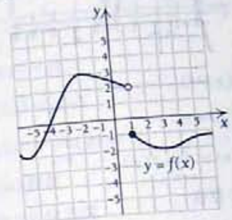
$$r(x)=\frac{x^4-5x^3+x^2-7}{x-3}$$ 103

对于除 $x=3$ 以外的所有值都是连续的.

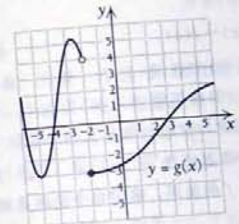
习题 2.1

确定下列每个函数图形是否连续.

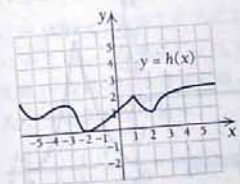
1.



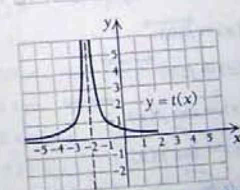
2.



3.



4.



用第 1~4 题中的图形和函数回答下列各问题.

5. a) 求 $\lim_{x\to 1^+} f(x)$，$\lim_{x\to 1^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to 1} f(x)$.

b) 求 $f(1)$.

c) f 在 $x=1$ 处连续吗?

d) 求 $\lim_{x\to -2} f(x)$.

e) 求 $f(-2)$.

f) f 在 $x=-2$ 处连续吗?

6. a) 求 $\lim_{x\to 1^+} g(x)$，$\lim_{x\to 1^-} g(x)$ 和 $\lim_{x\to 1} g(x)$.

b) 求 $g(1)$.

c) g 在 $x=1$ 处连续吗?

d) 求 $\lim_{x\to -2} g(x)$.

e) 求 $g(-2)$.

f) g 在 $x=-2$ 处连续吗?

7. a) 求 $\lim_{x\to 1} h(x)$.

b) 求 $h(1)$.

c) h 在 $x=1$ 处连续吗?

d) 求 $\lim_{x\to -2} h(x)$.

e) 求 $h(-2)$.

f) h 在 $x=-2$ 处连续吗?

8. a) 求 $\lim_{x\to 1} t(x)$.

b) 求 $t(1)$.

c) t 在 $x=1$ 处连续吗?

d) 求 $\lim_{x\to -2} t(x)$.

e) 求 $t(-2)$.

f) t 在 $x=-2$ 处连续吗?

在 9~14 题中，利用图形求极限，并且回答有关的问题.

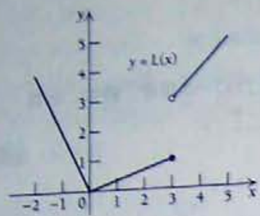
9. a) 求 $\lim_{x\to 3^+} L(x)$.

b) 求 $\lim_{x\to 3^-} L(x)$.

c) 求 $\lim_{x\to 3} L(x)$.

d) 求 $L(3)$.

e) L 在 $x=3$ 处连续吗?

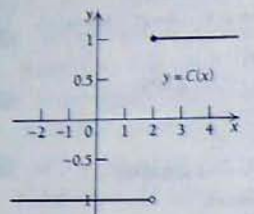


f)求 $L(0)$.

g) L 在 $x=0$ 处连续吗?

10. 考察函数

$$C(x)=\begin{cases}-1, & 如果\ x<2,\\ 1, & 如果\ x\geqslant 2.\end{cases}$$



a)求 $\lim_{x\to 2^+} C(x)$.

b)求 $\lim_{x\to 2^-} C(x)$.

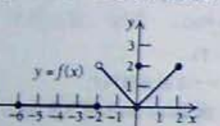
c)求 $\lim_{x\to 2} C(x)$.

d)求 $C(2)$.

e) C 在 $x=2$ 处连续吗?

f) C 在 $x=1.95$ 处连续吗?

11. 参考下面 f 的图形，确定每个论断是对还是错.



a) $\lim_{x\to -3^+} f(x)=1$

b) $\lim_{x\to -2^-} f(x)=0$

c) $\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x)$

d) $\lim_{x\to -2} f(x)$存在

e) $\lim_{x\to -2} f(x)=2$

f) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

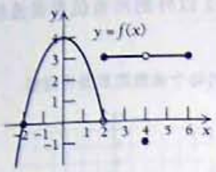
g) $f(0)=2$

h) f 在 $x=-2$ 处连续

i) f 在 $x=0$ 处连续

j) f 在 $x=-1$ 处连续

12. 参考下面 f 的图形，确定每个论断是对还是错.



a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=3$

b) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$

c) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$存在

e) $\lim_{x\to 4} f(x)$存在

f) $\lim_{x\to 4} f(x)=f(4)$

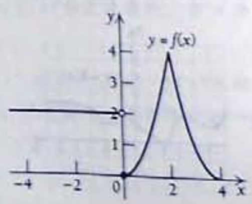
g) f 在 $x=4$ 处连续

h) f 在 $x=0$ 处连续

i) $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 1} f(x)$

j) f 在 $x=2$ 处连续

13. 参看下面 f 的图形，确定每个论断是对还是错.



a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)$

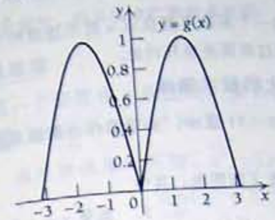
e) $\lim_{x\to 0} f(x)$存在

f) $\lim_{x\to 2} f(x)$存在

g) f 在 $x=0$ 处连续

h) f 在 $x=2$ 处连续

14. 参考下面 g 的图形，确定每个论断是对还是错.



a) $\lim_{x\to 0^+} g(x)=g(0)$

b) $\lim_{x\to 0^-} g(x)=g(0)$

c) $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^-} g(x)$

d) $\lim_{x\to 0} g(x)$存在

e) g 在 $x=0$ 处连续

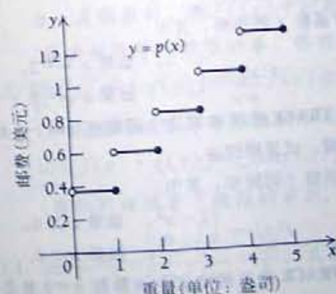
应用

商业与经济

邮费函数. 对第一个盎司，邮费是 0.37 美元，然后每增加一个盎司(或不超过一盎司)，邮费增加 0.23 美元. 用数学语言来描述就是，如果 x 是一封信件的重量(单位：盎司)，则 $p(x)$ 是邮寄该信件的邮费，其中

$$p(x)=0.37,\quad 如果\ 0<x\leqslant 1,$$
$$p(x)=0.60,\quad 如果\ 1<x\leqslant 2,$$
$$p(x)=0.83,\quad 如果\ 2<x\leqslant 3,$$

如此等等，直到 13 盎司(在 13 盎司以后，邮费还与邮寄距离有关). p 的图形如下所示.



试用邮费函数及其图形做 15~21 题.

15. p 在 1 处连续吗? 在 1.5，2 和 2.01 处呢?

16. p 在 2.99 处连续吗? 在 3，3.04 和 4 处呢?

试用邮费函数图形求下列各极限，如果极限存在的话.

17. $\lim_{x\to 1^-} p(x)$，$\lim_{x\to 1^+} p(x)$，$\lim_{x\to 1} p(x)$.

18. $\lim_{x\to 2^-} p(x)$，$\lim_{x\to 2^+} p(x)$，$\lim_{x\to 2} p(x)$.

19. $\lim_{x\to 2.6^-} p(x)$，$\lim_{x\to 2.6^+} p(x)$，$\lim_{x\to 2.6} p(x)$.

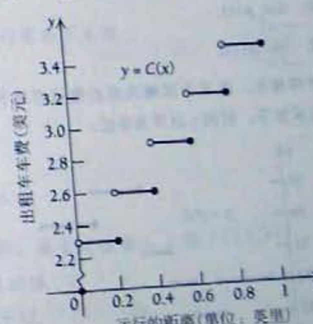
20. $\lim_{x\to 3} p(x)$.

21. $\lim_{x\to 3.4} p(x)$.

出租车车费. 在纽约城，出租车对乘客收费是以 2.00 美元起价的，然后汽车每运行 0.2 英里(或不超过 1.5 英里)加收 0.30 美元.(对于因交通原因而慢行和等待时间要另外收费，但这些不在本题考虑之中.)用数学语言来描述就是，如果 x 是运行的距离(单位：英里)，则 $C(x)$ 是出租车车费，其中

$$C(x)=2.00,如果\ x=0,$$
$$C(x)=2.30,如果\ 0<x\leqslant 0.2,$$
$$C(x)=2.60,如果\ 0.2<x\leqslant 0.4,$$
$$C(x)=2.90,如果\ 0.4<x\leqslant 0.6,$$

如此等等. C 的图形如下所示.



试用出租车车费函数的图形做 22—28 题.

22. C 在 0.1 处连续吗? 在 0.2，0.25 和 0.267 处呢?

23. C 在 0.4 处连续吗? 在 0.5，0.635 和 0.6 处呢?

试用出租车车费函数的图形求下列各极限，如果极限存在的话.

24. $\lim_{x\to 0.25^-} C(x)$，$\lim_{x\to 0.25^+} C(x)$，$\lim_{x\to 0.25} C(x)$.

25. $\lim_{x \to 0.2^-} C(x)$，$\lim_{x \to 0.2^+} C(x)$，$\lim_{x \to 0.2} C(x)$.

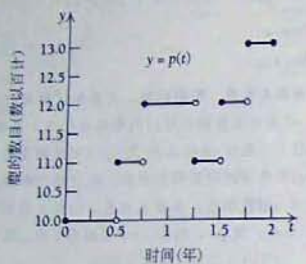
26. $\lim_{x \to 0.4^-} C(x)$，$\lim_{x \to 0.4^+} C(x)$，$\lim_{x \to 0.4} C(x)$.

27. $\lim_{x \to 0.2} C(x)$.

28. $\lim_{x \to 0.4} C(x)$.

自然科学

种群增长. 在某个栖息地，鹿的数目(数以百计)作为时间(年)的函数用关于 p 的图形表示如下.



试用该图形做 29～32 题.

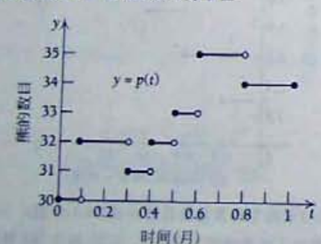
29. 确定 t 在哪些值种群函数不连续.

30. 在该函数不连续的每一点处，确定鹿的数目有什么大的变化.

31. 求 $\lim_{t \to 1.5^+} p(t)$.

32. 求 $\lim_{t \to 1.5^-} p(t)$.

种群增长. 在某个区域内熊的数目用关于 p 的图形表示如下. 时间 t 以月为单位.



试用该图形做 33～36 题.

33. 确定 t 在哪些值种群函数不连续.

34. 在该函数不连续的每一点处，确定熊的数目有什么大的变化.

35. 求 $\lim_{t \to 0.6^+} p(t)$.

36. 求 $\lim_{t \to 0.6^-} p(t)$.

综合题

*37. 讨论一个函数可能在点 a 处不连续的三种形态. 试通过画图来展开讨论.

上机技术演练

在 38～41 题中，采用能作分段函数图形的绘图器.

38. 作函数 f 的图形，其中

$$f(x) = \begin{cases} -3, & \text{如果 } x = -2, \\ x^2, & \text{如果 } x \neq -2. \end{cases}$$

试用所做图形和 **TRACE** 选项求下列各极限，如果极限存在的话.

a) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

b) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$

c) $\lim_{x \to -2} f(x)$

d) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

e) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

f) $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$ 吗?

g) $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ 吗?

39. 作函数 f 的图形，其中

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{如果 } x \geqslant 0, \\ x^2 - 2, & \text{如果 } x < 0. \end{cases}$$

用所做图形和 **TRACE** 选项求下列各极限，如果极限存在的话.

a) $\lim_{x \to 0} f(x)$

b) $\lim_{x \to -1} f(x)$

*40. 作函数 f 的图形，其中

$$f(x) = \begin{cases} -3, & \text{如果 } x = -2, \\ x^2, & \text{如果 } x \neq -2. \end{cases}$$

用 **TRACE** 选项确定这个函数在 $x = -2$ 处是否连续. 试说明理由.

*41. 作函数 f 的图形，其中

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{如果 } x \geqslant 0, \\ x^2 - 2, & \text{如果 } x < 0. \end{cases}$$

用 **TRACE** 选项确定这个函数在 $x = 0$ 处是否连续. 试说明理由.

2.2 极限：代数法

要点

- 用数值法、图示法或代数法求极限.

运用极限原理

如果一个函数在 a 处连续，那么就可以用函数值代替求极限.

例 1 求 $\lim_{x \to 2}(x^4 - 5x^3 + x^2 - 7)$.

解 由连续性原理可知，$x^4 - 5x^3 + x^2 - 7$ 是连续函数. 因此可以用代入值来求其极限：

$$\lim_{x \to 2}(x^4 - 5x^3 + x^2 - 7) = 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 2^2 - 7$$
$$= 16 - 40 + 4 - 7 = -27.$$ ■

例 2 求 $\lim_{x \to 0}\sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

解 (在 2.1 节例 7 中)利用连续性原理已经证明，$x^2 - 3x + 2$ 对所有 x 的值都连续. 如果限制 x 的值使 $x^2 - 3x + 2$ 非负，则由原理 C2 可知，$\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 是连续的. 因为当 $x = 0$ 时 $x^2 - 3x + 2$ 是非负的，所以可以用代入值来求极限：

104～107

$$\lim_{x \to 0}\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{0^2 - 3 \cdot 0 + 2}$$
$$= \sqrt{2}.$$ ■

求极限有极限原理，连续性原理就是由极限原理推导出来的. 当不能断定一个函数在一个已知点是否连续时，可以用极限原理来求极限.

极限原理 如果 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \to a} g(x) = M$，则我们有如下原理.

L1. $\lim_{x \to a} c = c$.

(一个常值函数的极限就是该常数.)

L2. $\lim_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n = L^n$，

$\lim_{x \to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$，对任何正整数 n.

当 n 是偶数时，对 $\sqrt[n]{f(x)}$ 中的输入 x 有所限制，要求这些输入 x 使 $f(x) \geqslant 0$.

(幂的极限等于极限的幂，根的极限等于极限的根.)

L3. $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$.

(和或差的极限等于极限的和或差.)

$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \to a} f(x)] \cdot [\lim_{x \to a} g(x)] = L \cdot M$.

(乘积的极限等于极限的乘积.)

L4. $\lim_{x \to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} f(x)} = \dfrac{M}{L}$，只要 $L \neq 0$.

(商的极限等于极限的商.)

L5. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x) = c\cdot L$.（常数与一个函数的乘积的极限等于该常数与该函数的极限的乘积.）

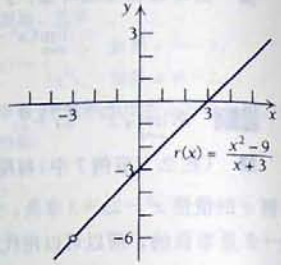
108 原理 L5 实际上可以用原理 L1 和 L3 来证明，但为了应用方便，我们写出原理 L5.

例 3　求

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}.$$

解　考察下面给出的有理函数 $r(x)=(x^2-9)/(x+3)$ 的图形，可以看出其极限是 -6. 但是，也可以用极限原理来验证该极限.

函数 $(x^2-9)/(x+3)$ 在 $x=-3$ 处不连续. 我们运用代数运算化简然后利用极限原理有



$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3} &= \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}\\ &= \lim_{x\to -3}(x-3) \qquad \text{化简，假定 } x\neq -3\\ &= \lim_{x\to -3}x - \lim_{x\to -3}3 \qquad \text{根据 L3}\\ &= -3-3=-6.\end{aligned}$$ ■

在例 3 中，值得注意的是，化简过程

$$\frac{x^2-9}{x+3}=x-3,\quad x\neq -3$$

只对不等于 -3 的 x 值才成立. 在求极限时，我们只需考虑那些接近于 -3 但又不等于 -3 的 x 值，所以化简与推导是成立的.

上机技术演练

练习　用 TABLE 选项求各极限，如果极限存在的话.

1. $\lim\limits_{x\to -2}(x^4-5x^3+x^2-7)$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+3x+4}$
3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

在 2.3 节中，我们会遇到具有两个变量 x 和 h 的表达式. 要注意的是，在那些极限中，其中的 x 看作一个固定常数，而 h 趋近于零.

例 4　求极限 $\lim\limits_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$.

109 **解**　我们把 x 看作常数，因为我们只关心当 h 趋近于 0 时该表达式如何变化. 利用极限原理可以求得

$$\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2+3x(0)+0^2=3x^2.$$

学生可以用一个输入-输出表来验算这一极限，该极限随 x 而变化. 下面是关于这个极限的数值表.

h	$3x^2+3xh+h^2$		
1	$3x^2+3x\cdot 1+1^2$,	或	$3x^2+3x+1$
0.8	$3x^2+3x(0.8)+(0.8)^2$,	或	$3x^2+2.4x+0.64$
0.5	$3x^2+3x(0.5)+(0.5)^2$,	或	$3x^2+1.5x+0.25$
0.1	$3x^2+3x(0.1)+(0.1)^2$,	或	$3x^2+0.3x+0.01$
0.01	$3x^2+3x(0.01)+(0.01)^2$,	或	$3x^2+0.03x+0.000\,1$
0.001	$3x^2+3x(0.001)+(0.001)^2$,	或	$3x^2+0.003x+0.000\,001$

从表中的变化趋势来看，有

$$\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2.$$ ■

小结

下面小结一下可以用来确定极限的三种方法. 考虑

$$\lim_{x\to 2}f(x),$$

其中

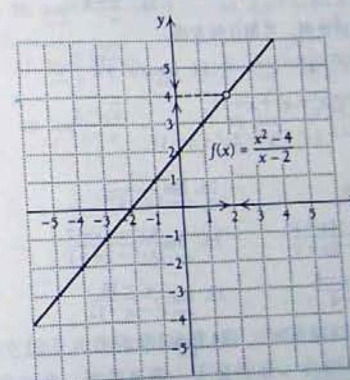
$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}.$$

用数值法求极限

$x\to 2^-$	$f(x)$
1	3
1.5	3.5
1.8	3.8
1.9	3.9
1.99	3.99
1.999	3.999

$x\to 2^+$	$f(x)$
2.8	4.8
2.2	4.2
2.1	4.1
2.01	4.01
2.001	4.001
2.000 1	4.000 1

用图示法求极限



110

从左边的输入-输出表或右边的图形可以看出

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=4 \quad 且 \quad \lim_{x\to 2^+}f(x)=4,$$

所以

$$\lim_{x\to 2}f(x)=4.$$

用代数法求极限

该函数在 $x=2$ 处不连续. 利用代数化简, 然后运用极限原理可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2}(x+2) \qquad \text{化简, 假定 } x\neq 2 \\
&= \lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2 \qquad \text{根据 L3} \\
&= 2+2 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

习题 2.2

求下列极限. 可以采用数值法、图示法和代数法这三种方法中任一种方法.

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3)$
2. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4)$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-4}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 3}(2x+5)$
6. $\lim\limits_{x\to 4}(5-3x)$
7. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}$
8. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x+4}$
9. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{5}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{-2}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$
12. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2-x-20}{x+4}$

求下列极限. 可用任何方法.

13. $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt[3]{x^2-17}$
14. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}$
15. $\lim\limits_{x\to 1}(x^4-x^3+x^2+x+1)$
16. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^5-3x^4+x^3-2x^2+x+1)$
17. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$
18. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$
19. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-4x+2}{7x^2-5x+3}$
20. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{4x^2+5x-7}{3x^2-2x+1}$
21. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$
22. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-x-12}$
23. $\lim\limits_{h\to 0}(6x^2+6xh+2h^2)$
24. $\lim\limits_{h\to 0}(10x+5h)$
25. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}$
26. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{-5}{x(x+h)}$
27. 考虑

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x\neq 2,\\ -1, & \text{如果 } x=2.\end{cases}$$

求下列各极限.

a) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$　　b) $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$　　d) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

e) f 在 $x=0$ 处连续吗? 在 $x=2$ 处呢?

28. 考虑

$$g(x)=\begin{cases}-4, & \text{如果 } x=3\\ 2x+5, & \text{如果 } x\neq 3.\end{cases}$$

求下列各极限.

a) $\lim\limits_{x\to 3^-}g(x)$　　b) $\lim\limits_{x\to 3^+}g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$　　d) $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$

e) g 在 $x=3$ 处连续吗? 在 $x=2$ 处呢?

用代数法求极限.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x-2x^2}$
30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x}}{x+x^2}$
31. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-x-2}$
32. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$
33. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x-6}$
34. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{x^2-3x-10}$

综合题

求极限, 如果极限存在的话.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$
36. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$

上机技术演练

TABLE 选项的其他应用. 在 2.1 节中, 我们讨论了如何用 **TABLE** 选项求极限. 考虑

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

这个函数的输入-输出表如下所示. 上面的表格采用表格启动值 TblStart $=-1$ 和增量 ΔTbl $=0.5$. 通过给出多组越来越小的步进值并且让它们趋近于 0, 就可以精确该表并得到其极限的一个较好的估值.

下面的表是一个具有 TblStart $=-0.03$ 和 ΔTbl $=0.01$ 的输入-输出表.

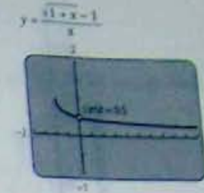
x	y
-1	1
-0.5	0.585 786
0	错误
0.5	0.449 490
1	0.414 214
1.5	0.387 426
2	0.366 025

x	y
-0.03	0.503 807
-0.02	0.502 525
-0.01	0.501 256
0	错误
0.01	0.498 756
0.02	0.497 525
0.03	0.496 305

看上去其极限好像是 0.5. 作出

$$y=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

的图形, 然后跟踪 $x=0$ 附近的曲线, 放大曲线的那一小段就可以验证这个极限.



可以看出

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=0.5.$$

这个极限可以用代数法来验证. 提示: 乘以 1, 即乘以

$$\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

在 37~44 题, 求极限. 利用 **TABLE** 选项, 并且从 ΔTbl $=0.1$ 开始, 然后转到 0.01, 0.001 和 0.000 1. 当你认为已知其极限时, 画出函数图形并用 **TRACE** 选项验证你的判断. 最后试用代数法验证.

37. $\lim\limits_{a\to -2}\frac{a^2-4}{\sqrt{a^2+5}-3}$
38. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}$
40. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$
41. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt[4]{x}}{x-1}$
42. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{7+2x}-\sqrt{7}}{x}$
43. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$
44. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7-\sqrt{49-x^2}}{x}$

111 ~ 112

2.3 平均变化率

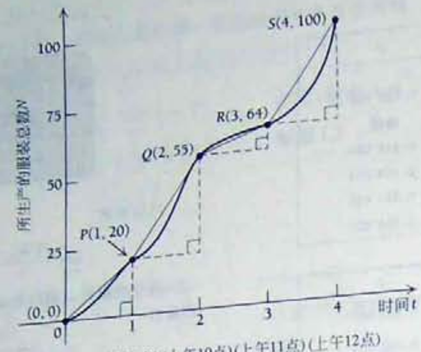
要点

- 计算平均变化率.
- 求简化差商.

我们说一辆汽车 2 小时行驶了 110 英里. 它的平均变化率(速度)是 110 英里/2 小时或 55 英里/小时. 假定你行驶在高速公路上并且开始加速, 你偶尔看一下速度表, 此刻看到的瞬时变化率是 55 英里/小时. 这是两个完全不同的概念. 或许你熟悉平均变化率的概念, 瞬时变化率的概念则涉及极限与微积分的思想. 为了理解第二个概念, 本节首先来阐述平均变化率的概念.

下面的曲线图展示了 Raggs 有限公司在某个早班上的服装总产量. 工业心理学家发现曲线图与工人们的生产过程有类似的特点.

2007/08/16





例1 商业：生产．从上午9点至上午10点这个时段共生产多少套服装？

解 在上午9点已生产20套服装，在上午10点已生产55套服装．在上午9点至上午10点这个时段，所生产的服装套数是

55套−20套，或35套. ■

注意35是从P点到Q点的直线的斜率.

例2 商业：平均变化率．从上午9点至上午11点每小时生产的服装的平均套数是多少？

解 我们有

113

$$\frac{64-20}{11-9}=\frac{44}{2}=22(套/小时).$$

注意，22是从点P到点R的直线的斜率．从点P到点R的直线在图中没有给出. ■

考虑函数$y=f(x)$和两个输入x_1和x_2．输入的变化或x的变化是

$$x_2-x_1.$$

输出的变化或y的变化是

$$y_2-y_1,$$

其中，$y_1=f(x_1)$和$y_2=f(x_2)$.

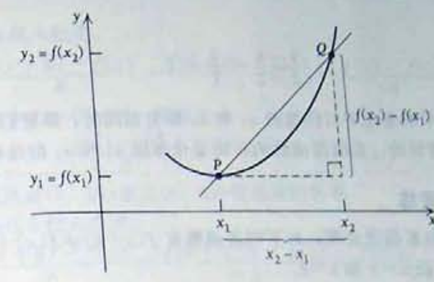
定义 当x从x_1变到x_2时，y关于x的**平均变化率(average rate of change)**是输出的变化与输入的变化之比：

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},其中\ x_2\neq x_1.$$

如果考察函数的图形，可以看到

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

它是从点$P(x_1, y_1)$到点$Q(x_2, y_2)$的直线的斜率．称线段$\overleftrightarrow{PQ}$为**割线**(secant line).



例3 对$y=f(x)=x^2$，求如下条件的平均变化率：

a) x从1变到3.

b) x从1变到2.

c) x从2变到3.

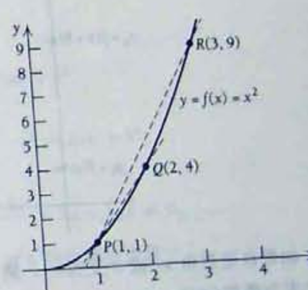
解 右下图对于本例的计算不是必需的，但是它使我们可以考察能计算其斜率的两条割线. 114

a) 当$x_1=1$时，

$$y_1=f(x_1)=f(1)=1^2=1;$$

而当$x_2=3$时，

$$y_2=f(x_2)=f(3)=3^2=9;$$



平均变化率是

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{9-1}{3-1}$$

$$=\frac{8}{2}=4.$$

b) 当$x_1=1$时，

$$y_1=f(x_1)=f(1)=1^2=1;$$

而当$x_2=2$时，

$$y_2=f(x_2)=f(2)=2^2=4;$$

平均变化率是

$$\frac{4-1}{2-1}=\frac{3}{1}=3.$$

c) 当$x_1=2$时，

2007/08/16

$$y_1 = f(x_1) = f(2) = 2^2 = 4;$$

而当 $x_2=3$ 时，

$$y_2 = f(x_2) = f(3) = 3^2 = 9;$$

平均变化率是

$$\frac{9-4}{3-2} = \frac{5}{1} = 5.$$

■

115

对于线性函数，其平均变化率对任选的 x_1 和 x_2 都是相同的；即它们都等于该直线的斜率 m. 正如我们在例 3 中看到的，非线性函数的平均变化率随 x_1 和 x_2 的选取而变化.

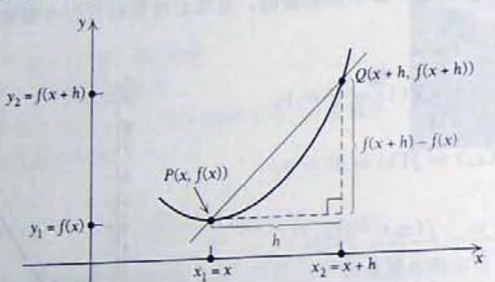
上机技术演练

练习　用 TABLE 选项说明，对下列各函数有 $f(x+h)\neq f(x)+h$.

1. $f(x)=x^2$；设 $x=6$ 和 $h=2$.
2. $f(x)=x^3-2x^2+4$；设 $x=6$ 和 $h=0.1$.

作为平均变化率的差商

现在取消平均变化率中变量的下标，用另一个记号来表示平均变化率. 把 x_1 简写成 x.



如果自变量由 x_1 或 x 变到 x_2，则自变量移动了距离 h. 因而 $x_2=x+h$. 于是，也称平均变化率为差商(difference quotient)，并且表示为

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

定义　关于 x 的平均变化率也称为差商. 它可以写成

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{其中 } h\neq 0.$$

差商等于从点 $P(x, f(x))$ 到点 $Q(x+h, f(x+h))$ 的直线的斜率.

注意，一般说来，$f(x+h)\neq f(x)+f(h)$. 例如，可以用函数 $f(x)=x^2$ 来验证这一结论.

例 4　对 $f(x)=x^2$，求以下条件的差商：

a) $x=5$ 和 $h=3$.

b) $x=5$ 和 $h=0.1$.

解

a) 把 $x=5$ 和 $h=3$ 代入公式：

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(5+3)-f(5)}{3} = \frac{f(8)-f(5)}{3}.$$ 116

因为 $f(8)=8^2=64$ 和 $f(5)=5^2=25$，所以有

$$\frac{f(8)-f(5)}{3} = \frac{64-25}{3} = \frac{39}{3} = 13.$$

其差商是 13. 这也是从点(5, 25)到点(8, 64)的直线的斜率.

b) 把 $x=5$ 和 $h=0.1$ 代入公式：

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(5+0.1)-f(5)}{0.1} = \frac{f(5.1)-f(5)}{0.1}.$$

因为 $f(5.1)=(5.1)^2=26.01$ 和 $f(5)=25$，所以

$$\frac{f(5.1)-f(5)}{0.1} = \frac{26.01-25}{0.1} = \frac{1.01}{0.1} = 10.1.$$

■

对于例 4 中的函数，我们来求差商的一般形式，这会使计算更简便.

例 5　对 $f(x)=x^2$，求差商的简化形式. 然后求 $x=5$ 和 $h=0.1$ 时的差商.

解　已知

$$f(x) = x^2,$$

所以

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2+2xh+h^2.$$

于是

$$f(x+h)-f(x) = (x^2+2xh+h^2)-x^2 = 2xh+h^2.$$

因此，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h, h\neq 0.$$

值得注意的是，差商仅当 $h\neq 0$ 时才有意义. 上述简化只对 h 的非零值才成立.

当 $x=5$ 和 $h=0.1$ 时，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x+h = 2\cdot 5+0.1 = 10+0.1 = 10.1.$$

■

例 6　对于 $f(x)=x^3$，求差商的简化形式.

解　因为 $f(x)=x^3$，所以

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3+3x^2h+3xh^2+h^3.$$

(附录中给出了这个公式.) 于是 117

$$f(x+h)-f(x) = (x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3 = 3x^2h+3xh^2+h^3.$$

2007/08/16

因此，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

$$=3x^2+3xh+h^2,h\neq 0.$$

再强调一次，这个公式只对 $h\neq 0$ 才成立.

例 7 对于 $f(x)=3/x$，求差商的简化形式.

解 因为

$$f(x)=\frac{3}{x},$$

所以

$$f(x+h)=\frac{3}{x+h}.$$

于是

$$f(x+h)-f(x)=\frac{3}{x+h}-\frac{3}{x}$$

—这里，乘以1后得到公分母

$$=\frac{3}{x+h}\cdot\frac{x}{x}-\frac{3}{x}\cdot\frac{x+h}{x+h}$$

$$=\frac{3x-3(x+h)}{x(x+h)}$$

$$=\frac{3x-3x-3h}{x(x+h)}$$

$$=\frac{-3h}{x(x+h)}.$$

因此，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{-3h}{x(x+h)}}{h}$$

$$=\frac{-3h}{x(x+h)}\cdot\frac{1}{h}=\frac{-3}{x(x+h)},h\neq 0.$$

这只对 $h\neq 0$ 才成立.

习题 2.3

对于1～14题中的每个函数，a)求差商的简化形式；b)完成下表.

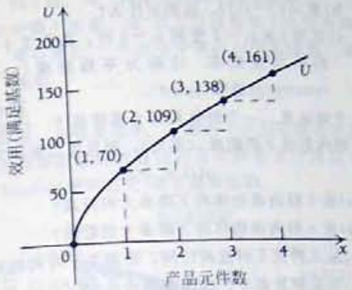
x	h	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
4	2	
4	1	
4	0.1	
4	0.01	

1. $f(x)=7x^2$
2. $f(x)=5x^2$
3. $f(x)=-7x^2$
4. $f(x)=-5x^2$
5. $f(x)=7x^3$
6. $f(x)=5x^3$
7. $f(x)=\frac{5}{x}$
8. $f(x)=\frac{4}{x}$
9. $f(x)=-2x+5$
10. $f(x)=2x+3$
11. $f(x)=x^2-x$
12. $f(x)=x^2+x$
13. $f(x)=(x-1)(x+2)$
14. $f(x)=x^2-1$

应用

商业与经济

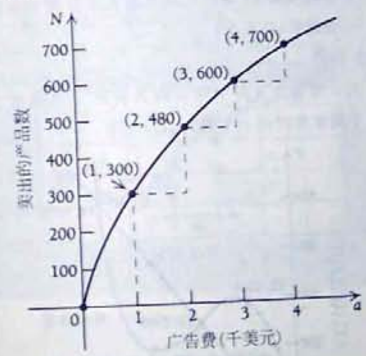
15. 效用. 效用是出现在经济学中的一类函数. 当一个用户得到某个产品的 x 个元件时，就会获得一定量的满足或效用 U. 下面是一个典型的效用函数的图形.



a)分别求 x 从 0 变到 1，1 变到 2，2 变到 3，3 变到 4 时 U 的平均变化率.

*b)为什么你认为平均变化率在下降？

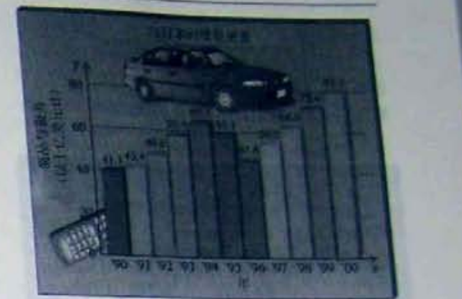
16. 广告效果. 下图展示了一个典型的广告效果. 在花了数额 a 的广告费以后，公司卖出了 $N(a)$ 件产品.



a)分别求 a 从 0 变到 1，1 变到 2，2 变到 3，3 变到 4 时 N 的平均变化率.

*b)为什么你认为平均变化率在下降？

17. 分别求从 1990 年到 1994 年，1994 年到 1996 年，1996 年到 2000 年贸易逆差的平均变化率.



18. 棒球大联赛票价. 这个问题可参看习题 1.2 的 51 题中关于棒球大联赛的平均票价模型. 其平均票价可表示为

$$p(x)=9.41-0.91x+0.09x^2,$$

其中 x 是 1980 年后的年数.

a)求 $p(4)$.

b)求 $p(9)$.

c)求 $p(9)-p(4)$.

d)求 $\frac{p(9)-p(4)}{9-4}$.

19. 总收益. 某公司测定，销售 x 件某产品的总收益可表示为

$$R(x)=-0.01x^2+1\,000x,$$

其中 $R(x)$ 以美元为单位.

a)求 $R(301)$.

b)求 $R(300)$.

c)求 $R(301)-R(300)$.

d)求 $\frac{R(301)-R(300)}{301-300}$.

*e)对该公司来说，d)中的比意指什么？

20. 总成本. 某公司测定，生产 x 件某产品的总成本可表示为

$$C(x)=-0.05x^2+50x,$$

某中 $C(x)$ 以美元为单位.

a)求 $C(301)$.

b)求 $C(300)$.

c)求 $C(301)-C(300)$.

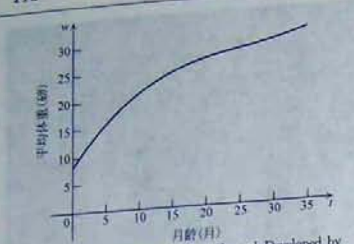
d)求 $\frac{C(301)-C(300)}{301-300}$.

*e)对该公司来说，d)中的比意指什么？

生命科学与物理学

21. 婴儿的成长. 男婴的平均体重如下面所示图形中给出.

2007/08/16



资料来源：Centers for Disease Control, Developed by the National Center for Health Statistics in collaboration with the National Center for Chronic Disease Prevention and Health Promotion(2000)

利用图形回答下列各题：

a)一个有代表性的男婴出生后的第一年内其平均增长率(以磅/月为单位).

b)在男婴出生后的第二年内，其平均增长率.

c)在男婴出生后的第三年内，其平均增长率.

d)在男婴出生后的头三年内，其平均增长率.

e)图形显示，在男婴出生后的头三年内的什么时候其增长率最大?

22. **婴儿的成长.** 利用 21 题中的图形回答下列问题.

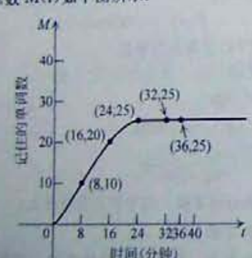
a)在男婴出生后的头九个月内，其平均增长率(以磅/月为单位).

b)在男婴出生后的头六个月内，其平均增长率(以磅/月为单位).

c)在男婴出生后的头三个月内，其平均增长率(以磅/月为单位).

*d)根据你在 a)~c)中所给的答案以及图形，估计男婴的哪个平均增长率可能是其头几周内的平均增长率.

23. **记忆力.** 一个人用时间 t(单位：分钟)记住的单词总数 $M(t)$如下图所示.



a)分别求 t 从 0 变到 8，8 变到 16，16 变到 24，24 变到 32，32 变到 36 时 M 的平均变化率.

*b)在 24 分钟后，为什么平均变化率变成 0?

24. **平均速度.** 一辆汽车从某起点经过 t 小时行驶路程 s(英里)，s 可表示为

$$s(t)=10t^2.$$

a)求 $s(2)$和 $s(5)$.

b)求 $s(5)-s(2)$. 这表示什么?

c)求当 t 从 $t_1=2$ 变到 $t_2=5$ 时，路程关于时间的平均变化率. 这称为**平均速度**(average velocity)或**速率**(speed).

25. **平均速度.** 一个物体从某个高度落下. 已知在 t 秒内它将下降距离 s(英尺)，并且可以表示为

$$s(t)=16t^2.$$

a)在 3 秒内该物体将下降多大的距离?

b)在 5 秒内该物体将下降多大的距离?

c)从 3 秒到 5 秒这段时间，距离关于时间的平均变化率是多少? 这也是平均速度.

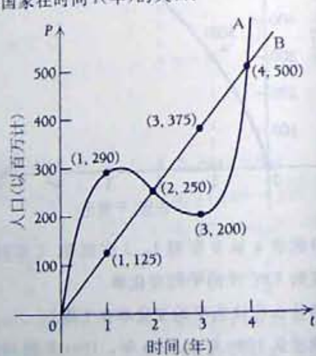
26. **油耗里程.** 在一个行程开始时，汽车上的里程表的读数是 30 680，且汽车有一满箱的汽油. 在该行程结束时，里程表的读数是 30 970. 再装满油箱用了 20 加仑[1]汽油.

a)所行英里数关于所耗加仑数的平均变化率是多少?

b)平均油耗率(即所行英里数关于所耗加仑数的变化率)是多少?

社会科学

27. **人口增长.** 下图中所示两条曲线分别描述了两个国家在时间 t(年)的人口.



[1] 加仑的单位符号为 USgal，1USgal=3.785 41dm³. ——编辑注

a)当 t 从 0 变到 4 时，求每个国家的人口(每个国家的总人数)关于时间 t 的平均变化率. 常称其为**平均增长率**(average growth rate).

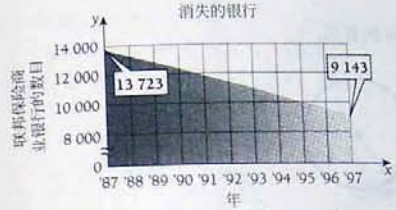
*b)假如 a)中的计算是人为编制的，我们应去查明这两个国家的人口曾以不同的方式在增长的事实吗? 试说明理由.

c)分别求 t 从 0 变到 1，1 变到 2，2 变到 3，3 变到 4 时，每个国家人口的平均变化率.

*d)对哪个国家，说"其人口以每年 125 百万的速度在增长"? 此言至少传达出什么信息? 试作说明.

综合题

*28. **商业：比较变化率.** 下面两个图形分别说明美国联邦保险银行的数目以及周期在 6 个月以上的 Nasdaq(纳斯达克)综合股票指数.



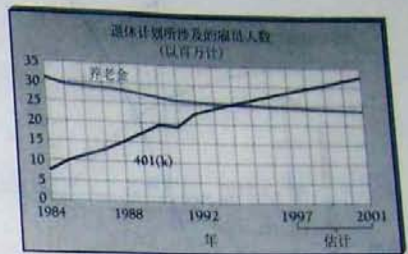
资料来源：Federal Deposit Insurance Corp



资料来源：Nasdaq

尽你所能，从多方面说明这两个图形的不同之处. 一定要考察它们的平均变化率.

29. **商业. 401(k)退休计划[2].** 下图展示了两种退休计划(养老金计划和 401(k)计划)的单位客户数(以百万计).



a)试估计关于养老金图形的平均变化率. 这些变化是正的还是负的? 这与斜率以及该图形的形状有关吗?

b)试估计关于 401(k)图形的平均变化率. 这些变化是正的还是负的? 这与斜率以及该图形的形状有关吗?

求简化差商.

30. $f(x)=mx+b$

31. $f(x)=ax^2+bx+c$

32. $f(x)=ax^3+bx^2$

33. $f(x)=\sqrt{x}$

$\left(提示：乘以 1，即乘以\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)$

34. $f(x)=x^4$

35. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

36. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

37. $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$

38. $f(x)=\sqrt{3-2x}$

39. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2.4 用差商的极限求导数

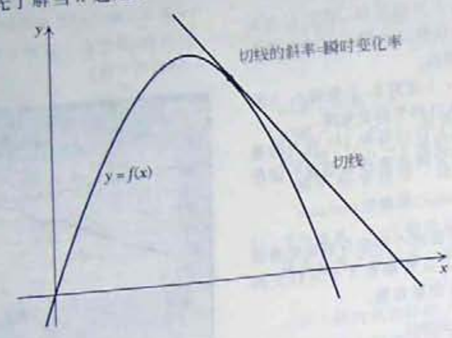
要点

- 求导数及导数值；
- 求切线方程.

[2] 符合美国国家税收法第 401 条. ——译者注

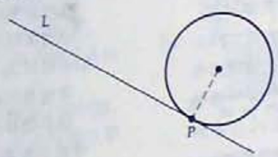
2007/08/16

119 | 122 在 2.4～2.6 节里，我们将知道，瞬时变化率可以用函数图形的切线斜率来表示. 为了定义切线的斜率，这里先了解当 h 趋近于 0 时如何求简化差商的极限.



切线

与一个圆相切的直线是与该圆恰好只接触于一点的直线.



这个定义不一定适用于其他曲线. 例如，考虑图 1 中所示曲线，直线 L 在点 P 与该曲线只接触于一点，但在其他点还与该曲线相交. 直线 L 可以看作是一条切线，而"只接触于一点"不能作为它的定义.



无约束的滑雪板在其折断发生地沿着滑雪板滑道的切线方向继续运动

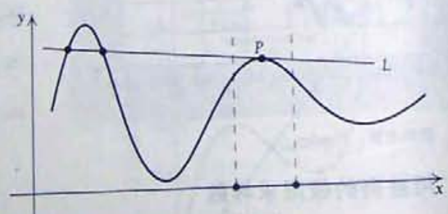


图 1

在图 1 中看到，在包含点 P 的一个小区间上，直线 L 恰好与该曲线只接触于一点. 这仍然不是切线的合适定义，因为该定义允许下面图 2 中的直线 M 为一条切线，而我们不接受这样的切线.

123

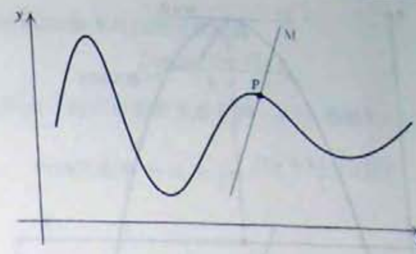


图 2

稍后，我们将给出切线的定义，但现在还要依赖于直觉. 在图 3 中，直线 L_1 和 L_2 不是切线，所有其他直线都是切线.

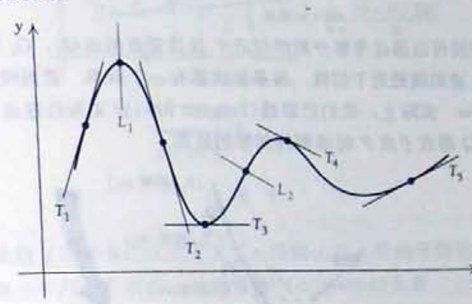


图 3

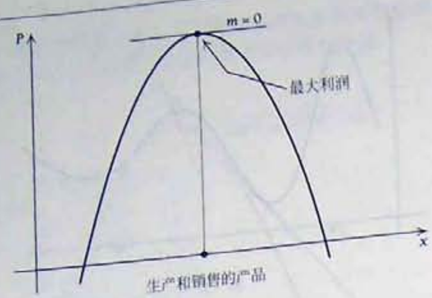
上机技术演练

探索 利用视窗[−3，3，−80，80]作 $y_1=3x^5-20x^3$ 的图形，其中，Xscl=1，而 Yscl=10. 然后画直线 $y_2=-7x-10$，$y_3=-30x+13$ 和 $y_4=-45x+28$. 哪一条直线好像与 y_1 的图形相切于点(1，−17)？在点(1，−17)附近放大图形可能有助于考察. 用较小的视窗完善你的猜测.

为什么要研究切线

研究切线的一个理由是它使我们能用斜率来定义瞬时变化率，另一个理由将在第 3 章中陈述. 现在考察下述总利润函数的图形，注意，这个函数的最大(或极大)值出现在其图形有水平切线的点，即切线斜率为 0 的点.

2007/08/16

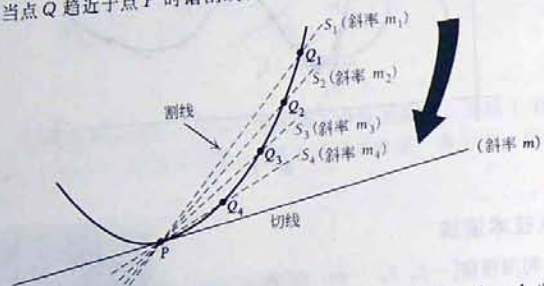


[124]

用极限求导数

我们将用下述方法来定义切线，该方法对任何曲线都有意义. 为做到这一点，要采用极限的概念.

曲线在点 P 的切线可以通过考察分别经过点 P 及其邻近的点 Q_1，Q_2 等的割线来得到. 当点 Q 趋近于点 P 时，诸割线趋近于切线. 每条割线都有一个斜率. 诸割线的斜率 m_1，m_2，m_3 等趋近于切线的斜率 m. 实际上，我们把**切线**(tangent line)定义为经过点 P 且有斜率 m 的直线，其中，m 是当点 Q 趋近于点 P 时诸割线斜率的极限.



怎样来计算极限 m? 假定在图 4 中 P 有坐标$(x, f(x))$. 而 Q 的第一个坐标是 x 加上某个数 h，或 $x+h$. Q 的坐标是$(x+h, f(x+h))$.

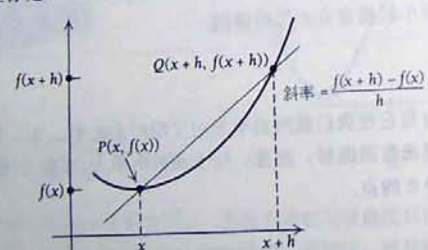


图 4

从 2.3 节可知，割线 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的斜率可以表示成差商

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

于是，正如图 5 中所看到的，当点 Q 趋近于点 P 时，$x+h$ 趋近于 x，即 h 趋近于 0. 因此有如下表述：

$$\text{切线的斜率} = m = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

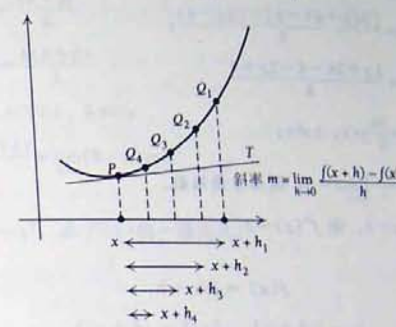


图 5

[125]

现在可以给出函数 f 的导数的正式定义了. 函数 f 在 x 处的导数记作 $f'(x)$，而不用 m.

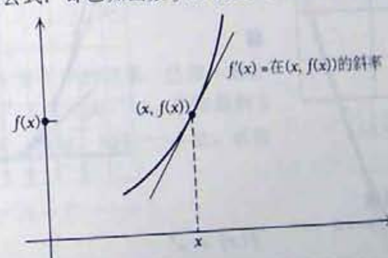
定义 对于函数 $y=f(x)$，它在 x 处的**导数**[⊖](derivative)是用

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

定义的函数 f'，只要该极限存在. 如果 $f'(x)$ 存在，我们就说 f 在 x 处**可导**(differentiable). 有时也称 f' 为**导出函数**(derived function).

这是微分学的基本定义.

下面来计算某些导数公式. 即已知函数 f 的表达式，试求 f' 的表达式.



⊖ 世界上没有什么能像一个与时俱进的思想那样具有强大的影响力. —— Victor Hugo

2007/08/16

计算导数的三个步骤.

1. 写出差商$[f(x+h)-f(x)]/h$.
2. 化简差商.
3. 求当h趋近于0时的极限.

例1 对于$f(x)=3x-4$，求$f'(x)$.

解 按照上述步骤有

[126] 1. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{[3(x+h)-4]-(3x-4)}{h}$;

2. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3x+3h-4-3x+4}{h}$

$$=\frac{3h}{h}=3,\ h\neq 0;$$

3. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}3=3$，因为3是常数. ■

因此，如果$f(x)=3x-4$，则$f'(x)=3$.

关于线性函数

$$f(x)=mx+b$$

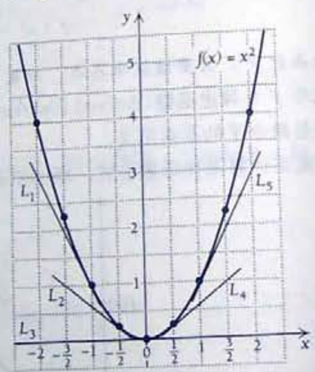
的一般导数公式是

$$f'(x)=m.$$

该公式可以用类似于例1中所采用的方法来验证.

考虑如下$f(x)=x^2$的图形. 在该图形上的各个点上画切线. 设$m(x)=$点$(x, f(x))$处的斜率. 计算每条直线的斜率并且完成下表. 你能猜出$m(x)$的公式吗?

直线	x	$m(x)$
L_1	-1	
L_2	$-\frac{1}{2}$	
L_3	0	
L_4	$\frac{1}{2}$	
L_5	1	



现在来试一试是否可以求

$$f(x)=x^2$$

的导数公式. 先求切线在$x=4$处的斜率. 它应该是$f'(4)$，然后求$f'(x)$的一般公式.

例2 对于$f(x)=x^2$，求$f'(4)$.

解 我们有

1. $\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{(4+h)^2-4^2}{h}$; [127]

2. $\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{16+8h+h^2-16}{h}$

$$=\frac{8h+h^2}{h}$$

$$=\frac{h(8+h)}{h}$$

$$=8+h,\ h\neq 0;$$

3. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(8+h)=8$.

因此，$f'(4)=8$. ■

例3 对于$f(x)=x^2$，求$f'(x)$的一般公式.

解

1. 首先有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}.$$

2. 在2.3节例5中，已经说明如何把这个差商简化成

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x+h.$$

3. 我们需要求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h).$$

当$h\to 0$时，可知$2x+h\to 2x$. 因而

$$\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x,$$

并且有

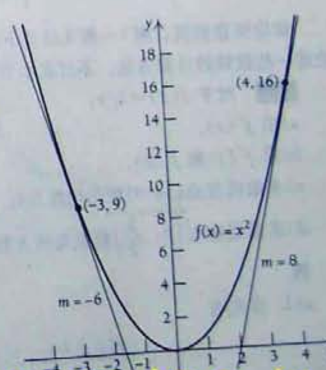
$$f'(x)=2x.$$ ■

在例2中，可以验证例3中的结果. 已知一般公式是$f'(x)=2x$. 因此$f'(4)=2(4)=8$，正好是例2中所求. 这个公式也说明，例如，在$x=-3$处，该曲线有切线，其斜率是

$$f'(-3)=2(-3)=-6.$$

我们还可以说：

- 曲线在点$(-3, 9)$处的切线有斜率-6.
- 曲线在点$(4, 16)$处的切线有斜率8.



[128]

2007/08/16

例4 对于 $f(x)=x^3$，求 $f'(x)$，然后求 $f'(-1)$ 和 $f'(1.5)$.

解

1. 首先有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}.$$

2. 在2.3节例6中，已经说明如何把这个差商简化成

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2+3xh+h^2.$$

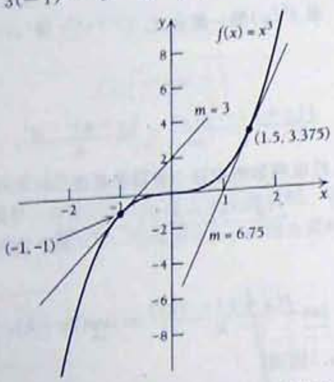
3. 然后有

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2.$$

因而，对于 $f(x)=x^3$ 有 $f'(x)=3x^2$.（关于这个公式的输入-输出表已在2.2节例4中给出.）

于是

$$f'(-1)=3(-1)^2=3 \quad 且 \quad f'(1.5)=3(1.5)^2=6.75.$$



129

你应该意识到，例1～例4以及下述的例5涉及稍长的计算过程，但是在2.5节中将着手论述一些较快的计算方法. 不过在本节里，充分理解导数的概念是很重要的.

例5 对于 $f(x)=3/x$：

a)求 $f'(x)$.

b)求 $f'(1)$ 和 $f'(2)$.

c)求曲线在点(1，3)处的切线方程.

d)求曲线在点 $\left(2,\frac{3}{2}\right)$ 处的切线方程.

解

a)1. 首先有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{[3/(x+h)]-(3/x)}{h}.$$

2. 在2.3节例7中已经说明这个差商可以化简成

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-3}{x(x+h)}.$$

3. 我们想求

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-3}{x(x+h)}.$$

当 $h\to0$ 时，$x+h\to x$，因而有

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{-3}{x(x+h)}=\frac{-3}{x^2}.$$

因为对任意实数 $x\neq0$ 有 $x^2>0$，由此推出，对这样的实数有 $-3/x^2<0$. 即所有切线的斜率都是负数.

b)于是有

$$f'(1)=\frac{-3}{1^2}=-3$$

且

$$f'(2)=\frac{-3}{2^2}=-\frac{3}{4}.$$

c)已知点(1，3)在函数图形上，因为 $f(1)=3$. 为了求曲线在点(1，3)处的切线方程，利用在 $x=1$ 处的斜率是 -3 的事实，这已在b)中求出. 现在有 130

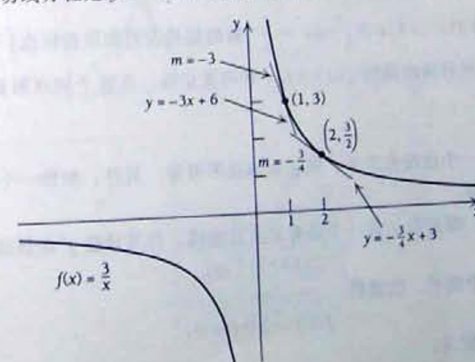
点：(1，3)，

斜率：-3.

把它们代入点斜式方程(见1.4节)：

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-3=-3(x-1)$$
$$y=-3x+3+3$$
$$=-3x+6.$$

曲线在点 $x=1$ 处的切线方程是 $y=-3x+6$(见下图).



d)为求曲线在 $x=2$ 处的切线方程，利用在 $x=2$ 处的斜率是 $-\frac{3}{4}$ 的事实，这已在 b)中求出．现在有

$$点：\left(2，\frac{3}{2}\right)，$$

$$斜率：-\frac{3}{4}．$$

把它们代入点斜式方程(见 1.4 节)：

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}(x-2)$$
$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{3}{4}x+3．$$

曲线在 $x=2$ 处的切线方程是

$$y=-\frac{3}{4}x+3．$$

对于 $f(x)=3/x$，因为 $f(0)$不存在，所以不能计算差商

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}．$$

因此，$f'(0)$不存在．我们说，"f 在 $x=0$ 处不可导．"

上机技术演练

曲线与切线

练习

1. 对于 $f(x)=3/x$，求 $f'(x)$，$f'(-2)$和 $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$．

2. 求曲线 $f(x)=3/x$ 在 $\left(-2，-\frac{3}{2}\right)$处的切线方程和该曲线在 $\left(-\frac{1}{2}，-6\right)$处的切线方程．然后画出曲线 $f(x)=3/x$ 和两条切线．在各个切点附近采用不同的视窗．

131

如果一个函数在一个点没有定义，则它在该点不可导．另外，如果一个函数在一个点不连续，则它在该点不可导．

可能有下述情形，即函数 f 在一个点有定义且连续，但其导数 f' 在该点没有定义．由

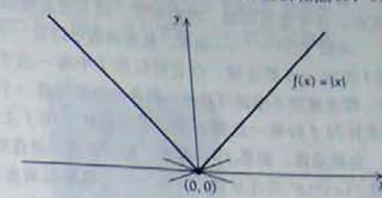
$$f(x)=|x|$$

给出的函数 f 就是一个例子．注意到

$$f(0)=|0|=0，$$

所以函数在 $x=0$ 处有定义．

假定我们试着在点(0，0)处画切线，像这种具有尖角(或不光滑点)的函数看上去在点(0，0)有多条切线，因而有多个斜率．在这一点的导数不是唯一的．现在来计算在 $x=0$ 处的导数．



因为在 $x=0$ 处，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}，$$

于是有

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}．$$

$h\to 0^-$	$\frac{\|h\|}{h}$
-2	$\frac{\|-2\|}{-2}$，或 $\frac{2}{-2}$，或 -1
-1	-1
-0.1	-1
-0.01	-1
-0.001	-1

$h\to 0^+$	$\frac{\|h\|}{h}$
2	$\frac{\|2\|}{2}$，或 $\frac{2}{2}$，或 1
1	1
0.1	1
0.01	1
0.001	1

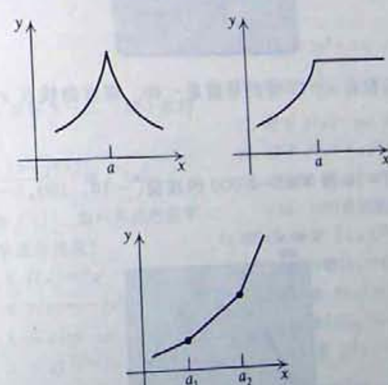
考察以上两个输入-输出表．注意到当 h 从左侧趋近于 0 时，$|h|/h$ 趋近于-1，但 h 从右侧趋近于 0 时，$|h|/h$ 趋近于 1，因而， 132

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}\ 不存在，$$

所以

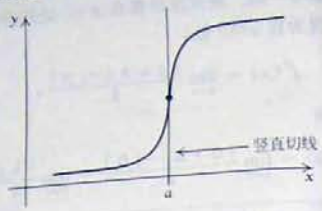
$$f'(0)\ 不存在．$$

如果函数有一个"尖点"或"尖角"，则它在该点无导数．



2007/08/16

如果一个函数在一个点有竖直切线，则函数在该点也是不可导的. 例如，右下图所示函数在点 a 处有竖直切线. 我们知道，因为竖直线的斜率没有定义，所以在这样的点处没有导数.



函数 $f(x)=|x|$ 表明，虽然函数可以在一个区间 I 的每一点都连续，但它可以在 I 中每一点不可导. 即连续性不蕴涵可导性. 但是，如果知道一个函数在区间 I 的每一点都可导，则它在该区间 I 上连续. 也就是说，如果 $f'(a)$ 存在，则 f 在点 a 处连续. 函数 $f(x)=x^2$ 是在区间$(-\infty,\infty)$上可导因而在每一点都连续的例子. 当然，如果一个函数在某点 a 处不连续，则它在点 a 不可导. 因此，当知道一个函数

133 在一个区间上可导时，它在其图形上没有"尖点"、"尖角"或"间断点"的意义下是光滑的.

上机技术演练

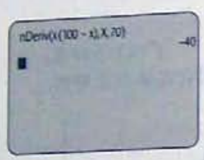
数值求导法与切线的画法　绘图器有求切线斜率的功能，即有对特定的 x 值取导数的功能. 现在考虑函数

$$f(x)=x(100-x),$$

并且求其在 $x=70$ 处的导数值.

计算导数

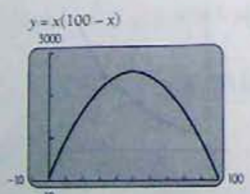
从 **MATH** 菜单中选取 nDeriv(numerical derivative，即数值导数)并且键入函数、自变量以及欲求导数的点 x 处的值. 当键入 nDeriv($x(100-x)$，x，70)时，绘图器返回-40.



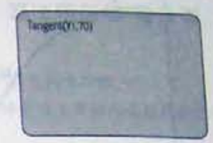
我们看到，该函数在 $x=70$ 处的导数是-40. 即该曲线在 $x=70$ 处的切线斜率是-40.

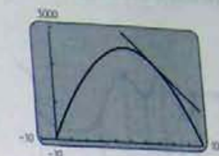
画切线

首先用带有 Xscl=10 和 Yscl=1 000 的视窗[-10，100，-10，3 000]作函数图形.



为了画 $x=70$ 处的切线，将光标返回到待选地址位置，并且从 **DRAW** 菜单中选取 **TANGENT** 选项. 然后键入 Tangent(Y_1，70). 我们看到 $f(x)$ 的图形和在 $x=70$ 处的切线.





练习　对于下列每个函数，计算在已知点处的导数，然后画出其图形和切线.

1. $f(x)=x(100-x)$；
   $x=20$，$x=37$，$x=50$，$x=90$
2. $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+6x^2-11x-50$；
   $x=-5$，$x=0$，$x=7$，$x=12$，$x=15$
3. $f(x)=6x^2-x^3$；
   $x=-2$，$x=0$，$x=2$，$x=4$，$x=6.3$
4. $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$；
   $x=-2$，$x=-1.3$，$x=-0.5$，$x=0$，$x=1$，$x=2$

*5. 对于第 4 题中的函数，试画 $x=3$ 处的切线，并且估计其导数. 错在哪里？请说明理由. 134

习题 2.4

在 1～16 题中：

a)作出函数的图形.

b)分别画出其图形在 x 坐标为-2，0 和 1 处的切线.

c)通过取极限$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$求 $f'(x)$.

d)求 $f'(-2)$，$f'(0)$和 $f'(1)$. 如何将这些斜率与你在 b)中所画直线的斜率进行比较？

1. $f(x)=5x^2$　　2. $f(x)=7x^2$
3. $f(x)=-5x^2$　　4. $f(x)=-7x^2$
5. $f(x)=x^3$　　6. $f(x)=-x^3$
7. $f(x)=2x+3$　　8. $f(x)=-2x+5$
9. $f(x)=-4x$　　10. $f(x)=\frac{1}{2}x$
11. $f(x)=x^2+x$　　12. $f(x)=x^2-x$
13. $f(x)=2x^2+3x-2$　　14. $f(x)=5x^2-2x+7$
15. $f(x)=\frac{1}{x}$　　16. $f(x)=\frac{5}{x}$
17. 对于 $f(x)=mx$ 求 $f'(x)$.
18. 对于 $f(x)=ax^2+bx+c$ 求 $f'(x)$.
19. 分别求 $f(x)=x^2$ 的图形在点(3，9)，(-1，1)和(10，100)处的切线方程. 参看例 3.
20. 分别求 $f(x)=x^3$ 的图形在点(-2，-8)，(0，0)和(4，64)处的切线方程. 参看例 4.
21. 分别求 $f(x)=5/x$ 的图形在点(1，5)，(-1，-5)和(100，0.05)处的切线方程. 见 16 题.
22. 分别求 $f(x)=2/x$ 的图形在点(-1，-2)，(2，1)和$\left(10，\frac{1}{5}\right)$处的切线方程.
23. 分别求 $f(x)$ [illegible] 的图形在点(-1，3)，

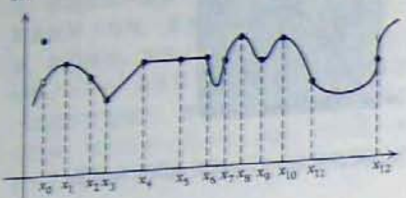
2007/08/16

(0, 4)和(5, −21)处的切线方程.

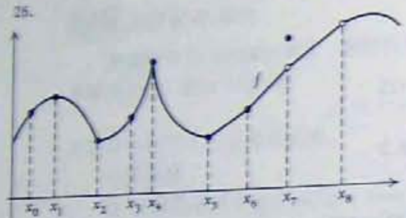
24. 分别求 $f(x)=x^2-2x$ 的图形在点(−2, 8), (1, −1)和(4, 8)处的切线方程.

列出图中使每个函数在其上不可导的点.

25.



26.



应用

商业与经济

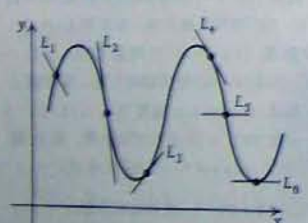
27. 邮费函数. 考虑在习题 2.1 的 15~21 题中定义的邮费函数. 在什么值, 该函数是不可导的?

28. 出租车车费函数. 考虑在习题 2.1 的 22 题和 23 题中定义的函数. 在什么值, 函数是不可导的?

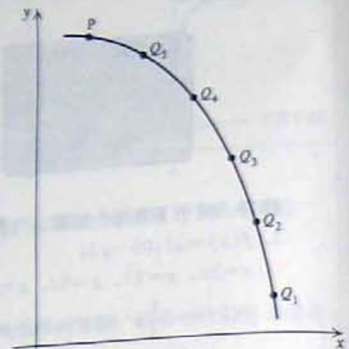
29. 棒球大联赛票价. 考虑在习题 2.1 的 51 题中的平均票价模型. 在什么值, 函数是不可导的?

综合题

•30. 下列哪些直线看上去是切线? 试说明为什么是或为什么不是.



•31. 在下图中, 画出从点 P 到各点 Q 的割线. 然后画出曲线在点 P 处的切线. 叙述一下会出现什么情形.



求 $f'(x)$.

32. $f(x)=x^3$

33. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

34. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

35. $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$

36. $f(x)=\sqrt{x}$

$\left(\text{乘以 1, 即乘}\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)$

37. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

38. $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

39. 考虑下述函数 f:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}.$$

对于什么值, 这个函数不可导?

上机技术演练

40~45. 用绘图器实施数值求导法并且画出 19~24 题中每个函数图形的切线.

46. 商业: 投资的增长. 某公司决定, 在时间 t(年)以后, 投资值为 V(百万美元), 其中 V 可表示为

$$V(t)=5t^3-30t^2+45t+5\sqrt{t}.$$

注意: 绘图器通常只用变量 y 和 x 画函数图形, 因而, 当你输进这个函数时可能需要更换变量.

a)在区间[0, 5]上画 V 的图形.

b)求过点(1, $V(1)$)和(5, $V(5)$)的割线方程, 然后在 a)中的同一坐标系下画出割线.

c)求第 1 年与第 5 年间的投资平均变化率.

d)对于各对点(1, $V(1)$)和(4, $V(4)$); (1, $V(1)$)和(3, $V(3)$); (1, $V(1)$) 和 (1.5, $V(1.5)$)重复步骤 b)和 c).

e)看上去, 该图形在点(1, $V(1)$)处的切线斜率是什么?

2007/08/16

135/136

2.5 求导法则: 幂法则与和-差法则

要点

- 用幂法则或和-差法则求导数.
- 求常值函数的导数或求常数与函数乘积的导数.

莱布尼茨记号

当 y 是 x 的函数时, 也可以把导数 $f'(x)$ 记作[⊖]

$$\frac{dy}{dx},$$

读成"y 关于 x 的导数". 这个记号是德国数学家莱布尼茨发明的. 它既不表示 dy 除以 dx, 也不表示取消两个 d 后的 y/x. 现在把 dy/dx 看作是由多个部分组成的单一整体. 也就是说, 直到给出 dy 和 dx 的明确意义以前(这里暂不给出), 不能把 dy/dx 看作一个商. 例如, 如果 $y=x^2$, 则

$$\frac{dy}{dx}=2x.$$

为了指明这里 f 关于 x 的导数, 也可以写成

$$\frac{d}{dx}f(x).$$

例如,

$$\frac{d}{dx}x^2=2x.$$

$\dfrac{dy}{dx}$在 $x=5$ 时的值可以表示成

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5}.$$

因而对于 $dy/dx=2x$, 有

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5}=2\cdot 5, \quad \text{或} \quad 10.$$

一般地, 对于 $y=f(x)$, 有

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=f'(a).$$

历史记载 德国数学家、哲学家莱布尼茨(1646—1716)以及英国数学家、哲学家、物理学家牛顿(1642—1727)都把微积分的发明归功于自己. 尽管他们的发明是彼此独立的. 关于 dy/dt, 牛顿曾采用点记号 $\dot{y}$, 其中 y 是时间的函数, 虽然这个记号不像莱布尼茨记号那样常用, 但是仍有人使用这个记号.

⊖ 也可以用记号 D_xy.

幂法则

在本节的余下部分，我们要论述有效的求导法则和方法.

在本节的余下部分，我们要论述有效的求导法则和方法.

137 考察下表中的实例，它包含前面给出的函数和已经求出的导数.

函　数	导　数
x^2	$2x^1$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
$\frac{1}{x}=x^{-1}$	$-1\cdot x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$
$\frac{1}{x^2}=x^{-2}$	$-2\cdot x^{-3}=\frac{-2}{x^3}$

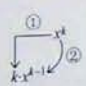
或许你已经想到下述定理.

定理 1　幂法则

对于任意实数 k，有

$$\frac{d}{dx}x^k=k\cdot x^{k-1}.$$

在 2.4 节的例 3 和例 4 以及 15 题中，已经分别对于 $k=2$，3 和 -1 的情形证明了该定理. 在本书中，不打算证明其他情形. 注意，这个法则对无论什么指数都成立. 也就是说，为求 x^k 的导数，只要把指数 k 写成系数，随后乘以 x 的指数比 k 少 1 的幂即可.



①把指数写成系数
②从原指数减去1

例 1　$\frac{d}{dx}x^5=5x^4$ ■

例 2　$\frac{d}{dx}x=1\cdot x^{1-1}=1\cdot x^0=1$ ■

例 3　$\frac{d}{dx}x^{-4}=-4\cdot x^{-4-1}=-4x^{-5}$，或 $-4\cdot\frac{1}{x^5}$，或 $-\frac{4}{x^5}$ ■

利用幂法则也可以求$\sqrt{x}$的导数. 为此，先要将$\sqrt{x}$转换成具有有理指数的表达式.

例 4　$\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{d}{dx}x^{1/2}=\frac{1}{2}\cdot x^{(1/2)-1}$

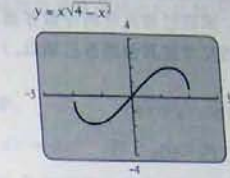
138 $=\frac{1}{2}x^{-1/2}$，或$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}$或$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$，或$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ■

例 5　$\frac{d}{dx}x^{-2/3}=-\frac{2}{3}x^{(-2/3)-1}$

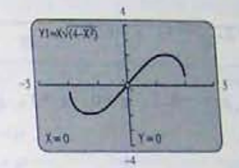
$=-\frac{2}{3}x^{-5/3}$，　或$-\frac{2}{3}\frac{1}{x^{5/3}}$，　或$-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$ ■

上机技术演练

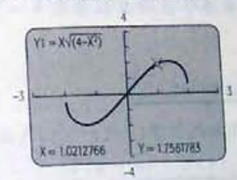
关于数值求导和画切线的其他方法　考虑 $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$，其图形如下.

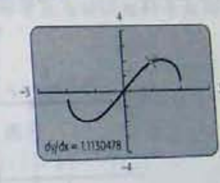


为了求 dy/dx 在一个点的值，从 CALC 菜单中选取 dy/dx.

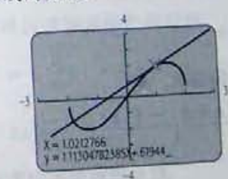


我们看到图形以及在点(0，0)处的光标. 键入所给的 x 值或用箭头键移动光标到所给的点. 然后按回车键得到所给 x 值的导数值.





在求出导数以后，如果利用箭头键把光标移到适当位置，就可以用 DRAW 菜单中的 TANGENT 选项在已求出导数的点处画切线. 这可以从图形屏幕上直接做到这一点，还可以显示该切线的方程.



2007/08/16

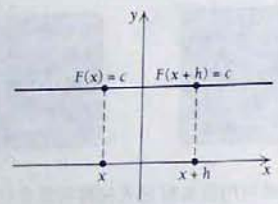
在求出导数以后，如果键入 x 值，也可以用 TANGENT 选项画切线．在这种情形下，必须从待选地址屏幕上访问 TANGENT 选项，并且提供函数的名称和切点的 x 坐标．这样做，不能显示切线的方程．

[139] **练习**　对下列每个函数，求在已知点处的导数并画出其切线方程．（提示：在选择视窗时，注意调节 x 轴的尺寸使其包括各已知点．）

1. $f(x)=x(200-x)$；
   $x=24$，$x=138$，$x=150$，$x=190$
2. $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+6x^2-11x-50$；
   $x=-5$，$x=0$，$x=7$，$x=12$，$x=15$
3. $f(x)=6x^2-x^3$；
   $x=-2$，$x=0$，$x=2$，$x=4$，$x=6.3$
4. $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$；
   $x=-2$，$x=-1.3$，$x=-0.5$，$x=0$，$x=1$，$x=2$

常值函数的导数

考察如下所示的常值函数 $F(x)=c$ 的图形．该图形上每一点处的斜率是多少？



我们得到下述定理．

定理 2

常值函数的导数是 0，即 $\frac{d}{dx}c=0$．

证明　设 F 是由 $F(x)=c$ 给出的函数，则

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c-c}{h}$$
$$=\frac{0}{h}=0.$$

其差商总是 0．因而，当 h 趋近于 0 时，其差商的极限趋近于 0．因此 $F'(x)=0$．■

上机技术演练

探索　作常值函数 $y=-3$ 的图形．然后分别求该函数在 $x=-6$，$x=0$ 和 $x=8$ 处的导数．关于常值函数的导数可得出什么结论？

常数与函数乘积的导数

现在考虑一些可导函数，例如

$$f(x)=5x^2 \quad 和 \quad g(x)=-7x^4.$$ [140]

注意到我们已经知道如何求 x^2 和 x^4 的导数．再参照 2.4 节以及习题 2.4 中的结果，便可完成下表．

函　数	导　数
$5x^2$	$10x$
$3x^{-1}$	$-3x^{-2}$
$-7x^2$	$-14x$
$1\cdot x^3$	$3x^2$

或许你已经想到下述结果．

定理 3　常数与一个函数的乘积的导数等于该常数与该函数的导数的乘积．利用导数记号，可以把它写成

$$\frac{d}{dx}[c\cdot f(x)]=c\cdot\frac{d}{dx}f(x).$$

证明　设 F 是由 $F(x)=cf(x)$ 给出的函数，则有

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$
$$=c\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

当 $h\to 0$ 时，上述表示式的极限等于 c 与 $f'(x)$ 的乘积，所以 $F'(x)=cf'(x)$．■

把这个法则与幂法则结合起来可以求许多函数的导数．

例 6　$$\frac{d}{dx}5x^4=5\frac{d}{dx}x^4=5\cdot 4\cdot x^{4-1}=20x^3$$ ■

例 7　$$\frac{d}{dx}(-9x)=-9\frac{d}{dx}x=-9\cdot 1=-9$$ ■

实际上，只需用一步就能求许多这类函数的导数．

例 8　$$\frac{d}{dx}\frac{-4}{(x^2)}=\frac{d}{dx}(-4x^{-2})=-4\cdot\frac{d}{dx}x^{-2}$$
$$=-4(-2)x^{-2-1}=8x^{-3},\quad 或\ \frac{8}{x^3}$$ ■ [141]

2007/08/16

例 9 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x^{0.7})=-1\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{0.7}$$
$$=-1\cdot 0.7\cdot x^{0.7-1}=-0.7x^{-0.3}$$ ■

和或差的导数

> **上机技术演练**
>
> **探索** 把下列两个函数键入绘图器：
> $$f(x)=x(100-x),$$
> $$g(x)=x\sqrt{100-x^2}.$$
> 然后键入第三个函数，它是前两个函数的和：$Y_3=Y_1+Y_2$. 利用绘图器的数值求导选项求这三个函数中的每一个函数在 $x=8$ 处的导数(参看 2.4 节最后的上机技术演练).
>
> 比较你的答案. 关于求一个和的导数，你有什么想法?

从习题 2.4 的 11 题中，可以知道
$$f(x)=x^2+x$$
的导数是
$$f'(x)=2x+1.$$
注意到 x^2 的导数是 $2x$，x 的导数是 1，而这两个导数的和是 $f'(x)$. 这个例子说明了下述定理.

定理 4 和-差法则

和. 和的导数等于导数的和：
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)+g(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x).$$

差. 差的导数等于导数的差：
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)-g(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x).$$

证明 对于和法则，其证明基于和的极限等于极限的和. 设 F 是由 $F(x)=f(x)+g(x)$ 定义的函数，则
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$
$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$
当 h 趋近于 0 时，等式右边的两项分别趋近于 $f'(x)$ 与 $g'(x)$，所以它们的和趋近于 $f'(x)+g'(x)$. 因此，$F'(x)=f'(x)+g'(x)$.

类似地，可以证明差法则. ■

由多个项的和或差组成的任一函数都可以逐项求导.

例 10 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x+7)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7)$$
$$=3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7)$$
$$=3\cdot 1+0=3$$ ■ 142

例 11 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-3x^2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^2)$$
$$=5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3-3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2$$
$$=5\cdot 3x^2-3\cdot 2x$$
$$=15x^2-6x$$ ■

例 12 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(24x-\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(24x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{x}\right)$$
$$=24\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{1/2}+2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-1}$$
$$=24\cdot 1-\frac{1}{2}x^{(1/2)-1}+2(-1)x^{-1-1}$$
$$=24-\frac{1}{2}x^{-1/2}-2x^{-2}$$
$$=24-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}$$ ■

> 特别提醒！一个函数加上一个常数的导数，即
> $$f(x)+c$$
> 的导数，只是该函数的导数
> $$f'(x).$$
> 一个函数与一个常数的乘积的导数，即
> $$c\cdot f(x)$$
> 的导数，等于该常数乘该函数的导数
> $$c\cdot f'(x).$$
> 也就是说，对于乘积，其常数保持不变，但对于和，其常数变为 0.

切线的斜率

重要的是，要会求这样的点，使得在该点处一条曲线的切线有某个确定的斜率，即在该点处其导数取某个确定的值. 143

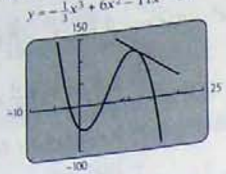
2007/08/16

上机技术演练

水平切线 函数

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+6x^2-11x-50$$

的图形给出了其在 $x=12$ 处的切线.



练习 作下列每个函数的图形，并且画出在多个不同点处的切线. 然后计算一些点的 x 坐标，使得这些点处的切线是水平线. 在例 13 和例 14 中，你将学习用微分学的方法求得精确值.

1. $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+6x^2-11x-50$
2. $f(x)=-x^3+6x^2$
3. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x$
4. $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

例 13 在 $y=-x^3+6x^2$ 的图形上求切线是水平线的点.

解 水平切线的斜率为 0. 于是，寻求 x 的值使得在该值有 $dy/dx=0$. 即求 x 使得

$$-3x^2+12x=0.$$

分解因式然后解方程：

$$-3x(x-4)=0$$

$$3x=0 \quad 或 \quad x-4=0$$

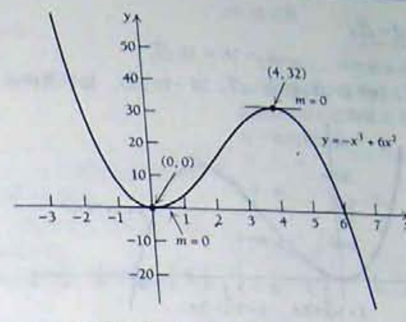
$$x=0 \quad 或 \quad x=4.$$

为在函数图形上得到所求点，必须从原方程 $y=-x^3+6x^2$ 中确定第二个坐标.

对于 $x=0, y=-0^3+6\cdot 0^2=0$.

对于 $x=4, y=-4^3+6\cdot 4^2=-64+96=32$.

因此，(0, 0)和(4, 32)是所求点. 如下图所示.



■

例 14 在 $y=-x^3+6x^2$ 的图形上求切线斜率为 6 的点.

解 我们需要求 x 的值使得在该值有 $dy/dx=6$. 即求 x 使得

$$-3x^2+12x=6.$$

为解方程，等式两边加 -6 得

$$-3x^2+12x-6=0.$$

因为每项有公因子 -3，可以乘以 $-\frac{1}{3}$ 来简化这个方程. 于是有 144

$$x^2-4x+2=0.$$

这是不易分解的二次方程，所以要用二次公式，其中 $a=1$，$b=-4$ 和 $c=2$：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\cdot2\pm2\sqrt{2}}{2\cdot1}=\frac{2}{2}\cdot\frac{2\pm\sqrt{2}}{1}$$

$$=2\pm\sqrt{2}.$$

其解是 $2+\sqrt{2}$ 和 $2-\sqrt{2}$.

我们从原方程来确定第二个坐标，对于 $2+\sqrt{2}$，

$$y=-(2+\sqrt{2})^3+6(2+\sqrt{2})^2$$

$$=-[(2+\sqrt{2})^2(2+\sqrt{2})]+6(4+4\sqrt{2}+2)$$

$$=-[(6+4\sqrt{2})(2+\sqrt{2})]+6(6+4\sqrt{2})$$

$$=-[12+6\sqrt{2}+8\sqrt{2}+8]+36+24\sqrt{2}$$

$$=-[20+14\sqrt{2}]+36+24\sqrt{2}$$

$$=-20-14\sqrt{2}+36+24\sqrt{2}$$

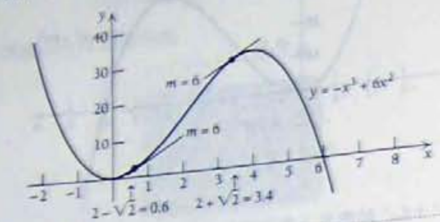
$$=16+10\sqrt{2}.$$

2007/08/16

类似地，对于 $x=2-\sqrt{2}$，

$$y=16-10\sqrt{2}.$$

因此，所求点是 $(2+\sqrt{2},\ 16+10\sqrt{2})$ 和 $(2-\sqrt{2},\ 16-10\sqrt{2})$。如下图所示。



上机技术演练

练习

1. 作 $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x$ 的图形，并且画出多个不同点处的切线。估计在哪个点处的切线是水平线的点。然后用例13和例14的微分法（分析方法）求出精确的结果。

145

习题 2.5

求 $\frac{dy}{dx}$。

1. $y=x^7$
2. $y=x^8$
3. $y=15$
4. $y=78$
5. $y=4x^{150}$
6. $y=7x^{200}$
7. $y=x^3+3x^2$
8. $y=x^4-7x$
9. $y=8\sqrt{x}$
10. $y=4\sqrt{x}$
11. $y=x^{0.07}$
12. $y=x^{0.78}$
13. $y=\frac{1}{2}x^{4/5}$
14. $y=-4.8x^{1/3}$
15. $y=x^{-3}$
16. $y=x^{-4}$
17. $y=3x^2-8x+7$
18. $y=4x^2-7x+5$
19. $y=\sqrt[4]{x}-\frac{1}{x}$
20. $y=\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}$
21. $y=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$
22. $y=\sqrt[3]{x^4}$

求 $f'(x)$。

23. $f(x)=0.64x^{2.5}$
24. $f(x)=0.32x^{12.5}$
25. $f(x)=\frac{5}{x}-x$
26. $f(x)=\frac{4}{x}-x$
27. $f(x)=4x-7$
28. $f(x)=7x+11$
29. $f(x)=4x+9$
30. $f(x)=7x-14$
31. $f(x)=\frac{x^4}{4}$
32. $f(x)=\frac{x^3}{3}$
33. $f(x)=-0.01x^2-0.5x+70$
34. $f(x)=-0.01x^2+0.4x+50$
35. $f(x)=3x^{-2/3}+x^{3/4}+x^{6/5}+\frac{8}{x^3}$
36. $f(x)=x^{-3/4}-3x^{2/3}+x^{5/4}+\frac{2}{x^4}$
37. $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{x}{2}$
38. $f(x)=\frac{x}{5}+\frac{5}{x}$
39. $f(x)=\frac{16}{x}-\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^4}$
40. $f(x)=\frac{20}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$
41. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}$
42. $f(x)=\frac{x^5-3x^4+2x^3-5x^2-8x+4}{x^2}$

对于 x 的值，求 $f'(x)$。

43. $f(x)=x^2+2x-3$，$x=10$
44. $f(x)=\sqrt{x}$，$x=4$
45. $f(x)=\frac{4}{x^2}$，$x=-2$
46. $f(x)=x+\frac{1}{x}$，$x=1$
47. 分别求 $f(x)=x^3-2x+1$ 的图形在点 $(2,5)$，$(-1,2)$ 和 $(0,1)$ 处的切线方程。
48. 分别求 $f(x)=x^2-\sqrt{x}$ 的图形在点 $(1,0)$，$(4,14)$ 和 $(9,78)$ 处的切线方程。

对于每个函数，在其图形上求切线是水平线的点。

49. $y=x^2$
50. $y=-x^2$
51. $y=-x^3$
52. $y=x^3$
53. $y=3x^2-5x+4$
54. $y=5x^2-3x+8$
55. $y=-0.01x^2-0.5x+70$
56. $y=-0.01x^2+0.4x+50$
57. $y=2x+4$
58. $y=-2x+5$
59. $y=4$
60. $y=-3$
61. $y=-x^3+x^2+5x-1$
62. $y=-\frac{1}{3}x^3+6x^2-11x-50$
63. $y=\frac{1}{3}x^3-3x+2$
64. $y=x^3-6x+1$
65. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2$
66. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x-9$

对于每个函数，在其图形上求切线的斜率为1的点。

67. $y=20x-x^2$
68. $y=6x-x^2$
69. $y=-0.025x^2+4x$
70. $y=-0.01x^2+2x$
71. $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2+2x$
72. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-4x+1$

综合题

73. 在函数

$$y=x^4-\frac{4}{3}x^3-4$$

的图形上，求切线是水平线的点。

74. 在函数

$$y=2x^6-x^4-2$$

的图形上，求切线是水平线的点。

求 dy/dx。下列每个函数都可以求导数。试用本节所论述的法则提供求导依据。不过，可能先要有一些代数知识。

75. $y=x(x-1)$
76. $y=(x-1)(x+1)$
77. $y=(x-2)(x+3)$
78. $y=\frac{5x^2-8x+3}{8}$
79. $y=\frac{x^2+x}{x}$
80. $y=(5x)^2$
81. $y=(-4x)^3$
82. $y=\sqrt{7x}$
83. $y=\sqrt[3]{8x}$
84. $y=(x-3)^2$
85. $y=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$
86. $y=(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^2$
87. $y=(x+1)^3$
88. $y=(x-2)^2(x+1)$
89. 证明定理4（差法则）。

*90. 写一段文字，比较幂法则、和－差法则以及关于求常值函数的导数或求常数与函数的乘积的导数的法则。

*91. 写一篇关于莱布尼茨和牛顿的生平传记的短文，着重讲述他们在科学和社会的多个领域所做出的贡献。

上机技术演练

作下列每个函数的图形，在不同的点处画切线。估计有关点，使得这些点处的切线是水平线。

92. $f(x)=x^3-3x^2+1$
93. $f(x)=1.6x^3-2.3x-3.7$
94. $f(x)=10.2x^4-6.9x^3$
95. $f(x)=\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$

有些绘图器可用同一个视窗作出函数 f 及其导数 f' 的图形。对于下列每个函数，作出 f 和 f' 的图形。

96. $f(x)=20x^3-3x^5$
97. $f(x)=x^4-3x^2+1$
98. $f(x)=x^3-2x-2$
99. $f(x)=x^4-x^3$
100. $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$
101. $f(x)=\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$

2007/08/16

2.6 瞬时变化率

要点

- 给定一个关于距离的函数，求速度和加速度.
- 求瞬时变化率.

在 2.3 节中，我们已经知道，对于函数 f：

现在可以从平均变化率过渡到瞬时变化率了.

146 ~ 147

$$\text{平均变化率} = \text{简化差商} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

如果让 h 趋近于 0，就可以得到瞬时变化率.

定义 对任一函数 f，

$$\text{瞬时变化率} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

在 2.4 节和 2.5 节中，为了得到一些快捷的计算方法，我们把上述极限主要理解为曲线切线的斜率. 现在，则把这个极限主要理解为瞬时变化率.

我们说一辆汽车 2 小时行驶 108 英里，它的平均速度(或平均速率)是 108 英里/2 小时，或 54 英里/小时. 这是距离关于时间的平均变化率. 但是在行驶中的各个时刻，速度表的读数不是 54. 因此，我们说 54 是一个平均速度. 速度表在任一瞬间的即时读数应该表示其瞬时速度或**瞬时变化率**(instantaneous rate of change).



一些新款小汽车用给出平均每加仑英里数和瞬时每加仑英里数的方法来说明其燃油节约系统. 当你看到这样一个显示器的时候，可以把显示器的瞬时每加仑英里数(MPG)读数理解为导数.



平均变化率是用差商给出的. 如果距离 s 是时间 t 的函数，而 h 是行驶一段距离所用时间，则距离关于时间的平均变化率称为**平均速度**(average velocity)，并且可以表示为

$$\text{平均速度} = \frac{\text{距离之差}}{\text{时间之差}} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

瞬时变化率可以令 h 趋近于 0 来求得. 因此，

$$\text{瞬时变化率} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = s'(t).$$

例 1 物理学：速度. 某物体从起点运行 s(英里)，s 是时间 t(小时)的函数，可表示如下：

$$s(t) = 10t^2.$$

a)求时间 $t=2$ 和 $t=5$ 之间的平均速度.

b)求 $t=4$ 时的(瞬时)速度.

148



瞬时速度

解

a)从 $t=2$ 到 $t=5$，$h=3$，所以

$$\frac{\text{英里差}}{\text{小时差}} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{s(2+3)-s(2)}{3}$$
$$= \frac{s(5)-s(2)}{3} = \frac{10 \cdot 5^2 - 10 \cdot 2^2}{3} = 70(\text{英里} / \text{小时})$$

b)瞬时速度可以表示成

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = s'(t).$$

从 2.5 节学到的求导方法知道如何快捷地求这个极限. 于是 $s'(t)=20t$，且

$$s'(4) = 20 \cdot 4 = 80(\text{英里} / \text{小时})$$ ■

一般地，用字母 v 表示速度. 于是有下述定义.

定义

$$\text{速度} = v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = s'(t).$$

速度的变化率称为**加速度**(acceleration). 假定汽车 A 在 8.4 秒钟内达到 65 英里/小时的速率，而汽车 B 在 8 秒钟内达到 65 英里/小时的速率，则 B 比 A 的加速度要快. 一般用 a 表示加速度. 因此，下述定义是适当的.

定义

$$\text{加速度} = a(t) = v'(t).$$

例 2 物理学：距离、速度与加速度. 对于 $s(t)=10t^2$，求 $v(t)$ 和 $a(t)$，其中 s 是从起点开始的距离，以英里为单位，t 以小时为单位. 然后，求 $t=4$ 小时的距离、速度和加速度.

解 我们有

$v(t)=s'(t)=20t$，

$a(t)=v'(t)=20$.

于是 $s(4)=10(4)^2=160$(英里)，

$v(4)=20(4)=80$(英里/小时)，

$a(4)=20$(英里/小时^2).

如果这个距离函数应用于交通工具，则在 $t=4$ 小时时，距离是 160 英里，速度或瞬时速度是 80 英里/小时，而加速度是每小时 20 英里，简写成 20 英里/小时^2. ■ 149

一般地，导数给出瞬时变化率.

定义 如果 y 是 x 的函数，$y=f(x)$，则 **y 关于 x 的(瞬时)变化率**可以表示成导数

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

例 3 生命科学：癌肿瘤的体积. 癌肿瘤的球形体积 V 可以表示成

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2007/08/16

其中 r 是肿瘤的半径(单位：厘米).

a)求体积关于半径的变化率.

b)求体积在 $r=1.2$ 厘米的变化率.

解

a) $\frac{dV}{dr}=V'(r)=3\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi r^2=4\pi r^2$.

(这正是球面面积. 试说明这是有道理的.)

b) $V'(1.2)=4\pi(1.2)^2=5.76\pi\approx18$(厘米²).

体积关于半径的变化率是半径每改变1厘米，体积改变18厘米³. ■

例4 生命科学：种群增长. 一个细菌种群的初始总数是10 000. t 小时后，该种群已增长到数量 $P(t)$，且可表示成

$$P(t)=10\,000(1+0.86t+t^2).$$

这也称为**增长率**(growth rate).

a)求种群 P 关于时间 t 的变化率. 这也称为**增长率**(growth rate).

b)求5小时后该细菌种群的总数. 另外求 $t=5$ 时的增长率.

解 a)已知 $P(t)=10\,000+8\,600t+10\,000t^2$，则

$$P'(t)=8\,600+20\,000t.$$

b) $t=5$ 时该细菌种群的总数是

[150] $$P(5)=10\,000+8\,600\cdot5+10\,000\cdot5^2=303\,000.$$

$t=5$ 时的增长率是

$$P'(5)=8\,600+20\,000\cdot5=108\,600(\text{个细菌}/\text{小时}).$$

因此，在 $t=5$ 时，该细菌种群的总数是303 000，且该种群以每小时繁殖108 600个细菌的增长率在增长. ■

商业与经济中的变化率

在研究商业与经济的过程中，常常要关心一些随着产量的增加而变化的量，如成本、收益和利润等. 特别地，我们关心称为**边际**(marginal[⊖])成本或**边际利润**(或诸如此类)的量. 用这个名词表示有关量的变化率. 因此，如果

$C(x)=$ 生产 x 件某产品的总成本(通常在某段时间内考虑该问题)，

则

$C'(x)=$ **边际成本**

$=$ 总成本关于生产的产品件数 x 的变化率.

我们来思考一下这些解释. 生产5件产品的总成本是 $C(5)$. 变化率 $C'(5)$ 是在生产过程中已生

⊖ "marginal"一词来自 the Marginalist School of Economic Thought(经济思想边际主义学院)，它源于奥地利，该学院注重运用数学和统计学来研究经济学.

产出5件产品的那个阶段的每件产品的成本. 在下面的例子中可以看出，这每件产品的成本不包括固定成本.

$$C(x)=\underbrace{(x^2+4x)}_{\text{变动成本}}+\underbrace{10\,000}_{\text{固定成本(常数)}}$$

因为常函数的导数是0，所以

$$C'(x)=2x+4.$$

这说明了一条经济原理，该原理指出，一个公司的固定成本对边际成本没有影响.

下面是一些其他的边际函数. 我们知道

$R(x)=$ 从销售 x 件产品所得到的总收益.

于是

$R'(x)=$ **边际收益** $=$ 总收益关于销售的产品件数 x 的变化率.

另外，还有

$P(x)=$ 从生产和销售 x 件产品得到的总利润 $=R(x)-C(x)$. [151]

因而

$P'(x)=$ **边际利润**

$=$ 总利润关于生产和销售的产品件数 x 的变化率

$=R'(x)-C'(x)$.

例5 商业：边际收益、边际成本和边际利润. 已知

$$R(x)=50x \quad \text{和} \quad C(x)=2x^3-12x^2+40x+10,$$

求下列每个量.

a)总利润 $P(x)$.

b)总收益 $R(2)$，总成本 $C(2)$，以及从生产和销售2件产品得到的总利润 $P(2)$.

c)边际收益 $R'(x)$，边际成本 $C'(x)$ 和边际利润 $P'(x)$.

d)边际收益 $R'(2)$，边际成本 $C'(2)$，以及生产和销售2件产品的边际利润.

解

a)总利润 $P(x)=R(x)-C(x)$

$=50x-(2x^3-12x^2+40x+10)$

$=-2x^3+12x^2+10x-10$.

b) $R(2)=50\cdot2=100$(从销售2件产品得到的总收益)；

$C(2)=2\cdot2^3-12\cdot2^2+40\cdot2+10=58$(生产2件产品的总成本)；

$P(2)=R(2)-C(2)=100-58=42$(从生产和销售出2件产品得到的总利润).

c)边际收益 $R'(x)=50$；

边际成本 $C'(x)=6x^2-24x+40$；

2007/08/16

边际利润 $P'(x)=R'(x)-C'(x)$
$=50-(6x^2-24x+40)$
$=-6x^2+24x+10.$

d) $R'(2)=50$(每件)；
$C'(2)=6\cdot 2^2-24\cdot 2+40=16$(每件)；
$P'(2)=50-16=34$(每件).

注意，在本例中，边际收益是常函数. 不管生产和销售出多少件产品，每件产品的收益始终如一. 当然，情况不可能总是这样. 另外要注意，$C'(2)$或每件 16 美元不是每件的平均成本，平均成本可以写成

$$\frac{\text{生产 2 件产品的总成本}}{2\text{ 件}}=\frac{58}{2}=29(\text{美元 / 件}).$$ ■

上机技术演练

商业：边际收益、边际成本和边际利润

练习

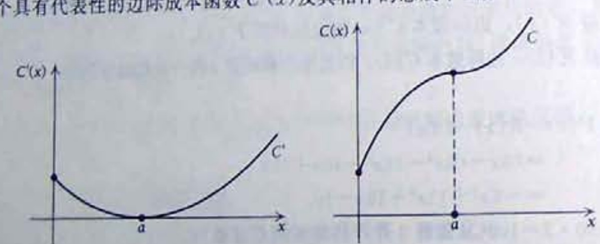
1. 利用视窗[0, 100, 0, 2 000]作下列总收益函数和总成本函数的图形：
$$R(x)=50x-0.5x^2,$$
$$C(x)=10x+3.$$
然后求 $P(x)$ 且用同一视窗作 $P(x)$ 的图形. 求 $R'(x)$，$C'(x)$ 和 $P'(x)$，且用视窗[0, 60, 0, 60]作它们的图形. 然后求 $R(40)$，$C(40)$，$P(40)$，$R'(40)$，$C'(40)$ 和 $P'(40)$. 哪个边际函数是常函数？

152

一般地，有下述定义.

定义 $A(x)$ = 生产 x 件产品的**平均成本**(average cost) $=\frac{C(x)}{x}$.

考察一个具有代表性的边际成本函数 $C'(x)$ 及其相伴的总成本函数 C.



边际成本一般随着生产量的增加而减少直到边际成本在 a 处达到某个极小值，然后它再增加.（这或许是由于支付加班费或添置更多的机器等因素所引起的.）因为 $C'(x)$ 表示 $C(x)$ 的斜率，并且一直到 a，$C'(x)$ 为正且不断变小，所以，当 x 从 0 变到 a 时，$C(x)$ 的图形朝下弯曲. 过了 a 值后，图形朝上弯曲.

习题 2.6

1. 已知
$$s(t)=t^3+t,$$
其中，s 的单位是英尺，而 t 的单位是秒，求下列每个量.
a) $v(t)$　　b) $a(t)$
c) $t=4$ 秒时的速度和加速度.

2. 已知
$$s(t)=3t+10,$$
其中，s 的单位是英里，而 t 的单位是小时. 求下列每个量.
a) $v(t)$　　b) $a(t)$
c) $t=2$ 小时时的速度和加速度.
当距离函数由线性函数给出时，它是匀速运动(uniform motion).
*d) 匀速运动用术语速度和加速度来描述意味着什么？

3. 已知
$$s(t)=-10t^2+2t+5,$$
其中，s 的单位是米，而 t 的单位是秒，求下列每个量.
a) $v(t)$　　b) $a(t)$
c) $t=1$ 秒时的速度和加速度.

4. 已知
$$s(t)=t^2-\frac{1}{2}t+3,$$
其中，s 的单位是米，而 t 的单位是秒，求下列每个量.
a) $v(t)$　　b) $a(t)$
c) $t=1$ 秒时的速度和加速度.

应用

商业与经济

5. 销售. 设 $N(x)$ 为一个年度卖出的计算机的台数，当时的价格是每台 x 美元. 如果 $N(1\ 000)=500\ 000$ 且 $N'(1\ 000)=-100$，说明会出现什么情况.

6. 销售. 如果第 5 题中的价格升至 1 025 美元，计算卖出的计算机的台数.

7. 边际收益、边际成本和边际利润. 已知
$$R(x)=5x,$$
$$C(x)=0.001x^2+1.2x+60,$$
求下列每个量.
a) $P(x)$.
b) $R(100)$，$C(100)$ 和 $P(100)$.
c) $R'(x)$，$C'(x)$ 和 $P'(x)$.
d) $R'(100)$，$C'(100)$ 和 $P'(100)$.
*e) 口头描述 b) 和 d) 中每个量的意义.

8. 边际收益、边际成本和边际利润. 已知
$$R(x)=50x-0.5x^2 \quad \text{和} \quad C(x)=4x+10,$$
求下列每个量.
a) $P(x)$.
b) $R(20)$，$C(20)$ 和 $P(20)$.
c) $R'(x)$，$C'(x)$ 和 $P'(x)$.
d) $R'(20)$，$C'(20)$ 和 $P'(20)$.

9. 广告. 某公司预计，在花费 a 美元做广告以后，公司将卖出 N 件产品，其中
$$N(a)=-a^2+300a+6,$$
且 a 以千美元计.



a) 卖出的件数关于花在广告上的总费用的变化率是多少？
b) 在花出 10 000 美元广告费以后将卖出多少件产品？
c) 在 $a=10$ 处的变化率是多少？
*d) 说明你对 a) 和 c) 所做解答的意义.

10. 销售. 某公司确定，在推销一种产品 t 个月后，每月的销售额(千美元)可表示成
$$S(t)=2t^3-40t^2+220t+160.$$
a) 分别求 1 个月，4 个月，6 个月，9 个月，20 个月后的每月销售额.

2007/08/16

b)求变化率 $S'(t)$.

c)分别求在 $t=1$, $t=4$, $t=6$, $t=9$, $t=20$ 处的变化率.

*d)解释该公司的 CEO 为什么不必为 6 月份的销售额下降而发愁.

11. 边际生产率. 职工的月生产率 M(以生产的产品数计)是可以用其供职的年数 t 的函数来表示的. 对某个产品，其生产率函数可表示为

$$M(t)=-2t^2+100t+180.$$

a)分别求职工供职 5 年, 10 年, 25 年和 45 年后的生产率.

b)求边际生产率.

c)分别求 $t=5$, $t=10$, $t=25$ 和 $t=45$ 处的边际生产率.

*d)说明职工的边际生产率可能与其经验和年龄有何关系.

12. 供给. 某件产品的供给函数可表示为

$$S(p)=0.08p^3+2p^2+10p+11,$$

其中 S 是以价格 p(美元)卖出的产品数(见 1.5 节).

a)求供给关于价格的变化率 dS/dp.

b)当单价为 3 美元时，销售商能卖出多少件产品?

c)在 $p=3$ 处的变化率是多少?

*d)你能预测，对于 p 的值，dS/dp 是正还是负吗? 为什么?

13. 需求. 某个产品的需求函数可以表示为

$$D(p)=100-\sqrt{p},$$

其中 D 是以价格 p(美元)购买的产品数(见 1.5 节).

a)求购买量关于价格的变化率 dD/dp.

b)当单价是 25 美元时，消费者将要买多少件产品?

c)在 $p=25$ 处的变化率是多少?

*d)你能预测，对于 p 的值，dD/dp 是正还是负吗? 为什么?

14. 棒球大联赛的票价. 这个问题可以参考习题 1.2 第 51 题中的模型，即

$$p(x)=9.41-0.19x+0.09x^2.$$

a)求该平均票价关于年的变化率 dp/dx.

b)2000 年的平均票价是多少?

c)2000 年的平均票价的变化率是多少?

d)对于 x 的哪些值，你能预测 dp/dx 是正的? 说明理由.

15. 边际成本. 假定生产 x 台收音机的每日成本(单位: 美元)是

$$C(x)=0.002x^3+0.1x^2+42x+300,$$

且平常每日生产 40 台收音机.

a)平常每日成本是多少?

b)每日增加产量至 41 台的附加每日成本是多少?

c)当 $x=40$ 时，边际成本是多少?

d)计算每日增加产量至 42 台的每日成本.

16. 边际利润. 假定一家汽车经销商卖出 x 辆汽车的每日利润(单位: 美元)是

$$P(x)=-0.006x^3-0.2x^2+900x-1200,$$

并且平常每日卖出 60 辆.

a)平常每日利润是多少?

b)假如经销商每日只能卖出 59 辆，其利润损失多少?

c)当 $x=60$ 时，边际成本是多少?

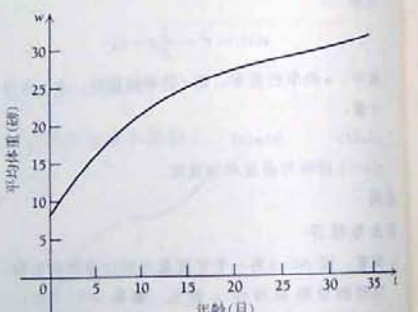
d)如果每日销售增至 63 辆，计算其每日利润.

生命科学与物理学

17. 婴儿的成长. 年龄在 0 到 36 个月之间的男婴的平均体重可以近似表示成函数

$$w(t)=8.15+1.82t-0.0596t^2+0.000758t^3,$$

其中，t 以月为单位，而 w 以磅为单位.



资料来源: Centers for Disease Control. Developed by the National Center for Health Statistics in collaboration with the National Center for Chronic Disease Prevention and Health Promotion(2000).

试用这个近似表达式求男婴与其平均体重有关的下列各量:

a)体重关于时间的变化率.

b)男婴出生时的体重.

c)男婴出生时体重的变化率.

d)男婴在它的第一个生日时的体重.

e)在男婴的第一个生日时，其体重关于时间的变化率.

f)男婴出生后第一年间其体重的平均变化率.

18. 在薄冰上的刹车距离. 标准轮胎(以某个固定速度行驶)在薄冰上的刹车距离可以用气温 F 的线性函数表示成

$$D(F)=2F+115,$$

其中，当气温 F 用华氏温度时，$D(F)$ 是刹车距离，单位为英尺.

a)求刹车距离关于气温 F 的变化率.

*b)说明你对 a)中所做解答的意义.

19. 正在愈合的伤口. 一个正在愈合的伤口的圆周 C(厘米)可表示成

$$C(r)=2\pi r,$$

其中 r 是半径(厘米).

a)求其圆周关于半径的变化率.

*b)说明你对 a)中所做解答的意义.

20. 正在愈合的伤口. 一个正在愈合的伤口的圆形面积 A(平方厘米)可表示成

$$A(r)=\pi r^2,$$

其中 r 是半径(厘米).

a)求其面积关于半径的变化率.

*b)说明你对 a)中所做解答的意义.

21. 患病期间的体温. 一个人在患病期间的体温可表示成

$$T(t)=-0.1t^2+1.2t+98.6,$$

其中 T 是在时间 t(天)的华氏体温.

a)求体温关于时间的变化率.

b)求 $t=1.5$ 天时的体温.

c)求 $t=1.5$ 天时的变化率.

*d)为什么 $T'(x)$ 的正负号会引起医生的注意?

22. 血压. 对于剂量为 x 立方厘米(cc)的一种药物，所引起的血压 B 可近似地表示成

$$B(x)=0.05x^2-0.3x^3.$$

a)求血压关于剂量的变化率. 这个变化率常常称为药的敏感度.

*b)说明你对 a)所做解答的意义.

23. 动物的地盘. 某种动物的地盘 T 是指它的防护区域或专有区域. 该区域的面积 T 可用动物的体重 W 近似地表示成

$$T=W^{1.41}$$

(见 1.5 节).

a)求 dT/dW.

*b)说明你对 a)所做解答的意义.



这些熊可能在确定其地盘

24. 动物的栖息地范围. 某种动物的栖息地范围 H 是动物为自己设定的活动区域. 该区域的面积可用动物的体重近似地表示成

$$H=W^{1.41}$$

(见 1.5 节).

a)求 dH/dW.

*b)说明你对 a)所做解答的意义.

25. 敏感度. 人体对剂量 Q 的药物的反应 R 常常表示成一般函数

$$R(Q)=Q^2\left(\frac{k}{2}-\frac{Q}{3}\right),$$

其中，如果反应是指血压变化或体温变化，则 k 为常数且 R 以毫米为单位. 其变化率 dR/dQ 定义为敏感度.

a)求敏感度函数.

*b)说明你对 a)所做解答的意义.

社会科学

26. 人口增长率. 某个城市的人口从最初的 100 000 人增加到数量 P 可表示成

$$P(t)=100\,000+2\,000t^2,$$

其中 t 以年为单位.

a)求其增长率.

b)求 10 年后($t=10$)该城市的人口数.

c)… 的人口增长率.

2007/08/16

* d)说明你对 a)和 c)所做解答的意义.

27. 女性新婚的平均年龄. 女性新婚的平均年龄可近似地表示成线性函数

$$A(t) = 0.08t + 19.7,$$

其中 $A(t)$ 是 1950 年以后的第 t 年的女性平均年龄.

a)求平均年龄 A 关于时间 t 的变化率.

* b)说明你对 a)所做解答的意义.

一般兴趣

28. 眺望地平线. 某人从(海拔)高度 h(英尺)能够看到地平线的视野 V 或距离(英里)可以表示成

$$V = 1.22\sqrt{h}.$$

a)求 V 关于 h 的变化率.

b)这人从 40 000 英尺高的飞机窗口能够看到地平线的视野有多远?

c)求 $h=40\ 000$ 处的变化率.

* d)说明你对 a)和 c)所做解答的意义.

综合题

* 29. 说明并比较平均变化率和瞬时变化率.

* 30. 讨论函数在点 x 处的导数的多种解释，能说多少就说多少.

上机技术演练

在 31~34 题中，作出总收益函数和总成本函数的图形，然后作出边际收益函数和边际成本函数的图形.

31. $R(x)=50x-0.5x^2$，$C(x)=4x+10$

32. $R(x)=5x$，$C(x)=0.001x^2+1.2x+60$

33. $R(x)=9x$，$C(x)=x^3-6x^2+15x$

34. $R(x)=50x-0.5x^2$，$C(x)=10x+3$

2.7 求导法则：乘积法则与商法则

要点

- 利用乘积法则和商法则求导数.

乘积法则

和的导数等于导数的和，但是乘积的导数不等于导数的乘积. 为了弄清这一事实，考虑 x^2 和 x^5. 它们的乘积是 x^7，且该乘积的导数是 $7x^6$. x^2 和 x^5 的导数分别是 $2x$ 和 $5x^4$，而这两个导数的乘积是 $10x^5$，它不等于 $7x^6$.

下面的定理是关于乘积的求导法则.

定理 5　乘积法则

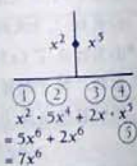
假定 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$，其中，$f(x)$是其第一个因子，而 $g(x)$是其第二个因子. 则

153 ~ 157

$$F'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]+\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]\cdot g(x).$$

乘积的导数等于第一个因子乘第二个因子的导数，加上第一个因子的导数乘第二个因子.

现在对 $x^2\cdot x^5$ 来验证这个法则. 共有五个步骤.



1. 写下第一个因子.
2. 把它乘以第二个因子的导数.
3. 写下第一个因子的导数.
4. 把它乘以第二个因子.
5. 第(1)步和第(2)步的结果加上第(3)步和第(4)步的结果.

例 1 求 $\frac{d}{dx}[(x^4-2x^3-7)(3x^2-5x)]$.

解 根据乘积法则有

$$\frac{d}{dx}(x^4-2x^3-7)(3x^2-5x) = (x^4-2x^3-7)(6x-5)+(4x^3-6x^2)(3x^2-5x).$$

注意，可以先求多项式的乘积然后再求其导数，这可以避免使用乘积法则，但会增加计算量. ■

例 2 对于 $F(x)=(x^2+4x-11)(7x^3-\sqrt{x})$，求 $F'(x)$.

解 再写一遍 $F(x)$，

$$F(x) = (x^2+4x-11)(7x^3-x^{1/2}).$$

于是，利用乘积法则有

$$F'(x) = (x^2+4x-11)\left(21x^2-\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)+(2x+4)(7x^3-x^{1/2}).$$ ■

商法则

商的导数不等于导数的商. 为了说明其原由，考虑 x^5 和 x^2. 商 x^5/x^2 是 x^3，且该商的导数是 $3x^2$. x^5 和 x^2 的导数分别是 $5x^4$ 和 $2x$，这两个导数的商 $5x^4/2x$ 等于$(5/2)x^3$，它不等于 $3x^2$.

商的求导法则如下所述.

定理 6　商法则

如果

$$Q(x) = \frac{N(x)}{D(x)},$$

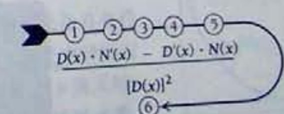
则

$$Q'(x) = \frac{D(x)\cdot N'(x)-D'(x)\cdot N(x)}{[D(x)]^2}.$$ 158

商的导数等于分母乘分子的导数，减去分母的导数乘分子，再都除以分母的平方.

(如果把分子中的函数看作第一个函数，而把分母中的函数看作第二个函数，则可以把商法则改说成“第二个函数乘第一个函数的导数减去第二个函数的导数乘第一个函数，然后都除以第二个函数的平方”.)

商法则的图解如右下图所示.



1. 写下分母.
2. 把分母乘以分子的导数.
3. 写一个减号.
4. 写下分母的导数.
5. 把它乘以分子.
6. 除以分母的平方.

2007/08/16

例3 对于 $Q(x)=x^5/x^3$，求 $Q'(x)$.

解

$$Q'(x)=\frac{x^3\cdot 5x^4-3x^2\cdot x^5}{(x^3)^2}=\frac{5x^7-3x^7}{x^6}=\frac{2x^7}{x^6}=2x.$$

例4 求 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x^3}$ 的导数.

解

$$f'(x)=\frac{x^3\cdot 2x-3x^2(1+x^2)}{(x^3)^2}=\frac{2x^4-3x^2-3x^4}{x^6}=\frac{-x^4-3x^2}{x^6}$$

159

$$=\frac{-x^2\cdot x^2-3x^2}{x^6}=\frac{x^2(-x^2-3)}{x^2\cdot x^4}=\frac{-x^2-3}{x^4}.$$

例5 求 $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ 的导数.

解 我们有

$$f'(x)=\frac{(x-1)(2x-3)-1(x^2-3x)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-5x+3-x^2+3x}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}.$$

没有必要把 $(x-1)^2$ 写成 x^2-2x+1.

上机技术演练

用图示法验证导数 考察例5中的导数. 为了验证其答案，首先输进函数：

$$y_1=\frac{x^2-3x}{x-1}.$$

然后输进可能的导数：

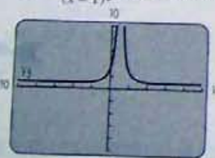
$$y_2=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}.$$

对于第三个函数，输进数值导数

$$y_3=\text{nDeriv}(Y_1,x,x).$$

其次，不考虑 y_1，而作 y_2 和 y_3 的图形. 我们采用不同的图形页面，以便在每个图形出现在屏幕上时可以看到其图形.

$y_2=\dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$, $y_3=$ nDeriv (Y_1, x, x)



因为两个图形看上去重合，看来有 $y_2=y_3$，因而验证了其结果. 但是，这只能看作是一个局部验证，因为可能不在视窗内的一个点处，两个图形不重合.

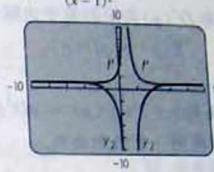
也可以利用表格来验证 $y_2=y_3$.

X	Y2	Y3
5.97	1.081	1.081
5.98	1.0806	1.0806
5.99	1.0803	1.0803
6	1.08	1.08
6.01	1.0797	1.0797
6.02	1.0794	1.0794
6.03	1.079	1.079

X=5.97

假定因计算不正确而得到其导数是 $y_2=(x^2-2x-8)/(x-1)^2$. 在下图中看到，两个图形是不一致的.

$y_2=\dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$



练习

1. 对于函数

$$f(x)=\frac{x^2-4x}{x+2},$$

用图形和表格来确定下列哪个函数可能是正确的导数.

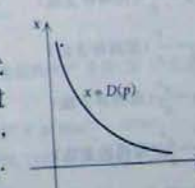
a) $f'(x)=\dfrac{-x^2-4x-8}{(x+2)^2}$

b) $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+8}{(x^2-4x)^2}$

c) $f'(x)=\dfrac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$

2～5. 用绘图器验证例1～例4的结果. 160

一个应用



前面已经讨论过，总收益函数随卖出的产品数 x 而变化是具有代表性的. 现在考察这个函数能由什么来确定. 回顾在1.5节中讨论过的消费者的需求函数或价格函数 $x=D(p)$，当产品单价为 p 美元时，$D(p)$ 是消费者愿意购买该产品的数量 x. 这是一个典型的递减函数. 于是，当单价为 p 美元时，总收益是

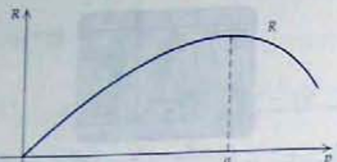
$$R(p)=(\text{卖出的产品数})\cdot\text{单价}$$

2007/08/16

或

$$R(p)=x\cdot p=D(p)\cdot p=pD(p).$$

具有代表性的收益函数的图形如下图.



当其价格上涨时，$D(p)$下降. 因为有乘积 $p\cdot D(p)$，当 p 上涨时，收益常常会上升一段时间，但是当 $D(p)$变得越来越小时，收益又逐渐下降.

利用乘积法则，可以得到用 p 和 $D'(p)$表示的关于边际收益 $R'(p)$的表达式. 如果

$$R(p)=pD(p),$$

则

$$R'(p)=p\cdot D'(p)+1\cdot D(p)=pD'(p)+D(p).$$

你不必记这个公式. 若有必要，只需再用一下乘积法则.

上机技术演练

商业：需求与收益

练习

1. 某公司确定，某产品的需求函数可表示为 $D(p)=200-p$. 求总收益 $R(p)$
161 的表达式. 然后求边际收益 $R'(p)$. 作上述三个函数的图形.

习题 2.7

求导数.

1. $y=x^3\cdot x^8$(用两种方法)
2. $y=x^4\cdot x^3$(用两种方法)
3. $y=\frac{-1}{x}$(用两种方法)
4. $y=\frac{1}{x}$(用两种方法)
5. $y=\frac{x^8}{x^5}$(用两种方法)
6. $y=\frac{x^7}{x^2}$(用两种方法)
7. $y=(8x^5-3x^2+20)(8x^4-3\sqrt{x})$
8. $f(x)=(7x^6+4x^3-50)(9x^{10}-7\sqrt{x})$
9. $f(x)=x(300-x)$(用两种方法)
10. $f(x)=x(400-x)$(用两种方法)
11. $f(x)=(x+5)(x-5)$(用两种方法)
12. $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$(用两种方法)
13. $f(x)=(4\sqrt{x}-6)(x^3-2x+4)$
14. $f(x)=(\sqrt[3]{x}-5x^2+4)(4x^2+11x-5)$
15. $f(x)=(x+3)^2$
[提示：$(x+3)^2=(x+3)(x+3)$.]
16. $f(x)=(5x-4)^2$
17. $f(x)=(x^3-4x)^2$
18. $f(x)=(3x^2-4x+5)^2$

19. $f(x)=5x^{-3}(x^4-5x^3+10x-2)$
20. $f(x)=6x^{-4}(6x^3+10x^2-8x+3)$
21. $f(x)=\left(x+\frac{2}{x}\right)(x^2-3)$
22. $f(x)=(4x^3-x^2)\left(x-\frac{5}{x}\right)$
23. $f(x)=\frac{x}{300-x}$
24. $f(x)=\frac{x}{400-x}$
25. $f(x)=\frac{3x-1}{2x+5}$
26. $f(x)=\frac{2x+3}{x-5}$
27. $y=\frac{x^2+1}{x^3-1}$
28. $y=\frac{x^3-1}{x^2+1}$
29. $y=\frac{x}{1-x}$
30. $y=\frac{x}{3-x}$
31. $y=\frac{x-1}{x+1}$
32. $y=\frac{x+2}{x-2}$
33. $f(x)=\frac{x}{x^{-1}+1}$
34. $f(x)=\frac{x^{-1}}{x+x^{-1}}$
35. $f(x)=\frac{1}{x-3}$
36. $f(x)=\frac{1}{x+2}$
37. $f(x)=\frac{3x^2+2x}{x^2+1}$
38. $f(x)=\frac{3x^2-5x}{x^2-1}$
39. $f(x)=\frac{3x^2-5x}{x^8}$(用两种方法)
40. $f(x)=\frac{3x^2+2x}{x^5}$(用两种方法)
41. $g(x)=\frac{4x+3}{\sqrt{x}}$
42. $g(x)=\frac{6x^2-3x}{3\sqrt{x}}$

43~84. 用绘图器验证 1~42 题的结果.

85. 设 $f(x)=\frac{x}{x+1}$和 $g(x)=\frac{-1}{x+1}$.
a)计算 $f'(x)$.
b)计算 $g'(x)$.
*c)比较 a)和 b)中的答案，并且作出解释.

86. 设 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$和 $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$.
a)计算 $f'(x)$.
b)计算 $g'(x)$.
*c)比较 a)和 b)中的答案，并且作出解释.

87. 分别求 $y=8/(x^2+4)$ 的图形在点(0，2)和(−2，1)处的切线方程.

88. 分别求 $y=\sqrt{x}/(x+1)$的图形在 $x=1$ 和 $x=\frac{1}{4}$处的切线方程.

89. 分别求 $y=x^2+3/(x-1)$的图形在 $x=2$ 和 $x=3$ 处的切线方程.

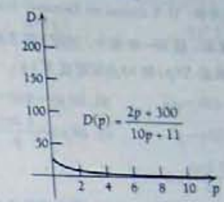
90. 分别求 $y=4x/(1+x^2)$的图形在点(0，0)和(−1，−2)处的切线方程.

应用

商业与经济

91. 边际需求. 某产品的需求函数可表示为

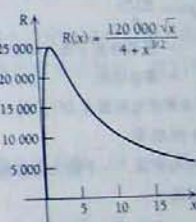
$$D(p)=\frac{2p+300}{10p+11}.$$



a)求边际需求 $D'(p)$.
b)求 $D'(4)$.

92. 边际收益. 某公司销售一种自己动手装订的书. 公司发现，从卖出 x 千册书所得到的收益可以表示成

$$R(x)=\frac{120\,000\sqrt{x}}{4+x^{3/2}},$$



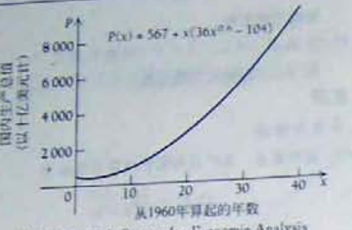
a)求边际收益 $R'(x)$.
b)求 $R'(4)$.

93. 国内生产总值. 美国国内生产总值(以 10 亿美元计)可以用函数

$$P(x)=567+x(36x^{0.6}-104)$$

来建模，其中 x 是从 1960 年算起的年数.
a)求 $P'(x)$.
b)求 $P'(40)$.
*c)口头说明 $P'(40)$的意义.

2007/08/16



资料来源：U. S. Bureau for Economic Analysis

边际收益. 在94～98题中，给定了需求函数$D(p)$. 试求a)总收益$R(p)$和b)边际收益$R'(p)$.

94. $D(p)=100-\sqrt{p}$
95. $D(p)=400-p$
96. $D(p)=500-p$
97. $D(p)=\frac{4\,000}{p}+3$
98. $D(p)=\frac{3\,000}{p}+5$

99. 边际平均成本. 在2.6节中，我们用总成本$C(x)$定义了生产x件产品的平均成本，并且表示成

$$A(x)=\frac{C(x)}{x}.$$

试用商法则求边际平均成本$A'(x)$的一般表达式.

100. 边际需求. 在这一节里，我们确定了

$$R(p)=pD(p).$$

因而

$$D(p)=\frac{R(p)}{p}$$

= 当单价是p美元时卖出的产品数

= 需求函数.

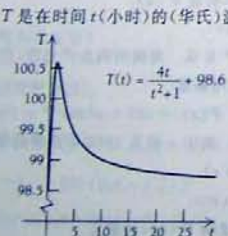
试用商法则求边际需求$D'(p)$的一般表达式.

生命科学与物理学

101. 患病期间的体温. 一个病人在患病期间的体温T可表示成

$$T(t)=\frac{4t}{t^2+1}+98.6,$$

其中T是在时间t(小时)的(华氏)温度.



a)求温度关于时间的变化率.

b)求在$t=2$小时时的温度.

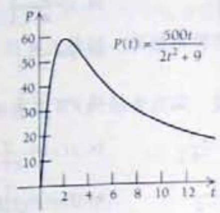
c)求在$t=2$小时时的变化率.

社会科学

102. 人口增长. 某个小城市的人口P(以千人计)可表示成

$$P(t)=\frac{500t}{2t^2+9},$$

其中t是时间(以月计).



a)求增长率.

b)求12个月后的人口.

c)求$t=12$月时的人口增长率.

综合题

求导数.

103. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x}-5}$
104. $g(t)=\frac{1+\sqrt{t}}{t^2+3}$
105. $f(v)=\frac{3}{1+v+v^2}$
106. $g(z)=\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$
107. $p(t)=\frac{t}{1-t+t^2-t^3}$
108. $f(x)=\frac{\frac{2}{3x}-1}{\frac{3}{x^2}+5}$
109. $h(x)=\frac{x^3+5x^2-2}{\sqrt{x}}$
110. $y(t)=5t(t-1)(2t+3)$
111. $f(x)=x(3x^2+6x-2)(3x^4+7)$
112. $g(x)=(x^3-8)\cdot\frac{x^2+1}{x^2-1}$
113. $f(t)=(t^5+3)\cdot\frac{t^3-1}{t^2+1}$
114. $f(x)=\frac{(x^2+3x)(x^5-7x^2-3)}{x^4-3x^3-5}$

115. $f(x)=\frac{(2x^3+3)(4x^3-7x+2)}{x^3-2x^2+9}$
116. $s(t)=\frac{5t^4-2t^3}{(t^2-3)(t^4+7)}$

*117. 试建立关于三个函数的乘积的求导法则. 口头描述这个法则.

上机技术演练

对于118～123题中的每个函数，作f和f'的图形. 然后计算在其上有水平切线的点.

118. $f(x)=x^2(x-2)(x+2)$
119. $f(x)=\left(x+\frac{2}{x}\right)(x^2-3)$
120. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$
121. $f(x)=\frac{0.3x}{0.04+x^2}$
122. $f(x)=\frac{0.01x^2}{x^4+0.0255}$
123. $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$

124. 用图示法判定下列哪个函数可能是123题的函数的正确导数.

$$y_1=\frac{2}{x},\qquad y_2=\frac{4-4x}{x^2+1},$$

$$y_3=\frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2},\qquad y_4=\frac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}.$$

2.8 链式法则

要点

- 求函数的复合.
- 用广义幂法则和链式法则求导.

广义幂法则

如何求一些更复杂的函数的导数？例如，求

$$y=(1+x^2)^3,$$
$$y=(1+x^2)^{89},$$

或

$$y=(1+x^2)^{1/3}$$

的导数.

对于$(1+x^2)^3$，可以先展开后求导. 虽然这个办法对于$(1+x^2)^{89}$还是可行的，但肯定是很费时的，而这种展开对$(1+x^2)^{1/3}$就行不通了. 在尚未得知新的求导法则时，我们可能猜测，函数$y=(1+x^2)^3$的导数是

$$3(1+x^2)^2. \tag{1}$$

为了验证其是否正确，先展开$(1+x^2)^3$，然后再求导. 由代数公式可知，$(a+h)^3=a^3+3a^2h+3ah^2+h^3$，因而 162～165

$$(1+x^2)^3=1^3+3\cdot1^2\cdot(x^2)^1+3\cdot1\cdot(x^2)^2+(x^2)^3$$
$$=1+3x^2+3x^4+x^6.$$

(也可以先求$(1+x^2)^2$的展开式，然后再乘以$(1+x^2)$同样得到上述公式.)由此可得

$$\frac{dy}{dx}=6x+12x^3+6x^5=(1+2x^2+x^4)6x=3(1+x^2)^2\cdot2x. \tag{2}$$

把这个表达式与表达式(1)进行比较，发现用幂法则对这样的幂函数求导是不合适的. 注意到实际导数即表达式(2)中的因子$2x$是"内部"函数$1+x^2$的导数. 这个导数与下述新法则是一致的.

定理7 广义幂法则

设$g(x)$是x的函数，则对任意实数k，有

2007/08/16

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^k = k[g(x)]^{k-1}\cdot\frac{d}{dx}g(x).$$

现在求$(1+x^3)^5$的导数．可用三个步骤来完成．

$(1+x^3)^5$	1. 心里想着"内部"函数 $1+x^3$.
$5(1+x^3)^4$	2. 求"外部"函数$(1+x^3)^5$的导数.
$5(1+x^3)^4\cdot 3x^2$	3. 乘以"内部"函数的导数.
$=15x^2(1+x^3)^4$	

步骤(3)最容易被忽略．一定不要忘了它！

例 1 求 $f(x)=(1+x^3)^{1/2}$的导数.

解

$$\frac{d}{dx}(1+x^3)^{1/2}=\frac{1}{2}(1+x^3)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 3x^2$$
$$=\frac{1}{2}(1+x^3)^{-1/2}\cdot 3x^2$$
$$=\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$$ ■

上机技术演练

对于例1，作f和f'的图形．用图示法验证例1的结果．

例 2 求 $y=(1-x^2)^3-(1-x^2)^2$ 的导数.

解 这里，我们同时运用差法则与广义幂法则：

$$\frac{dy}{dx}=3(1-x^2)^2(-2x)-2(1-x^2)(-2x).$$ 用广义幂法则对每一项求导

166 因而，

$$\frac{dy}{dx}=-6x(1-x^2)^2+4x(1-x^2)$$
$$=x(1-x^2)[-6(1-x^2)+4]$$ 这里提取公因子 $x(1-x^2)$
$$=x(1-x^2)[-6+6x^2+4]$$
$$=x(1-x^2)(6x^2-2)$$
$$=2x(1-x^2)(3x^2-1).$$ ■

例 3 求 $f(x)=(x-5)^4(7-x)^{10}$的导数.

解 同时运用乘积法则和广义幂法则：

$$f'(x)=(x-5)^4\cdot 10(7-x)^9(-1)+4(x-5)^3(1)(7-x)^{10}$$
$$=-10(x-5)^4(7-x)^9+4(x-5)^3(7-x)^{10}$$
$$=2(x-5)^3(7-x)^9[-5(x-5)+2(7-x)]$$ 提取公因子 $2(x-5)^3(7-x)^9$
$$=2(x-5)^3(7-x)^9[-5x+25+14-2x]$$
$$=2(x-5)^3(7-x)^9(39-7x).$$ ■

例 4 求 $f(x)=\sqrt[4]{\frac{x+3}{x-1}}$的导数.

解 用商法则求内部函数的导数：

$$\frac{d}{dx}\sqrt[4]{\frac{x+3}{x-1}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{1/4}=\frac{1}{4}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{1/4-1}\left[\frac{(x-1)1-1(x+3)}{(x-1)^2}\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{-3/4}\left[\frac{x-1-x-3}{(x-1)^2}\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{-3/4}\cdot\frac{-4}{(x-1)^2}$$
$$=\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{-3/4}\cdot\frac{-1}{(x-1)^2}.$$ ■

函数的复合与链式法则


Jordan YMCA，Marv in Bittinger

广义幂法则是称为链式法则的更一般法则的特殊情形．在讨论它之前，先定义函数的复合．

本书的作者一周三次去当地的YMCA(基督教青年会)锻炼身体．他最近买了一双运动鞋，他发现了鞋盒上如下所示的一个商标．在美国这双鞋所标明的尺码是$11\frac{1}{2}$，与其他国家的尺码不一样．商标底部的各个数码表示五个不同国家中的等长鞋码．



167

这个商标认为，有多个函数可使一个国家的各个鞋码转换为另一个国家的各个鞋码．的确有函数g给出了美国的各鞋码和法国的各鞋码之间的对应关系：

$$g(x)=\frac{4x+92}{3},$$

其中，x是美国的鞋码，而$g(x)$是法国的鞋码．因而美国的鞋码$11\frac{1}{2}$对应于法国的鞋码

$$g(11\tfrac{1}{2})=\frac{4\cdot 11\frac{1}{2}+92}{3},\ 或46.$$

也有函数f给出了法国的各鞋码和日本的各鞋码之间的对应关系．该函数可表示为

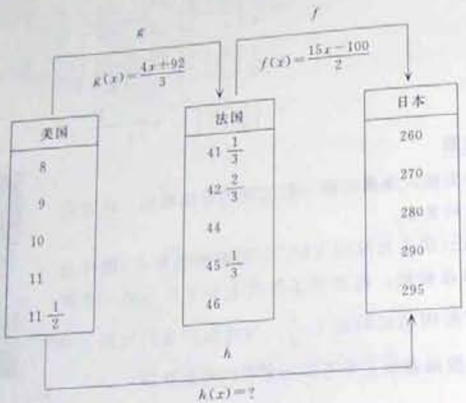
$$f(x)=\frac{15x-100}{2},$$

其中，x是法国的鞋码，而$f(x)$是相应的日本鞋码．因而法国的鞋码46对应于日本的鞋码

2007/08/16

$$f(46)=\frac{15\cdot46-100}{2},\quad 或\ 295.$$

看来有理由断言，美国的鞋码 $11\frac{1}{2}$ 对应于日本的鞋码 295，且有某个函数 h 描述这个对应关系，我们能够求出这个表达式吗？



美国的鞋码 x 对应于法国的鞋码 $g(x)$，其中

168 $$g(x)=\frac{4x+92}{3}.$$

现在 $(4x+92)/3$ 是法国的鞋码．如果用 $(4x+92)/3$ 代替 $f(x)$ 中的 x，就可以得到日本的相应鞋码：

$$f(g(x))=\frac{15\left(\frac{4x+92}{3}\right)-100}{2}$$

$$=\frac{5(4x+92)-100}{2}=\frac{20x+460-100}{2}$$

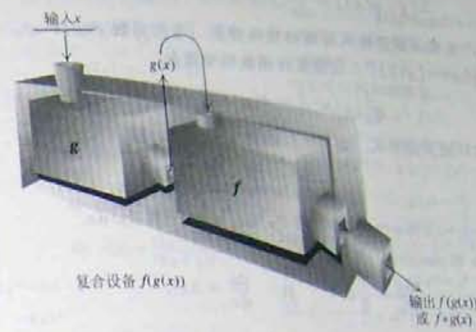
$$=\frac{20x+360}{2}=10x+180.$$

这给出了关于 h 的表达式：$h(x)=10x+180$．因此，美国的鞋码 $11\frac{1}{2}$ 对应于日本的鞋码 $h\left(11\frac{1}{2}\right)=10\left(11\frac{1}{2}\right)+180=295$．函数 h 是 f 与 g 的复合，记作 $f\circ g$．

定义 复合函数 $f\circ g$，即 f 和 g 的复合(composition)，定义为

$$f\circ g(x)=f(g(x)),\quad 或\quad (f\circ g)(x)=f[g(x)].$$

可以把函数的复合形象地显示如下．



为了求 $f\circ g(x)$，只需把 $g(x)$ 代替 $f(x)$ 中的 x．

例5 对于 $f(x)=x^3$ 和 $g(x)=1+x^2$，求 $f\circ g(x)$ 和 $g\circ f(x)$．

解 分别考虑每个函数：

$f(x)=x^3$， 该函数求每个输入的立方

且

$g(x)=1+x^2$． 该函数把 1 加到每个输入的平方上 169

a) $f\circ g$ 是先做 g 要做的事(把 1 加到平方上)，然后做 f 要做的事(求立方)．用 $g(x)$ 代替 x 可以求得 $f(g(x))$：

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(1+x^2)\quad 用\ 1+x^2\ 代替\ x$$
$$=(1+x^2)^3$$
$$=1+3x^2+3x^4+x^6.$$

b) $g\circ f$ 是先做 f 要做的事(求立方)，然后做 g 要做的事(把 1 加到平方上)．用 $f(x)$ 代替 x 可以求得 $g(f(x))$：

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(x^3)\quad 用\ x^3\ 代替\ x$$
$$=1+(x^3)^2$$
$$=1+x^6.$$ ■

例6 对于 $f(x)=\sqrt{x}$ 和 $g(x)=x-1$，求 $f\circ g(x)$ 和 $g\circ f(x)$．

解

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(x-1)=\sqrt{x-1},$$

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=\sqrt{x}-1.$$ ■

注意，一般说来，$f\circ g\neq g\circ f$．用例 5 和例 6 就能说明这一点．

如何求复合函数的导数呢？下面的定理给出了法则．

定理8 链式法则

复合函数 $f\circ g$ 的导数可以表示成

2007/08/16

$$\frac{d}{dx}[f\circ g(x)]=\frac{d}{dx}[f(g(x))]=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

前面说过，广义幂法则是链式法则的特殊情形. 考虑函数 $f(x)=x^k$. 于是，对任何其他函数 $g(x)$，$f\circ g(x)=[g(x)]^k$，且该复合函数的导数是

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^k=k[g(x)]^{k-1}\cdot g'(x).$$

链式法则常常写成其他形式. 设 $y=f(u)$ 且 $u=g(x)$. 则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

例 7　对于 $y=2+\sqrt{u}$ 和 $u=x^3+1$，求 dy/du，du/dx 和 dy/dx.

解　先求 dy/du 和 du/dx：

170 $$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{-1/2}\quad 且\quad \frac{du}{dx}=3x^2.$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 3x^2$$

$$=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}.\qquad 用\ x^3+1\ 代替\ u$$

重要的是能够认识到一个函数可以表示成复合函数.

例 8　求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 使得 $h(x)=f\circ g(x)$：

$$h(x)=(4x^3-7)^6.$$

解　这是 $4x^3-7$ 的 6 次幂. 可以用来复合的两个函数是 $f(x)=x^6$ 和 $g(x)=4x^3-7$. 可以通过作复合来验证：

$$h(x)=f\circ g(x)=f(g(x))=f(4x^3-7)=(4x^3-7)^6.$$

这是该问题最"显而易见"的答案. 可能有其他不太明显的答案——例如，$f(x)=x^3$ 和 $g(x)=(4x^3-7)^2$.

习题 2.8

求导数.

1. $y=(2x+1)^2$（用两种方法）
2. $y=(3-2x)^2$（用两种方法）
3. $y=(1-x)^{55}$
4. $y=(1-x)^{100}$
5. $y=\sqrt{1+8x}$
6. $y=\sqrt{1-x}$
7. $y=\sqrt{3x^2-4}$
8. $y=\sqrt{4x^2+1}$
9. $y=(3x^2-6)^{-40}$
10. $y=(4x^2+1)^{-50}$
11. $y=x\sqrt{2x+3}$
12. $y=x\sqrt{4x-7}$
13. $y=x^2\sqrt{x-1}$
14. $y=x^3\sqrt{x+1}$
15. $y=\frac{1}{(3x+8)^2}$
16. $y=\frac{1}{(4x+5)^2}$
17. $f(x)=(1+x^3)^3-(1+x^3)^4$
18. $f(x)=(1+x^3)^5-(1+x^3)^4$
19. $f(x)=x^2+(200-x)^2$
20. $f(x)=x^2+(100-x)^2$
21. $f(x)=\sqrt{x}+(x-3)^2$
22. $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}+(4-x)^2$
23. $f(x)=(x+6)^{10}(x-5)^4$
24. $f(x)=(x-4)^8(x+3)^9$
25. $f(x)=(x-4)^8(3-x)^4$
26. $f(x)=(x+6)^{10}(5-x)^9$
27. $f(x)=-4x(2x-3)^3$
28. $f(x)=-5x(3x+5)^6$
29. $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
30. $f(x)=\sqrt{\frac{3+x}{2-x}}$
31. $f(x)=\left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)^4$
32. $f(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3$
33. $f(x)=\sqrt[3]{x^4+3x^2}$
34. $f(x)=\sqrt{x^2+5x}$
35. $f(x)=(2x^3-3x^2+4x+1)^{100}$
36. $f(x)=(7x^4+6x^3-x)^{204}$
37. $g(x)=\left(\frac{2x+3}{5x-1}\right)^{-4}$
38. $h(x)=\left(\frac{1-3x}{2-7x}\right)^{-5}$
39. $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$
40. $f(x)=\sqrt[3]{\frac{4-x^3}{1-x^2}}$
41. $f(x)=\frac{(2x+3)^4}{(3x-2)^5}$
42. $f(x)=\frac{(5x-4)^7}{(6x+1)^3}$
43. $f(x)=12(2x+1)^{2/3}(3x-4)^{5/4}$
44. $y=6\sqrt[3]{x^2+x}(x^4-6x)^3$

求 $\frac{dy}{du}$，$\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{dy}{dx}$.

45. $y=\sqrt{u}$ 且 $u=x^2-1$
46. $y=\frac{15}{u^3}$ 且 $u=2x+1$
47. $y=u^{50}$ 且 $u=4x^2-2x^3$
48. $y=\frac{u+1}{u-1}$ 且 $u=1+\sqrt{x}$
49. $y=u(u+1)$ 且 $u=x^3-2x$
50. $y=(u+1)(u-1)$ 且 $u=x^3+1$
51. 求 $y=\sqrt{x^2+3x}$ 的图形在点(1，2)处的切线方程.
52. 求 $y=(x^3-4x)^{10}$ 的图形在点(2，0)处的切线方程.
53. 求 $y=x\sqrt{2x+3}$ 的图形在点(3，9)处的切线方程.
54. 求 $y=\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^3$ 的图形在点(2，343)处的切线方程.
55. 考虑
$$f(x)=\frac{x^2}{(1+x)^5}.$$
a)试用商法则和广义幂法则求 $f'(x)$.
b)注意到 $f(x)=x^2(1+x)^{-5}$，试用乘积法则和广义幂法则求 $f'(x)$.
c)比较 a)和 b)的答案.
56. 考虑
$$g(x)=(x^3+5x)^2.$$
a)试用广义幂法则求 $g'(x)$.
b)注意到 $g(x)=x^6+10x^4+25x^2$，求 $g'(x)$.
c)比较 a)和 b)的答案.

求 $f\circ g(x)$ 和 $g\circ f(x)$.

57. $f(x)=3x^2+2$，$g(x)=2x-1$
58. $f(x)=4x+3$，$g(x)=2x^2-5$
59. $f(x)=4x^2-1$，$g(x)=\frac{2}{x}$
60. $f(x)=\frac{3}{x}$，$g(x)=2x^2+3$
61. $f(x)=x^2+1$，$g(x)=x^2-1$
62. $f(x)=\frac{1}{x^2}$，$g(x)=x+2$

求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 使得 $h(x)=f\circ g(x)$. 答案可以多样.

63. $h(x)=(3x^2-7)^5$
64. $h(x)=\frac{1}{\sqrt{7x+2}}$
65. $h(x)=\frac{x^3+1}{x^3-1}$
66. $h(x)=(\sqrt{x}+5)^4$

用两种方法做 67～70 题. 首先用链式法则求解. 其次，通过求 $f(g(x))$、取导数和代换验证你的答案.

67. $f(u)=u^3$，$g(x)=u=2x^4+1$，求 $(f\circ g)'(-1)$.
68. $f(u)=\frac{u+1}{u-1}$，$g(x)=u=\sqrt{x}$，求 $(f\circ g)'(4)$.
69. $f(u)=\sqrt[3]{u}$，$g(x)=u=1-3x^2$，求 $(f\circ g)'(2)$.
70. $f(u)=2u^3$，$g(x)=u=\frac{3-x}{4+x}$，求 $(f\circ g)'(-10)$.

应用

商业与经济

71. 边际成本. 一个总成本函数可以表示成
$$C(x)=1\,000\sqrt{x^2+2}.$$
a)求边际成本 $C'(x)$ 和 $C'(10)$.
*b)说明 $C'(x)$ 的意义.
72. 边际收益. 一个总收益函数可表示成
$$R(x)=2\,000\sqrt{x^2+3}.$$
a)求边际收益 $R'(x)$ 和 $R'(20)$.
*b)说明 $R'(x)$ 的意义.

2007/08/16

73. 边际利润.

a)利用 71 题和 72 题中的总成本函数和总收益函数求边际利润 $P'(x)$.

*b)说明边际利润的意义.

74. 边际成本. 某公司确定，其关于生产 x 件产品的总成本函数是

$$C(x) = \sqrt{5x^2 + 60},$$

并且计划在未来数月根据函数

$$x(t) = 20t + 40$$

增加产量，其中 t 是从现在算起的月数.

a)求边际成本 dC/dx.

b)求 dC/dt.

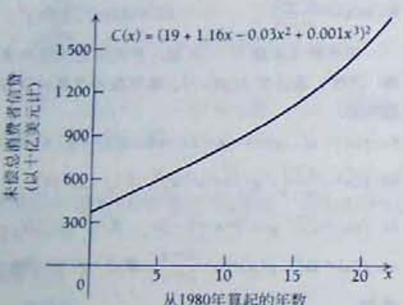
*c)口头解释 dC/dt.

d)当 $t=4$ 时，成本将以多快的速率上升?

75. 消费者信贷. 美国的未偿总消费者信贷(以 10 亿美元计)可以用函数

$$C(x) = (19 + 1.16x - 0.03x^2 + 0.001x^3)^2$$

来建模，其中 x 是从 1980 年算起的年数.



资料来源：Federal Reserve Monthly

a)求 dC/dx.

*b)说明 dC/dx 的意义.

c)用该模型预测消费者信贷在 2005 年将以多快的速度上升.

76. 效用. 效用是出现在经济学中的一类函数. 当某用户得到 x 件产品时，就会获得一定量的满足或效用 U. 假定对一个新的视频游戏，其效用与所得到的微型磁带的盘数 x 有关，且可表示为

$$U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}.$$

a)求边际效用.

*b)说明边际效用的意义.

77. 复利. 如果按年复利 i 存入本金 1 000 美元，3 年后其结存将增长到金额 A，且 A 可表示成

$$A = 1\,000(1+i)^3 \text{(见 1.1 节)}.$$

a)求变化率 dA/di.

*b)说明 dA/di 的意义.

78. 复利. 如果按一年计 4 次复利 i 存入本金 1 000 美元，5 年后其结存将增长到金额 A，且 A 可表示成

$$A = 1\,000\left(1+\frac{i}{4}\right)^{20}.$$

a)求变化率 dA/di.

*b)说明 dA/di 的意义.

79. 边际需求. 假定某个产品的需求函数可以表示成

$$D(p) = \frac{80\,000}{p},$$

而价格 p 是时间的函数且可表示成 $p = 1.6t + 9$，其中 t 以天数计.

a)求作为时间 t 的函数的需求.

b)求作为时间的函数的边际需求.

c)求 $t=100$ 天时的需求量的变化率.

80. 边际利润. 某公司正在销售微型计算机. 它确定其总利润可表示成

$$P(x) = 0.08x^2 + 80x + 260,$$

其中 x 是生产并且卖出的产品数. 假定 x 是时间(以月为单位)的函数，其中 $x = 5t + 1$.

a)求作为时间 t 的函数的总利润.

b)求作为时间的函数的边际利润.

c)求 $t=48$ 个月时总利润的变化率.

生命科学与物理学

81. 化疗. 卡铂抗癌化学药品的剂量与该药品的几个参数有关，也与患者的年龄、体重和性别有关. 对于女性患者，下面给出关于某个药品的量的函数式：

$$D = 0.85A(c + 25)$$

和

$$c = (140 - y)\frac{w}{72x},$$

其中 A 和 x 与使用哪种药品有关，D 是剂量，以毫克(mg)计，c 称为肌酸清除率，y 是患者的

年龄(年)，w 是患者的体重(千克). (资料来源：US Oncology.)

a)设患者为 45 岁的女性，且该药品有参数 $A=5$ 和 $x=0.6$. 利用这一信息求 D 和 c 的函数式，使得 D 为 c 的函数而 c 为 w 的函数.

b)用 a)中的函数式计算 dD/dc.

c)用 a)中的函数式计算 dc/dw.

d)计算 dD/dw.

*e)说明导数 dD/dw 的意义.

综合题

求导数.

82. $y=\sqrt{(2x-3)^2+1}$

83. $y=\sqrt[3]{x^2-6x+1}$

84. $s=\sqrt[4]{t^4+3t^2+8}$

85. $y=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$

86. $y=\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^3}$

87. $u=\frac{(1+2v)^4}{v^4}$

88. $y=x\sqrt{1+x^2}$

89. $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$

90. $w=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$

91. $y=\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+1}\right)^3$

92. $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

93. $s=\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}$

94. $y=x^{2/3}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}$

*95. 下面给出的是关于求商的导数的商法则的另一个证明的前一部分. 它利用乘积法则和幂法则. 完成下述证明，并给出每步的理由.

证明：设

$$Q(x) = \frac{N(x)}{D(x)}.$$

则

$$Q(x) = N(x)\cdot[D(x)]^{-1}.$$

因此，……

*96. 用尽可能多的方式描述函数的复合.

上机技术演练

对于 97 和 98 题中的各函数，在给定的区间上作 f 和 f' 的图形，然后计算在其上的切线是水平线的点.

97. $f(x)=1.68x\sqrt{9.2-x^2}$；$[-3, 3]$

98. $f(x)=\sqrt{6x^3-3x^2-48x+45}$；$[-5, 5]$

用分析法求下列每个函数的导数. 然后用绘图器验证其结果.

99. $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

100. $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x-10}}$

2.9 高阶导数

要点

- 求高阶导数.

考虑给定的函数

$$y = f(x) = x^5 - 3x^4 + x.$$

它的导数 f' 可以写成

$$y' = f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 1.$$

导函数 f' 还可以求其导数. 可以把其导数看作 f 的切线的斜率的变化率. 我们用记号 f'' 表示导数 $(f')'$，即 171~174

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x).$$

称 f'' 为 f 的二阶导数. 它可表示为

$$y'' = f''(x) = 20x^3 - 36x^2.$$

继续求导数有

$$f'''(x) = 60x^2 - 72x,$$ [illegible]

2007/08/16

$$f''''(x)=120x-72, \quad f\text{ 的四阶导数}$$
$$f'''''(x)=120. \quad f\text{ 的五阶导数}$$

当像 $f'''''(x)$ 这样的记号变得冗长时，我们用带括号的符号来简写它．于是，$f^{(n)}(x)$ 是 n 阶导数．对于上述函数，

$$f^{(4)}(x)=120x-72,$$
$$f^{(5)}(x)=120,$$
$$f^{(6)}(x)=0,$$
$$f^{(n)}(x)=0, \quad \text{对任意整数 } n\geqslant 6.$$

由 $y=f(x)$ 给出的函数的二阶导数的莱布尼茨记号是

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad 或 \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

读成“y 关于 x 的二阶导数”．在这个记号中的两个 2 不是指数．如果 $y=x^5-3x^4+x$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=20x^3-36x^2.$$

三阶导数的莱布尼茨记号是 d^3y/dx^3；四阶导数是 d^4y/dx^4；如此等等．

$$\frac{d^3y}{dx^3}=60x^2-72x,$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}=120x-72,$$
$$\frac{d^5y}{dx^5}=120.$$

例 1 对于 $y=1/x$，求 d^2y/dx^2．

解 因为有 $y=x^{-1}$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-1\cdot x^{-1-1}=-x^{-2}, \quad 或 \quad -\frac{1}{x^2}.$$

于是

175

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(-2)(-1)x^{-2-1}=2x^{-3}, \quad 或 \quad \frac{2}{x^3}.$$ ■

例 2 对于 $y=(x^2+10x)^{20}$，求 y' 和 y''．

解 为求 y'，用广义幂法则：

$$y'=20(x^2+10x)^{19}(2x+10)$$
$$=20(x^2+10x)^{19}\cdot 2(x+5)$$
$$=40(x^2+10x)^{19}(x+5).$$

为求 y''，用乘积法则和广义幂法则：

$$y''=40(x^2+10x)^{19}(1)+19\cdot 40(x^2+10x)^{18}(2x+10)(x+5)$$
$$=40(x^2+10x)^{19}+760(x^2+10x)^{18}\cdot 2(x+5)(x+5)$$
$$=40(x^2+10x)^{19}+1\,520(x^2+10x)^{18}(x+5)^2$$
$$=40(x^2+10x)^{18}[(x^2+10x)+38(x+5)^2]$$

$$=40(x^2+10x)^{18}[x^2+10x+38(x^2+10x+25)]$$
$$=40(x^2+10x)^{18}[39x^2+390x+950].$$ ■

在 2.6 节讨论加速度时，我们看到了二阶导数的一个应用．加速度可以看作一个二阶导数．当物体运动时，经过时间 t 后，该物体与一固定点的距离是时间的某个函数，例如 $s(t)$．因而

$$v(t)=s'(t)=\text{在时刻 } t \text{ 的速度}$$

且

$$a(t)=v'(t)=s''(t)=\text{在时刻 } t \text{ 的加速度}.$$

只要一个量是时间的函数，其一阶导数给出了它关于时间的变化率，而其二阶导数给出了它的加速度．例如，如果 $y=P(t)$ 给出了在时间 t 的人数，则 $P'(t)$ 表示其人口正在以多快的速度在变化，而 $P''(t)$ 给出了其人口变化的加速度．

习题 2.9

求 d^2y/dx^2．

1. $y=3x+5$
2. $y=-4x+7$
3. $y=-\frac{1}{x}$
4. $y=-\frac{3}{x}$
5. $y=x^{3/4}$
6. $y=\sqrt{x}$
7. $y=x^4+\frac{4}{x}$
8. $y=x^3-\frac{3}{x}$
9. $y=x^{-3}$
10. $y=x^{-4}$
11. $y=x^n$
12. $y=x^{-n}$
13. $y=x^4-x^2$
14. $y=x^4+x^3$
15. $y=\sqrt{x-1}$
16. $y=\sqrt{x+1}$
17. $y=ax^2+bx+c$
18. $y=\sqrt{a-bx}$
19. $y=\sqrt[3]{2x+4}$
20. $y=\sqrt[4]{(x^2+1)^3}$
21. $y=(x^2-8x)^{43}$
22. $y=(x^3+15x)^{20}$
23. $y=(x^4-4x^2)^{30}$
24. $y=(x^2-3x+1)^{12}$
25. $y=x^{2/3}+4x$
26. $y=x^{5/4}-x^{4/5}$
27. $y=(x-8)^{3/4}$
28. $y=\frac{x^5}{40}-\frac{x^3}{36}$
29. $y=\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}$
30. $y=\frac{4}{x^3}-\frac{7}{3x^4}$
31. 对于 $y=x^4$，求 d^4y/dx^4．
32. 对于 $y=x^5$，求 d^4y/dx^4．
33. 对于 $y=x^6-x^3+2x$，求 d^5y/dx^5．
34. 对于 $y=x^7-8x^2+2$，求 d^6y/dx^6．
35. 对于 $y=(x^2-5)^{10}$，求 d^2y/dx^2．
36. 对于 $y=x^k$，求 d^5y/dx^5．
37. 如果 s 是用 $s(t)=t^3+t^2+2t$ 给出的距离，求其加速度．
38. 如果 s 是用 $s(t)=t^4+t^2+3t$ 给出的距离，求其加速度．

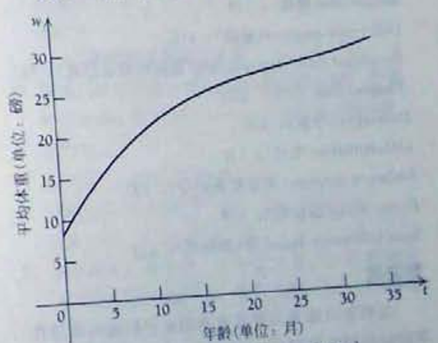
应用

生命科学与物理学

39. 婴儿的成长．年龄在 0 与 36 个月之间的男婴的平均体重可以表示成函数

$$w(t)=8.15+1.82t-0.059\,6t^2+0.000\,758t^3,$$

其中，t 用月来度量，而 w 用磅来度量．



资料来源：Centers for Disease Control

用这个近似函数式求一个标准男婴体重增长的加速度．

40. 种群增长．一个种群从最初的 100 000 增长到总数 $P(t)$，且 $P(t)$ 可表示成

$$P(t)=100\,000(1+0.4t+t^2).$$

该……长的……是多少?

2007/08/16

综合题

求 y'、y'' 和 y'''.

41. $y=x^{-1}+x^{-2}$
42. $y=\frac{1}{1-x}$
43. $y=x\sqrt{1+x^2}$
44. $y=3x^2+8\sqrt{x}$
45. $y=\frac{3x-1}{2x+3}$
46. $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$
47. $y=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$
48. $y=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

176 | 177 求 $f''(x)$.

49. $f(x)=\frac{x}{x-1}$
50. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

求一至五阶导数. 在计算前的每一步, 务必先化简.

51. $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$
52. $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$

上机技术演练

对 53~56 题中的每个函数, 在给定的区间上作 f, f' 和 f'' 的图形. 分析并且比较这些函数的性态.

53. $f(x)=0.1x^4-x^2+0.4$; $[-5, 5]$
54. $f(x)=-x^3+3x$; $[-3, 3]$
55. $f(x)=x^4+x^3-4x^2-2x+4$; $[-3, 3]$
56. $f(x)=x^3-3x^2+2$; $[-3, 5]$

概要与复习

关键术语

Limit(极限), 95
Continuity at a point(在一点的连续性), 100, 102
Continuous over an interval(在一个区间上连续), 100, 102
Continuous function(连续函数), 102
Average rate of change(平均变化率), 114, 147
Secant line(割线), 114
Difference quotient(差商), 116
Simplified difference quotient(差商的简化形式), 117
Tangent line(切线), 125
Derivative(导数), 126
Differentiable(可导), 126
Leibniz's notation(莱布尼茨记号), 137
Power Rule(幂法则), 138
Sum-Difference Rule(和-差法则), 142
Instantaneous rate of change(瞬时变化率), 148
Velocity(速度), 148, 149
Speed(速率), 148
Acceleration(加速度), 149
Growth rate(增长率), 150
Marginal cost(边际成本), 151
Marginal revenue(边际收益), 151
Marginal profit(边际利润), 152
Average cost(平均成本), 153
Product Rule(乘积法则), 157
Quotient Rule(商法则), 158
Extended Power Rule(广义幂法则), 166
Composition of functions(函数的复合), 169
Chain Rule(链式法则), 170
Higher-order derivative(高阶导数), 174

复习题

这些复习题是为测验准备的, 它们也可以用作不限时间的练习测验. 答案在书后, 答案中还包括方括内的参考章节, 它告诉你, 如果你的答案不正确, 应该再学习哪个章节.

对下述 1~3 题, 考虑

$\lim_{x\to -7} f(x)$, 其中 $f(x)=\frac{x^2+4x-21}{x+7}$.

1. 用数值法求极限.

a)完成下面的输入-输出表.

$x \to -7^-$	$f(x)$
−8	
−7.5	
−7.1	
−7.01	
−7.001	
−7.000 1	

$x \to -7^+$	$f(x)$
−6	
−6.5	
−6.9	
−6.99	
−6.999	
−6.999 9	

b)求 $\lim_{x\to -7^-} f(x)$, $\lim_{x\to -7^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to -7} f(x)$, 如果每个极限都存在的话.

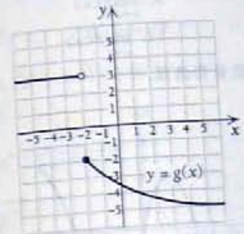
2. 用图示法考察极限. 作该函数的图形, 然后利用图形求极限.
3. 用代数法求极限. 用代数方法求极限. 说明你的工作.

求下列极限, 如果它存在的话.

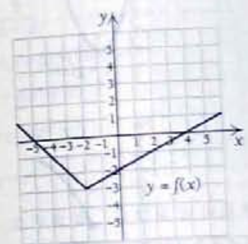
4. $\lim_{x\to -2}\frac{8}{x}$
5. $\lim_{x\to 1}(4x^3-x^2+7x)$
6. $\lim_{x\to -7}\frac{x^2+4x-21}{x+7}$
7. $\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}$

确定函数是否连续.

8.



9.



对第 8 题中的函数, 回答下列各题.

10. 求 $\lim_{x\to 1} g(x)$.
11. 求 $g(1)$.
12. g 在 $x=1$ 处连续吗?
13. 求 $\lim_{x\to -2} g(x)$.
14. 求 $g(-2)$.
15. g 在 -2 处连续吗?
16. 对于 $f(x)=x^3+x^2-2x$, 求当 x 从 -1 变到 2 时的平均变化率.
17. 求 $g(x)=-3x+5$ 的差商的简化形式.
18. 求 $f(x)=2x^2-3$ 的差商的简化形式.
19. 求 $y=x^2+3x$ 的图形在点 $(-1, -2)$ 处的切线方程.
20. 在 $y=-x^2+8x-11$ 的图形上求其切线是水平线的点.
21. 在 $y=5x^2-49x+12$ 的图形上求其切线斜率为 1 的点.

求 dy/dx.

22. $y=4x^3$
23. $y=3\sqrt[3]{x}$
24. $y=\frac{-8}{x^3}$
25. $y=15x^{2/5}$
26. $y=0.1x^7-3x^4-x^3+6$

求导数.

27. $f(x)=\frac{1}{6}x^6+8x^4-5x$
28. $y=\frac{x^3+x}{x}$
29. $y=\frac{x^3+8}{8-x}$
30. $g(x)=(5-x)^2(2x-1)^5$
31. $f(x)=(x^3-2)^7$
32. $f(x)=x^2(4x+3)^{3/4}$
33. 对于 $y=x^3-\frac{2}{x}$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.
34. 对于 $y=\frac{1}{42}x^7-10x^3+13x^2+28x-5$, 求 $\frac{d^4y}{dx^4}$.
35. 对于 $s(t)=t+t^4$, 求下列各量.
    a) $v(t)$.
    b) $a(t)$.
    c) $t=2$ 秒时的速度和加速度.
36. 商业: 边际收益、边际成本和边际利润. 已知 $R(x)=40x$ 和 $C(x)=8x^2-7x-10$, 求下列各量.
    a) $P(x)$.
    b) $R(20)$, $C(20)$ 和 $P(20)$.
    c) $R'(x)$, $C'(x)$ 和 $P'(x)$.
    d) $R'(20)$, $C'(20)$ 和 $P'(20)$.
37. 生命科学: 增长率. 某个城市的人口从最初的 10 000 人增加到总数 P, 且 P 可表示成 $P=10\,000+50t^2$, 其中 t 以年为单位.
    a)求增长率.
    b)求 20 年后($t=20$)该城市的人口数.
    c)求 $t=20$ 时的增长率.
38. 求 $f\circ g(x)$ 和 $g\circ f(x)$, 已知 $f(x)=x^2+5$ 和 $g(x)=1-2x$.

综合题

39. 求 [illegible] 的导数.

2007/08/16

上机技术演练

178～179

使用可以制作输入-输出表的绘图器．求下述每个极限．从步长 $=0.1$ 开始，然后到 0.01，0.001 和 0.000 1．当你认为知道其极限时，画出图形并且用 TRACE 选项进一步验证你的结果．

测验

对下述 1～3 题，考虑

$$\lim_{x\to 6} f(x)，其中\ f(x)=\frac{x^2-36}{x-6}.$$

1．用数值法求极限．

a)完成下面的输入-输出表．

$x\to 6^-$	$f(x)$
5	
5.7	
5.9	
5.99	
5.999	
5.999 9	

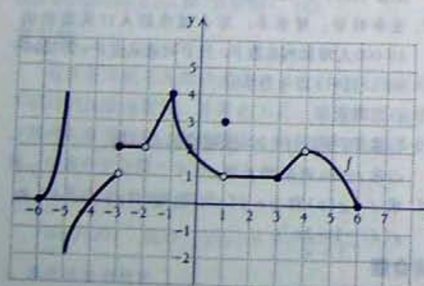
$x\to 6^+$	$f(x)$
7	
6.5	
6.1	
6.01	
6.001	
6.000 1	

b)求 $\lim_{x\to 6^-} f(x)$，$\lim_{x\to 6^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to 6} f(x)$，如果每个极限都存在的话．

2．用图示法求极限．作该函数的图形，然后利用图形求极限．

3．用代数法求极限．用代数方法求极限，说明你的工作．

用图示法求极限．对于 4～11 题，考虑下面的函数 f 的图形．



求极限，如果它存在的话．

40. $\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}$　　41. $\lim_{x\to 11}\frac{\sqrt{x-2}-3}{x-11}$

42. 在给定的区间上作 f 和 f' 的图形．然后在 f 的图形上求其切线是水平线的点．

$$f(x)=3.8x^5-18.6x^3;[-3,3]$$

4. $\lim_{x\to -5} f(x)$　　5. $\lim_{x\to -4} f(x)$

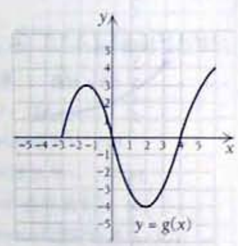
6. $\lim_{x\to -3} f(x)$　　7. $\lim_{x\to -2} f(x)$

8. $\lim_{x\to -1} f(x)$　　9. $\lim_{x\to 1} f(x)$

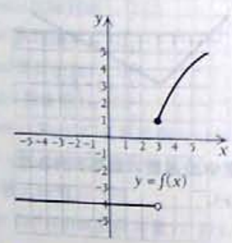
10. $\lim_{x\to 2} f(x)$　　11. $\lim_{x\to 3} f(x)$

确定函数是否连续．

12.



13.



对 13 题中的函数，回答下列问题．

14. 求 $\lim_{x\to 3} f(x)$．

15. 求 $f(3)$．

16. f 在 $x=3$ 处连续吗？

17. 求 $\lim_{x\to 4} f(x)$．

18. 求 $f(4)$．

19. f 在 $x=4$ 处连续吗？

求极限，如果它存在的话．

20. $\lim_{x\to 1}(3x^4-2x^2+5)$

21. $\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x(x^2-4)}$

22. $\lim_{x\to 0}\frac{7}{x}$

23. 求下列函数的差商的简化形式：

$$f(x)=2x^2+3x-9.$$

24. 求 $y=x+(4/x)$ 的图形在点(4，5)处的切线方程．

25. 在 $y=x^3-3x^2$ 的图形上求其切线是水平线的点．

求 dy/dx．

26. $y=x^{84}$　　27. $y=10\sqrt{x}$

28. $y=\frac{-10}{x}$　　29. $y=x^{5/4}$

30. $y=-0.5x^2+0.61x+90$

求导数．

31. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+4$

32. $y=\frac{3x-4}{x^3}$

33. $f(x)=\frac{x}{5-x}$

34. $f(x)=(x+3)^4(7-x)^5$

35. $y=(x^5-4x^3+x)^{-5}$

36. $f(x)=x\sqrt{x^2+5}$

37. 对于 $y=x^4-3x^2$，求 $\frac{d^3y}{dx^3}$．

38. 商业：边际收益、边际成本和边际利润．已知 $R(x)=50x$ 和 $C(x)=0.001x^2+1.2x+60$，求下列各量．

a) $P(x)$．

b) $R(10)$，$C(10)$ 和 $P(10)$．

c) $R'(x)$，$C'(x)$ 和 $P'(x)$．

d) $R'(10)$，$C'(10)$ 和 $P'(10)$．

39. 社会科学：记忆力．在某项记忆力测试中，某人在 t 分钟后能够记住 M 个单词，其中 $M=-0.001t^3+0.1t^2$．

a)求记住的单词数关于时间的变化率．

b)在前 10 分钟($t=10$)内可以记住多少单词？

c)在 $t=10$ 分时的记忆率是多少？

40. 对于 $f(x)=x^2-x$ 和 $g(x)=2x^3$，求 $f\circ g(x)$ 和 $g\circ f(x)$．

综合题

41. 求 $y=(1-3x)^{2/3}(1+3x)^{1/3}$ 的导数．

42. 求 $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$．

上机技术演练

43. 在给定的区间上作 f 和 f' 的图形，然后在 f 的图形上求切线是水平切线的点．

$$f(x)=5x^3-30x^2+45x+5\sqrt{x};[0,5]$$

44. 用绘图器上的表格求下列极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x+25}-5}{x}.$$

从步长 $=0.1$ 开始，然后到 0.01，0.001 和 0.000 1．当你认为知道其极限时，画出

$$y=\frac{\sqrt{5x+25}-5}{x}$$

的图形，并且用 TRACE 选项验证你的结果．

上机技术的深入应用

棒球的轨迹：磁带记录[⊖]

你观看过棒球赛吗？你见过本垒打球在绕过防线后击中某个障碍吗？假定球在距地面 60 英尺高，距本垒板 400 英尺远的位置击中该障碍，记分板将会显示可读出的信息，"根据磁带记录，这个球飞行了 442 英尺．"你不免惊叹，这个结果是怎样计算出来的？答案跟棒球所形成的曲线有关．

⊖ 非常感谢耶鲁大学体育教授 Robert K. Adair，他为本……

2007/08/16

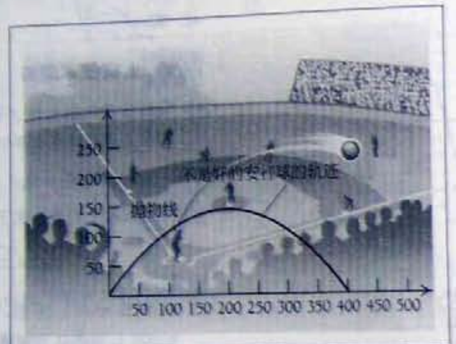


不论是多么好的安打球，其轨迹都不是抛物线

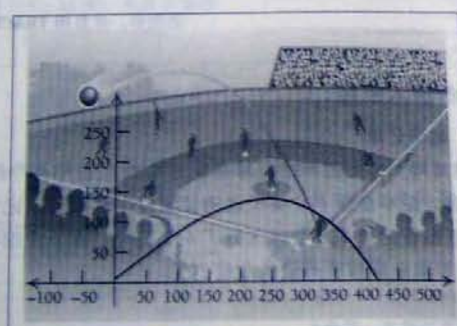
180~181

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

的图形.



一垒漂亮的安打球，沿着一条“倾斜”抛物线飞行，如下图所示.



该球没有沿着一条真正意义下的抛物线图形运行，其理由是这垒漂亮的安打作螺旋逆转．这种情况再加上球和空气有一段时间的摩擦效应，使得球的轨迹斜着趋于被击中方向.

现在来考察是否可以为棒球的轨迹建模．考虑下列数据.

水平距离 x（英尺）	0	50	100	200	285	300	360	400
竖直距离 y（英尺）	4.5	43	82	130	142	134	100	60

对于给出的数据，假定(0，4.5)是本垒板上击中球时所处位置点，大约离地面4.5英尺．同时假定，在距地面60英尺高和距本垒板400英尺远处遇到一个障碍.

练习　你需有绘图器，它可以利用回归求拟合曲线，并且可以求函数的零点或根.

1. 画出各点且用线段把它们连接起来．这可以在某个绘图器上用STAT PLOTS指令来完成．这看起来与前述的图形拟合吗？

2. a)利用表中所有数据和绘图器求与该组数据拟合的三次多项式函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

b)在区间[0，500]上作该函数的图形.

c)分析用该曲线与表中数据拟合的有效性.

d)预测从本垒板到球落地处的水平距离，假设球没有遇到障碍.

e)求竖直高度关于水平距离的变化率.

f)求在该图形上有水平切线的点.

3. a)利用所有数据求与该组数据拟合的四次多项式函数

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

b)在区间[0，500]上作该函数的图形.　182

c)分析用该曲线与表中数据拟合的有效性.

d)预测从本垒板到球落地处的水平距离，假设球没有遇到障碍.

e)求竖直高度关于水平距离的变化率.

f)求在该图形上有水平切线的点.

4. a)虽然你的绘图器或许不能使这一函数与已给数据拟合，但是仍假定已用某种形式的曲线拟合技巧求得方程

$$y = 0.0015x\sqrt{202\,500 - x^2}.$$

在区间[0，500]上作该函数的图形.

b)预测从本垒板到球落地处的水平距离，假设球没有遇到障碍.

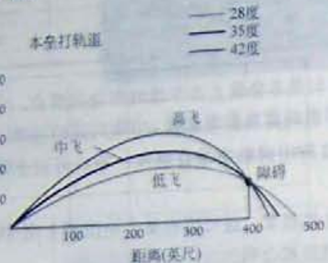
c)求竖直高度关于水平距离的变化率.

2007/08/16

d)求在该图形上有水平切线的点.

5. 比较2d)、3d)和4b)各题中的答案. 讨论用第3题中的四次模型进行预测与用第4题中的模型进行预测的优缺点.

本垒打记录. 实际上, 棒球大联赛中的记分板运算符在用不同的模型预测本垒打将运行的距离. 这些模型是线性模型, 且与球的运行轨道有关, 即与球打多高有关. 见下图.





假定在距本垒板的水平距离为 d 英尺且竖直高度为 H 英尺处击中一个障碍. 于是估计到球将运行的水平距离可表示成

$$D = kH + d,$$

其中 D 是所估计的距离, H 是球遇到障碍时的竖直高度, 而 d 是球遇到障碍时的水平距离. 因此, 如果考虑球的轨道, 其公式变成如下形式:

低飞轨道: $D=1.1H+d$,

中飞轨道: $D=0.7H+d$,

高飞轨道: $D=0.5H+d$.

6. 对于在 $d=400$ 英尺和 $H=60$ 英尺处遇到一个障碍的球, 在球分别按低飞轨道、中飞轨道和高飞轨道运行时, 估计球将运行多远.

7. 1953年, 在华盛顿特区格里菲思镇的老露天大运动场上, 名人堂成员 Mickey Mantle 击出一个高飞本垒打, 它击中高60英尺距本垒板460英尺远的标牌. 当时新闻报道宣称, 球运行了565英尺. 这个结果算得对吗?

第3章 微分法的应用

应用 对于剂量为 x 立方厘米的某种药物, 所引起的血压 B 可近似地表示成

$$B(x) = 0.05x^2 - 0.3x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 0.16,$$

求最高血压, 并且求取多大药剂量时出现最高血压.

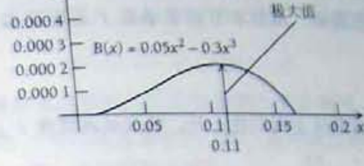


图 1

如果求 $B(x)$ 的一阶导数, 令它等于0, 然后解方程

$$B'(x) = 0.1x - 0.9x^2 = 0,$$

则所求得的 x 值将是出现最高血压时的药剂量.

这个问题出现在习题3.4的104题中.

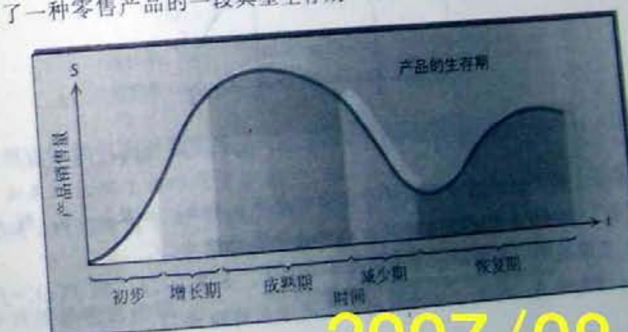
引言 在本章里, 讨论微分法的许多应用. 学习求函数的极大值和极小值的方法, 而这一方法使我们能够解决多种涉及需要求函数的最大值和最小值的问题. 我们还要运用微分法作函数的图形.

3.1 利用一阶导数求极大值、极小值和描绘图形

要点

- 用一阶导数试验法求连续函数的相对极值.
- 描绘连续函数的图形.

下图说明了一种零售产品的一段典型生存期. 我们知道, 售出的产品数量是随时间而变化



2007/08/16

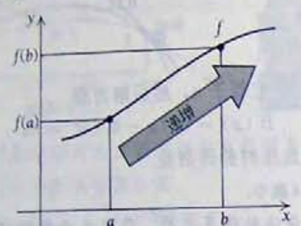
的，销售量从低水平开始并且增加到最大销售量，之后销售量减少并且下降到较低水平，这可
能是因为诸多新产品竞争的结果．于是公司通过改进产品来恢复其销售量．回顾一下诸多产
品，如黑白电视、彩电、磁带、光盘和只读光盘(CD-ROM)等，这些产品在哪方面可能属于
这段典型的生存期并且其曲线是合适的?

一个产品的典型生存期图形说明了我们在本章要讨论的许多思想．

求函数的最大值和最小值(即它们是函数的极大值和极小值)有着广泛的应用．函数的一
阶导数和二阶导数是微积分的工具，它们为我们提供关于函数图形的信息，有助于求函数的
极大值和极小值，作函数的图形．虽然本节假定函数 f 是连续的，但这并不意指 f' 和 f'' 也
连续．

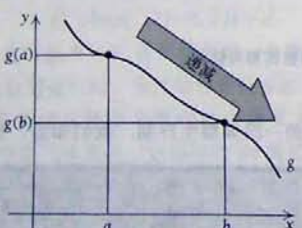
递增函数与递减函数

如果在区间 I 上函数的图形从左到右往上升，就说该函数在 I 上是**递增的**(increasing)．



186 f 是 I 上的递增函数，是指对于 I 中所有 a，b，如果 $a<b$，则 $f(a)<f(b)$．

如果在区间 I 上函数图形从左到右往下降，就说该函数在 I 上是**递减的**(decreasing)．下面，我们可以用数学语言来描述．



g 是 I 上的递减函数，是指对于 I 中所有 a，b，如果 $a<b$，则 $g(a)>g(b)$．

定义 函数 f 在 I 上是**递增的**，是指对于 I 中的每个 a 和 b，如果 $a<b$，则 $f(a)<f(b)$．
(如果输入 a 小于输入 b，则关于 a 的输出小于关于 b 的输出．)
函数 f 在 I 上是**递减的**，是指对于 I 中的每个 a 和 b，如果 $a<b$，则 $f(a)>f(b)$．
(如果输入 a 小于输入 b，则关于 a 的输出大于关于 b 的输出．)

注意 关于递增函数的两个不等式的方向是相同的，而关于递减函数的两个不等式的方向是不同的．

上机技术演练

探索 用具有 X scl=5 和 Y scl=25 的视窗[−10，25，−100，150]作函数

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+6x^2-11x-50$$

及其导函数

$$f'(x)=-x^2+12x-11$$

的图形．然后利用 **TRACE** 选项从左到右沿着每个图形移动，注意 x 坐标总是递增的．如果一个函数在一个区间是递增的，则 y 坐标将是递增的．如果一个函数在一个区间是递减的，则 y 坐标将是递减的．

该函数在哪段区间上是递增的?

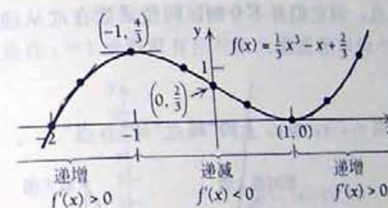
该函数在哪段区间上是递减的?

其导数在哪段区间上是正的?

其导数在哪段区间上是负的?

你可能有什么猜想?

在第1章里，我们讨论了如何根据线性函数的斜率确定该函数是否为递增函数或递减函数(或两者都不是)．对于一般的函数，其导数可以给出类似的信息．



f 在区间$(-\infty,\ -1)$和$(1,\ \infty)$上递增，其切线的斜率是正的．
f 在区间$(-1,\ 1)$上递减，其切线的斜率是负的． 187

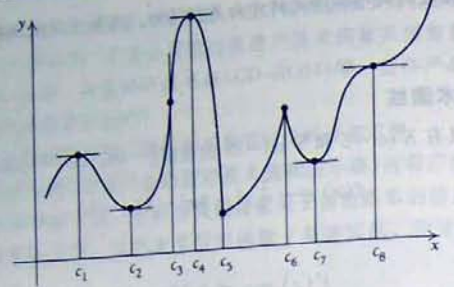
下面的定理说明如何用导数确定一个函数是否为递增的或递减的．

定理1 如果对区间 I 内的所有 x 有 $f'(x)>0$，则 f 在 I 上是递增函数．
如果对区间 I 内的所有 x 有 $f'(x)<0$，则 f 在 I 上是递减函数．

临界点

考察如下连续函数的图形．

2007/08/16



注意到有下述情形：

1. 在点 c_1，c_2，c_4，c_7 和 c_8，$f'(c)=0$. 即该图形在这些点的切线是水平线.

2. 在点 c_3，c_5 和 c_6，$f'(c)$不存在. 在点 c_3 其切线是竖直线，而在点 c_5 和 c_6 有角点或尖点.（另见 2.4 节末的讨论.）

定义 一个函数的**临界点**(critical point)是其定义域内的一个内点 c，在该点其图形在$(c, f(c))$处的切线是水平线或在该点其导数不存在. 即 c 是临界点是指

$$f'(c)=0 \quad 或 \quad f'(c) 不存在.$$

因此，在上述图形中：

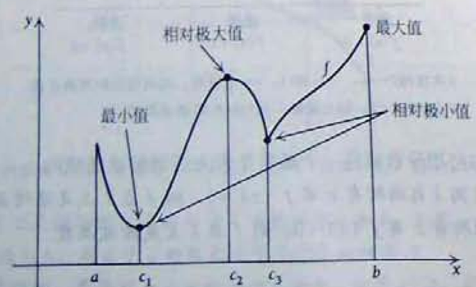
1. c_1，c_2，c_4，c_7 和 c_8 是临界点，因为对这几个点有 $f'(c)=0$.

[188] 2. c_3，c_5 和 c_6 是临界点，因为在这几个点 $f'(c)$不存在.

也注意到，只在临界点，函数可以从递增变到递减或从递减变到递增. 在上图中，c_1，c_2，c_4，c_5，c_6 和 c_7 把定义域分割成多个区间，在这些点上函数或从递增变到递减或从递减变到递增. 点 c_3 和 c_8 虽然是临界点，但它们并不分割区间使函数在此从递增变到递减或从递减变到递增.

求相对极大值和相对极小值

考察下图. 注意到在内点 c_1，c_2 和 c_3 上的"峰点"和"谷点".



函数值 $f(c_2)$ 称为**相对极大值**(relative maximum). 函数值 $f(c_1)$ 和 $f(c_3)$ 称为**相对极小值**(relative minimum).

定义 设 f 是一个函数，且在 f 的定义域中的输入 c 上函数值 $f(c)$ 存在. 则：

$f(c)$ 是**相对极小值**，是指在定义域中存在包含点 c 的一个开区间 I_1，使得对 I_1 中的所有 x 都有 $f(c) \leq f(x)$；

$f(c)$ 是**相对极大值**，是指在定义域中存在包含点 c 的一个开区间 I_2，使得对 I_2 中的所有 x 都有 $f(c) \geq f(x)$.

一个相对极大值可以看作一个较高点，它可能是也可能不是区间 I 上的最高点或者最大值. 类似地，一个相对极小值可以看作一个较低点，它可能是也可能不是区间 I 上的最低点或最小值. 下面，我们将讨论如何求相对极大值或相对极小值，简称**相对极值**(relative extrema). [189]

再来考察前面的图形. 连续函数在其上有相对极值的点，是在其上导数为 0 或导数不存在的点——临界点.

定理 2 如果函数 f 在一个开区间上有相对极值 $f(c)$，则 c 是一个临界点，因而

$$f'(c)=0 \quad 或 \quad f'(c) 不存在.$$

定理 2 是很有用的，但是重要的是要准确地理解该定理. 定理 2 是说，当考察有相对极值的点时，我们只需要考虑在其上导数为 0 或导数不存在的那些点. 我们可以把临界点看作相对极大值或相对极小值的一个候选点，而候选点可能给出也可能不给出相对极值. 即定理 2 并不是说，如果一个点是一个临界点，则其函数值就一定是相对极大值或相对极小值. 临界点的存在并不保证其函数有相对极大值或相对极小值. 一个有说服力的反例是函数

$$f(x)=(x-1)^3+2$$

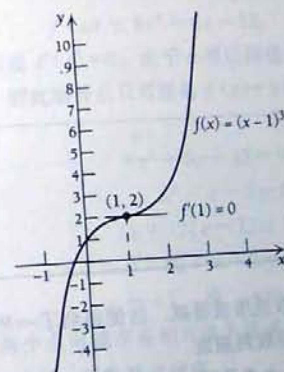
的图形，如下所示. 注意到

$$f'(x)=3(x-1)^2$$

和

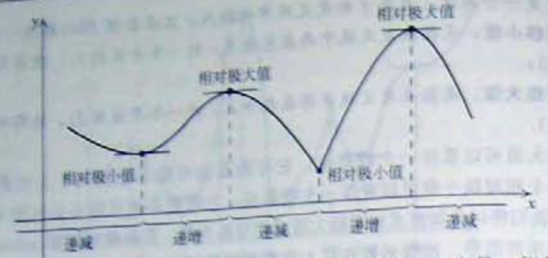
$$f'(1)=3(1-1)^2=0.$$

函数在 $c=1$ 有临界点，但是在 $c=1$ 函数没有相对极大值或相对极小值.

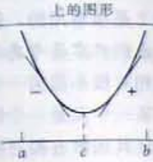
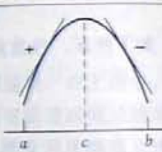
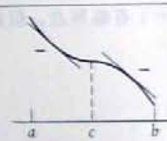
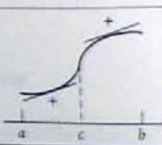


我们怎么知道，在什么条件下临界点的存在可以得到相对极值呢？下面的图形诱导出一个判别法. [190]

2007/08/16



在有相对极值的临界点，其函数在临界点的一侧是递增的，而在另一侧是递减的．简言之，其导数改变正负号．

$f(c)$	对 (a,c) 中的 x，$f'(x)$ 的符号	对 (c,b) 中的 x，$f'(x)$ 的符号	在区间 (a,b) 上的图形
相对极小值	−	+	
相对极大值	+	−	
没有相对极大值或相对极小值	−	−	
没有相对极大值或相对极小值	+	+	

191 导数可以告诉我们什么时候函数递增或递减．这便得到了一阶导数判别法．

定理 3　关于相对极值的一阶导数判别法

对于任何连续函数 f，设其在一个开区间 (a,b) 上有一个临界点 c：

F1. 如果在 (a,c) 上 $f'(x)<0$ 而在 (c,b) 上 $f'(x)>0$，则 f 在 c 处有相对极小值．即 f 在 c 的左侧递减而在 c 的右侧递增．

F2. 如果在 (a,c) 上 $f'(x)>0$ 而在 (c,b) 上 $f'(x)<0$，则 f 在 c 处有相对极大值．即 f 在 c 的左侧递增而在 c 的右侧递减．

F3. 如果在 (a,c) 和 (c,b) 上 $f'(x)$ 有相同的符号，则 f 既没有相对极大值也没有相对极小值．

下面来看一看如何用一阶导数判别法来描绘和理解图形，并且求其相对极值．

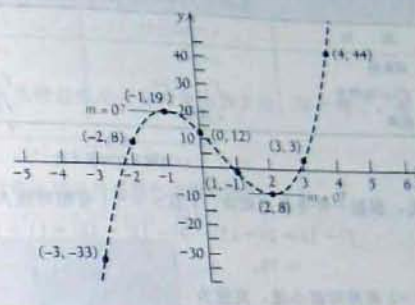
例 1　作由

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+12$$

表示的函数 f 的图形，并且求其相对极值．

解　假定我们正在尝试作这个函数的图形但不了解任何微积分知识．我们能做什么呢？可以描出多个点以确定其图形看上去是转向何方．我们猜选了一些 x 值，看会出现什么情形．

x	$f(x)$
−3	−33
−2	8
−1	19
0	12
1	−1
2	−8
3	3
4	44



描出这些点然后用它们粗略地画出"最中意"的图形，如上图虚线所示．根据这个草图，大致可以看出该图在 $x=-1$ 和 $x=2$ 附近有斜率为 0 的切线．但是我们怎么知道的确如此呢？可以先求其导数的一般表达式：

$$f'(x)=6x^2-6x-12.$$ 192

然后确定在哪些点 $f'(x)$ 不存在或 $f'(x)=0$．由于 x 可以用任何实数代入 $f'(x)=6x^2-6x-12$，所以 $f'(x)$ 对所有实数都存在．因此临界点只可能是 $f'(x)=0$ 的点，在其上有水平切线．为求这些点，解 $f'(x)=0$：

$$6x^2-6x-12=0$$

$$x^2-x-2=0 \qquad \text{两边除以 6}$$

$$(x+1)(x-2)=0 \qquad \text{分解因式}$$

$$x+1=0 \quad \text{或} \quad x-2=0 \qquad \text{利用零乘积原理}$$

$$x=-1 \quad \text{或} \quad x=2.$$

临界点是 −1 和 2，因为在这两个点可能存在相对极大值或相对极小值．如果存在相对极值点，我们可以考察临界点每一侧的区间．用临界点把实数轴分成三个区间：A$(-\infty,-1)$，B$(-1,2)$ 和 C$(2,\infty)$，如右图所示．



2007/08/16

现在来分析每个区间上的导数符号. 如果对于某区间内的一个值 $f'(x)$ 是正的, 则对该区间的所有值 $f'(x)$ 都是正的. 类似地, 如果 $f'(x)$ 对一个值是负的, 则 $f'(x)$ 对相应区间内的所有值都是负的. 这是因为, 为了使其导数改变符号, 它必须在某个点变成 0 或无穷大. 这样一个点将是一个临界点. 因此只需在每个区间选一个试验值并且作代换. 我们所选的试验值是 -2, 0 和 4.

A: 试验值 -2, $f'(-2) = 6(-2)^2 - 6(-2) - 12$
$= 24 + 12 - 12 = 24 > 0$;
$= 6(0)^2 - 6(0) - 12 = -12 < 0$;

B: 试验值 0, $f'(0) = 6(0)^2 - 6(0) - 12$

C: 试验值 4, $f'(4) = 6(4)^2 - 6(4) - 12$
$= 96 - 24 - 12 = 60 > 0$.

区间	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
试验值	$x=-2$	$x=0$	$x=4$
$f'(x)$ 的符号	$f'(-2)>0$	$f'(0)<0$	$f'(4)>0$
结果	f 递增	f 递减	f 递增

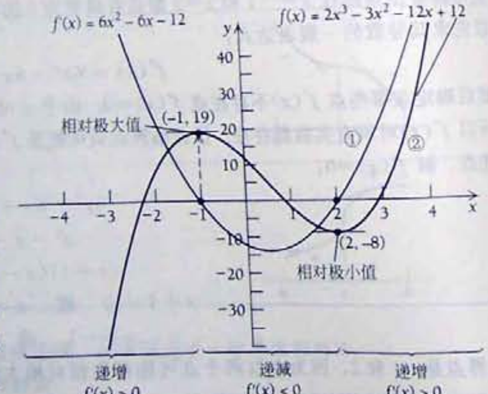
有变化——说明有相对极大值　　有变化——说明有相对极小值

193 因此, 根据一阶导数判别法, f 在 $x=-1$ 有相对极大值, 且其值为

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 12 = 19,$$　代入原函数

而 f 在 $x=2$ 有相对极小值, 其值为

$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 12 = -8.$$



因此, 正如我们从所画草图猜想到的, 函数在 $(-1, 19)$ 上有相对极大值而在 $(2, -8)$ 上有相对极小值.

我们所得到的信息在画函数的草图时是很有用的. 我们知道这个多项式是连续的, 还知道该函数在哪里递增, 在哪里递减, 在哪里有相对极值. 我们用计算器给出另外一些函数值来完成函数的图形. 实际上有些计算器是可以编制程序的, 通过先键入一个公式再生成许多输出的方式生成函数值. 右图曲线②表示的函数图形是按比例画出的, 并且清晰地展示了其弯曲的特征.

作为参考, 导函数的图形用曲线①表示. 注意临界点是如何展示其自身作用的. 在函数有相对极值的地方其导数为 0. ■

上机技术演练

探索 考虑下述函数 f:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

用同一个坐标系作 f 和 f' 的图形. 用 **TABLE** 选项和 **TRACE** 选项检查这两个图形. 你认为在哪些点 $f(x)$ 有相对极值? 在哪些点其导数为 0? 在哪些点 $f(x)$ 有临界点?

在求相对极值时, 要牢记下述步骤:

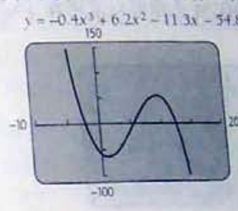
用导数 f' 求 f 的临界点. 在用临界点确定的各区间中取试验值, 把它们代入导数 f', 然后用原函数 f 求其函数值. 利用导数 f' 获得关于 f 的图形形状的信息. 194

上机技术演练

求相对极值 在绘图器上有几种近似地求相对极值的方法. 举个例子, 考虑求

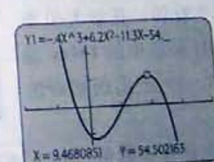
$$f(x) = -0.4x^3 + 6.2x^2 - 11.3x - 54.8$$

的相对极值. 先用能显示该曲线弯曲状况的视窗作函数的图形.



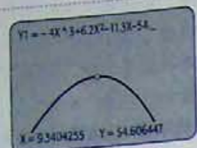
方法 1: 跟踪法

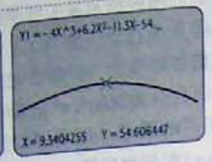
从如上所示视窗开始, 利用 **TRACE** 选项并且沿着曲线移动光标, 注意在哪些点可能出现相对极值.



看上去相对极大值大约出现在 $X=9.47$ 时的 $Y=54.5$ 处. 通过放大图形得到下面的视窗就可以改进近似值. 利用 **TRACE** 选项并且沿着曲线移动光标, 再注意在哪些点 y 值最大, 看上去其近似值大约是在 $X=9.34$ 时的 $Y=54.61$ 处.

2007/08/16

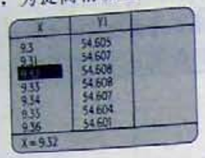




可以继续采用此法，直到达到所要求的精确度为止.

方法 2：表格法

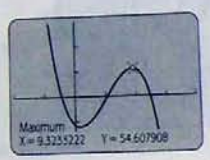
也可以利用 **TABLE** 选项，为提高精确度可调整起始点和步长值.



看上去其近似值大约在 X 值位于 9.32 和 9.33 之间的 Y=54.61 处. 为改进近似值，可设置新的表格来显示在 $f(9.32)$ 与 $f(9.33)$ 之间的函数值.

方法 3：极大值、极小值法

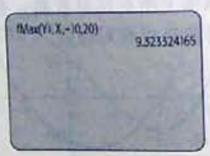
利用 **CALC** 菜单中的 **MAXIMUM** 选项可以求得在 $x\approx9.32$ 处出现大约 54.61 的相对极大值.



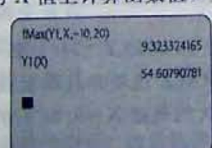
方法 4：fMax 或 fMin

这个选项是在任意一个特定的闭区间上计算相对极大值或相对极小值. 从最初的图形上看到，其最大值出现在区间[−10, 20]内. 利用 **MATH** 菜单中的 **fMax** 选项，可以看到当 $x\approx9.32$ 时在[−10, 20]上出现相对极大值.

195

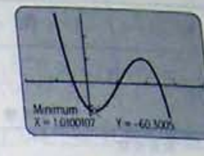


为求极大值，可在给定的 X 值上计算函数值，如下述视窗所示.



近似值大约在 X=9.32 时的 Y=54.61 处.

采用上述诸方法中的任一个，求得相对极小值大约在 X=1.01 时的 Y=−60.30处.



练习

1. 求例 1 中的函数的相对极值.

例 2 求由

$$f(x)=2x^3-x^4$$

表示的函数 f 的相对极值. 然后描绘函数的图形.

解 首先，必须确定临界点. 为此，求 $f'(x)$：

$$f'(x)=6x^2-4x^3.$$

其次，确定在哪些点 $f'(x)$不存在或 $f'(x)=0$. 因为 x 可以用任何实数代入 $f'(x)=6x^2-4x^3$，所以对所有实数 $f'(x)$都存在. 因此临界点只可能是使 $f'(x)=0$ 的那些点，即在那些点有水平切线. 为求得这些点，解 $f'(x)=0$：

$$6x^2-4x^3=0$$

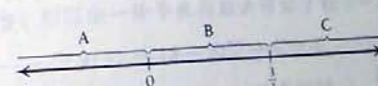
$$2x^2(3-2x)=0 \quad 分解因式$$

$$2x^2=0 \quad 或 \quad 3-2x=0$$

$$x^2=0 \quad 或 \quad 3=2x$$

$$x=0 \quad 或 \quad x=\frac{3}{2}.$$

临界点是 0 和 $\frac{3}{2}$. 用这些点把实数轴分成三个区间：$A(-\infty, 0)$，$B\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 和 $C\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$，如下图所示.



196

现在分析在每个区间上的导数符号. 在每个区间内选取试验值并作代换. 一般选作试验值的数要使其导数的输出值容易计算，在本例中，选−1，1 和 2.

A：试验值−1，$f'(-1)=6(-1)^2-4(-1)^3$
$=6+4=10>0$；

B：试验值 1，　$f'(1)=6(1)^2-4(1)^3$

2007/08/16

$=6-4=2>0$;

C：试验值 2，　$f'(2)=6(2)^2-4(2)^3$
$=24-32=-8<0$.

区　间	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
试验值	$x=-1$	$x=1$	$x=2$
$f'(x)$的符号	$f'(-1)>0$	$f'(1)>0$	$f'(2)<0$
结果	f 递增	f 递增	f 递减

没有变化　　　有变化 说明有相对极大值

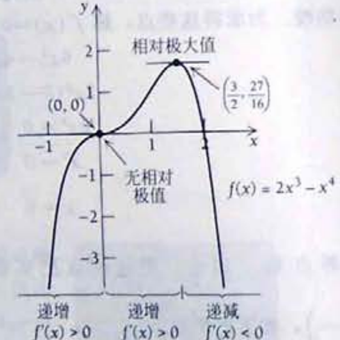
因此，根据一阶导数判别法，f 在 $x=0$ 处既没有相对极大值也没有相对极小值，因为函数在点 0 的两侧都递增；而 f 在 $x=\frac{3}{2}$ 处有相对极大值，其值为

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{27}{16}.$$　记住是代入原函数

因此在$\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{16}\right)$处有相对极大值.

用所得到的信息画草图．在左下表中列出了其他函数值．（可以列出更多的值.）其图形如右下图所示.

x	$f(x)$，近似值
−1	−3
−0.75	−1.16
−0.5	−0.31
−0.25	−0.04
0	0
0.25	0.03
0.5	0.19
0.75	0.53
1	1
1.25	1.46
1.5	1.69
1.75	1.34
2	0



■

上机技术演练

练习　用绘图器作下列各函数的图形并且求其相对极值.

1. $f(x)=x^4-8x^3+18x^2$　　2. $f(x)=2.01x^3-0.9x^4$
3. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$　　4. $f(x)=0.21x^4-4.3x^2+22$

197

例 3　求由

$$f(x)=(x-2)^{2/3}+1$$

表示的函数 f 的相对极值．然后描绘函数的图形.

解　首先，确定临界点，为此，求 $f'(x)$：

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-2)^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}.$$

其次，确定在何处 $f'(x)$不存在或 $f'(x)=0$．注意到虽然 $f(x)$在 $x=2$ 处有意义，但在 $x=2$ 处 $f'(x)$不存在．因而数 2 是临界点．方程 $f'(x)=0$ 无解，所以只有一个临界点 2．用数 2 把实数轴分成两个区间：A$(-\infty, 2)$和 B$(2, \infty)$，如下图所示.



分析每个区间上的导数．在每个区间内选取试验值并作代换．所选试验值为 0 和 3．不必求其导数的精确值，只需确定其导数的符号．有时仅仅考察导数公式就可以做到这一点：

$$\text{A: 试验值 } 0,\quad f'(0)=\frac{2}{3\sqrt[3]{0-2}}<0;$$

$$\text{B: 试验值 } 3,\quad f'(3)=\frac{2}{3\sqrt[3]{3-2}}>0.$$

区　间	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
试验值	$x=0$	$x=3$
$f'(x)$的符号	$f'(0)<0$	$f'(3)>0$
结果	f 递减	f 递增

有变化 说明有相对极小值

因为从递减变化到递增，所以由一阶导数判别法可知 f 在 $x=2$ 处有相对极小值，其值为

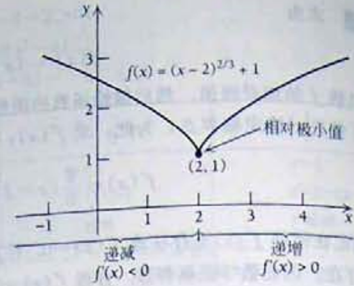
$$f(2)=(2-2)^{2/3}+1=1.$$

因此在点(2，1)有相对极小值．（该图形在点(2，1)处无切线.）

用所得到的信息画草图．在左下表中列出了其他函数值(可列出更多的值)．其图形如右下图所示.

198

x	$f(x)$，近似值
−1	3.08
−0.5	2.84
0	2.59
0.5	2.31
1	2
1.5	1.63
2	1
2.5	1.63
3	2
3.5	2.31
4	2.59



上机技术演练

练习　在 1~3 题中，考察如下函数 f：

$$f(x)=2-(x-1)^{2/3}.$$

1. 用视窗[−4，6，−2，4]作该函数的图形.
2. 作其一阶导函数的图形. 在临界点上其导函数的图形会出现什么情形？
3. 求相对极值的近似值.

习题 3.1

求函数的相对极值，如果它们存在的话. 用有序对列出答案，然后画出函数的草图.

1. $f(x)=x^2-4x+5$　　2. $f(x)=x^2-6x-3$
3. $f(x)=5+x-x^2$　　4. $f(x)=2-3x-2x^2$
5. $f(x)=1+6x+3x^2$　　6. $f(x)=0.5x^2-2x-11$
7. $f(x)=x^3-x^2-x+2$
8. $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+5$
9. $f(x)=x^3-3x+6$　　10. $f(x)=x^3-3x^2$
11. $f(x)=3x^2-2x^3$　　12. $f(x)=x^3-3x$
13. $f(x)=2x^3$　　14. $f(x)=1-x^3$
15. $f(x)=x^3-6x^2+10$
16. $f(x)=12+9x-3x^2-x^3$
17. $f(x)=x^3-x^4$　　18. $f(x)=x^4-2x^3$
19. $f(x)=x^4-8x^2+3$　　20. $f(x)=x^4-2x^2+5$
21. $f(x)=1-x^{2/3}$　　22. $f(x)=(x+3)^{2/3}-5$
23. $f(x)=\frac{-8}{x^2+1}$　　24. $f(x)=\frac{5}{x^2+1}$
25. $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$　　26. $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$
27. $f(x)=\sqrt[3]{x}$　　28. $f(x)=(x+1)^{1/3}$
29. $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}$　　30. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

31~60. 用绘图器验证 1~30 题中的每个结果.

应用

商业与经济

61. 广告. 某公司预计，在花费 a 美元做广告以后，公司将卖出 N 件产品，其中

$$N(a)=-a^2+300a+6,\quad 0\leqslant a\leqslant 300,$$

而 a 以千美元计. 求其相对极值并且画出函数的图形.

生命科学与物理学

62. 患病期间的体温. 一个病人在患病期间的体温可表示成

$$T(t)=-0.1t^2+1.2t+98.6,\ 0\leqslant t\leqslant 12,$$

其中 T 是在时间 t(天)的温度(℉). 求其相对极值并且画出函数的图形.

63. 日蚀. 2001 年 6 月 21 日，在非洲发生了全日蚀. 在格林威治时间中午 12：00 和下午 1：00 之间，随地球自转轨道运行的日蚀中心位置可近似地用

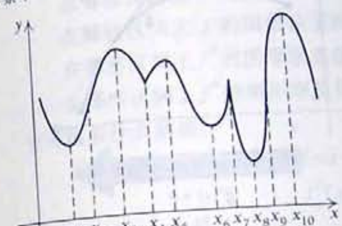
$$f(x)=\sqrt{138.1-5.025x+0.2902x^2}$$

来描述，其中 $x(0\leqslant x\leqslant 22)$ 是东经度数而 $f(x)$ 是南纬度数. x 和 $f(x)$ 都以度为单位. 求沿着这个轨道最靠北的点的纬度数和经度数，并且画出函数 f 的图形. (资料来源：NASA[⊖].)



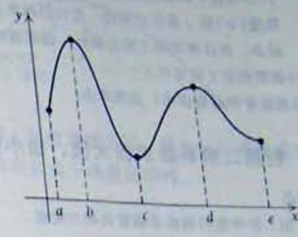
资料来源：NASA

*64. 考察下图.



说明临界点的概念. 然后确定该图形上哪些点是临界点，试说明理由.

*65. 考察下图.



试用图形和所标出的各个区间来说明函数递增或递减的概念与其一阶导数的关系.

上机技术演练

作函数的图形. 然后估计每一个相对极值.

66. $f(x)=-x^5-4x^4+54x^3+160x^2-641x^2$
　　$-828x+1200$
67. $f(x)=x^4+4x^3-36x^2-160x+400$
68. $f(x)=\sqrt[3]{|4-x^2|}+1$
69. $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$

商业与生命科学：吸入热量(卡)与估计寿命. 下列表中的数据是关于一些国家在 1992 年每日吸入的热量(卡)、在 2000 年中所估算出的寿命和婴儿死亡率. 对于 70 题和 71 题使用这个表.

国　名	每日吸入热量(卡)(1992 年)	估计寿命(2000 年)	婴儿死亡率(每 1 000 名新生儿的死亡人数)
阿根廷	2 880	72.3	26.1
玻利维亚	2 100	62.0	60.2
加拿大	3 482	80.0	5.5
多米尼加共和国	2 359	70.4	40.8
德国	3 443	76.7	22.2
海地	1 707	50.2	98.4
墨西哥	3 181	75.0	20.7
美国	3 671	76.3	6.2
委内瑞拉	2 622	73.3	25.5
意大利	3 216	80.4	5.0

资料来源：*The Universal Almanac*

⊖ NASA 是指美国国家航空航天局. ——编辑注

2007/08/16

*70. 估计寿命与每日吸入热量(卡).

a)试用 1.6 节的回归程序求一个三次函数 $y=f(x)$ 与表中数据的拟合，其中 x 是每日吸入热量(卡)而 y 是估计寿命. 然后用四次函数去拟合，并且确定哪个拟合最好. 说明理由.

199~201 b)函数的定义域是什么?

c)函数有相对极值吗? 说明理由.

*71. 婴儿死亡率与每日吸入热量(卡).

a)试用 1.6 节的回归程序求一个三次函数 $y=f(x)$ 与表中数据的拟合，其中 x 是每日吸入热量(卡)而 y 是婴儿死亡率. 然后用四次函数拟合，并且确定哪个拟合最好. 说明理由.

b)函数的定义域是什么?

c)函数有相对极值吗? 说明理由.

3.2 利用二阶导数求极大值、极小值和描绘图形

要点

- 用二阶导数判别法求函数的相对极值.
- 描绘连续函数的图形.

凹性：递增导数和递减导数

在图 1 中展示了两个函数的图形. 图 1a 向上弯曲，而图 1b 向下弯曲. 我们要研究这是否与它们的导数有关.

考察 f 的图形(图 1a). 取划线板或直尺沿着曲线从左向右移动并画出多条切线. 这些切线的斜率有什么变化呢? 对于 g 的图形(图 1b)做同样的考察. 请看下面的图形.

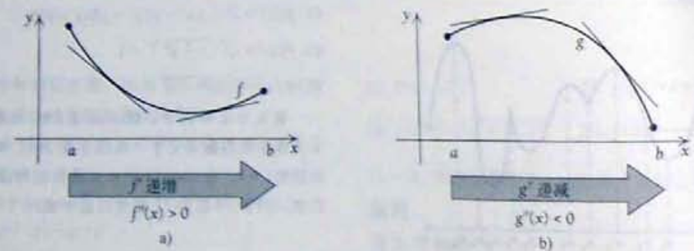


图 1

在图 1a 中，斜率是递增的. 即 f' 在该区间上是递增的. 我们知道，如果 f'' 是正的，则 f' 递增，因为 f' 和 f'' 间的关系就像 f 和 f' 间的关系. 另外还注意到，所有切线都在图形的下方. 在图 1b 中，斜率是递减的. 即如我们所知，如果 g'' 是负的，则 g' 递减. 所有切线都在图形上方.

定义 设函数 f 在开区间 I 内每一点处的导数 f' 存在.

1. f 在区间 I 上是**上凹的**(concave up)，是指 f' 在 I 上递增.
2. f 在区间 I 上是**下凹的**(concave down)，是指 f' 在 I 上递减.

例如，图 1a 中的曲线是上凹的，而图 1b 中的曲线是下凹的. 于是我们有下述定理，它使

202 我们能用二阶导数来判定凹性.

定理 4 凹性判别法

1. 如果在区间 I 上 $f''(x)>0$，则 f 的图形向上弯曲. (f' 递增，所以 f 在 I 上是上凹的.)

2. 如果在区间 I 上 $f''(x)<0$，则 f 的图形向下弯曲. (f' 递减，所以 f 在 I 上是下凹的.)

下面是一个有助于记忆的装置.



要注意，函数可能是递减上凹、递减下凹、递增上凹或递增下凹，即凹性与递增或递减是无关的概念. 但是，导数的递增或递减状态却能告诉我们关于函数的凹性.

上机技术演练

探索 用具有 Xscl=5 和 Yscl=25 的视窗[−10, 25, −100, 150]作函数

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+6x^2-11x-50$$

及其二阶导数

$$f''(x)=-2x+12$$

的图形.

在哪些区间上 f 的图形是上凹的?

在哪些区间上 f 的图形是下凹的?

在哪些区间上 f'' 的图形取正值?

在哪些区间上 f'' 的图形取负值?

你可能有什么猜想?

下面用具有 Xscl=5 和 Yscl=25 的视窗[−10, 25, −200, 50]作一阶导数

$$f'(x)=-x^2+12x-11$$

和二阶导数

$$f''(x)=-2x+12$$

的图形.

在哪些区间上一阶导数 f' 递增?

在哪些区间上一阶导数 f' 递减?

在哪些区间上 f'' 的图形取正值?

在哪些区间上 f'' 的图形取负值?

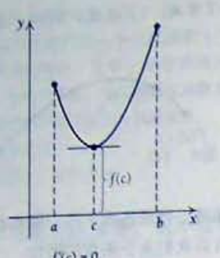
你可能有什么猜想?

用二阶导数求相对极值

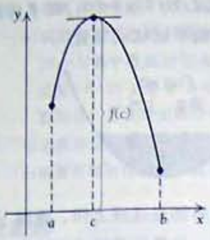
在下面的讨论中，将介绍如何用二阶导数来判定一个函数在一个开区间上是否有相对 203

极值.

2007/08/16



$f'(c)=0$,
$f''(c)>0$,
图形在c附近上凹.
因而 $f(c)$是相对极小值.



$f'(c)=0$,
$f''(c)<0$,
图形在c附近下凹.
因而 $f(c)$是相对极大值.

定理5 相对极值的二阶导数判别法

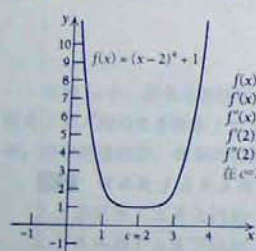
设(a, b)是函数 f 定义域内的开区间，对(a, b)内的每一点 x，$f'(x)$都存在，且在(a, b)内有使 $f'(c)=0$ 的临界点 c.

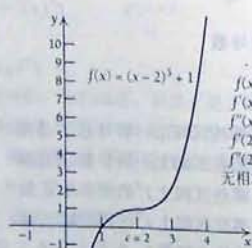
1. 如果$f''(c)>0$，则 $f(c)$是相对极小值.
2. 如果$f''(c)<0$，则 $f(c)$是相对极大值.

如果$f''(c)=0$，则该判别法失效. 于是必须用一阶导数判别法.

注意，$f''(c)=0$ 并不是说不存在相对极值. 它只是说在这一点没有明确的结论，因而必须用其他方法(例如一阶导数判别法)来确定是否存在相对极值.

考察下面两个图形. 在每一个图形中，f'和 f''在 $c=2$ 处都为 0，但是，第一个函数有极值而第二个函数无极值. 另外要注意，如果 $f'(c)$不存在，则$f''(c)$不存在，因而不能用二阶导数判别法.





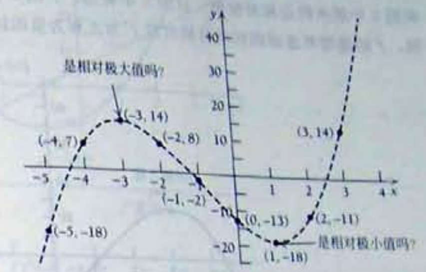
例1 作由

$$f(x)=x^3+3x^2-9x-13$$

表示的函数 f 的图形，然后求相对极值.

解 首先描出若干点，然后用这些点以及已有的微分学知识作函数的图形.

x	$f(x)$
−5	−18
−4	7
−3	14
−2	9
−1	−2
0	−13
1	−18
2	−11
3	14



我们描出这些点，先设想图形的形状. 可以把如上所示的虚线图看作初步的设想. 点$(-3, 14)$和$(1, -18)$是相对极值吗？最初没有把它们选作要描的点也是可能的. 为了深化我们的设想，需要用到微分学知识. 求出其一阶导数 $f'(x)$和二阶导数$f''(x)$：

$$f'(x)=3x^2+6x-9,$$

$$f''(x)=6x+6.$$

然后解 $f'(x)=0$：

$$3x^2+6x-9=0$$

$$x^2+2x-3=0 \quad \text{两边除以 3}$$

$$(x+3)(x-1)=0 \quad \text{分解因式}$$

$$x+3=0 \quad 或 \quad x-1=0 \quad \text{利用零乘积原理}$$

$$x=-3 \quad 或 \quad x=1.$$

把所求 x 值代入原函数求第二个坐标：

$$f(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-9(-3)-13=14;$$

$$f(1)=(1)^3+3(1)^2-9(1)-13=-18.$$

点$(-3, 14)$和$(1, -18)$是相对极值点吗？我们考察其二阶导数. 利用二阶导数判别法，并且代入数−3 和 1：

$$f''(-3)=6(-3)+6=-12<0; \longrightarrow \text{相对极大值}$$

$$f''(1)=6(1)+6=12>0. \longrightarrow \text{相对极小值}$$

2007/08/16

因此，在点(−3，14)处有相对极大值，而在点(1，−18)处有相对极小值．

下面各图说明与函数 f 有关的信息，该信息可以从 f 的一阶导数和二阶导数得到．在图 1 和图 2 中展示的是相对极值．在图 2 中看到，f' 的 x 截距的 x 坐标是 f 的临界点．同时也看到，f 的递增和递减的区间分别对应 f' 为正和为负的区间．

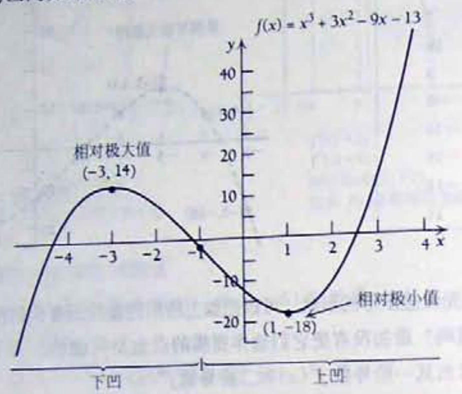


图 1

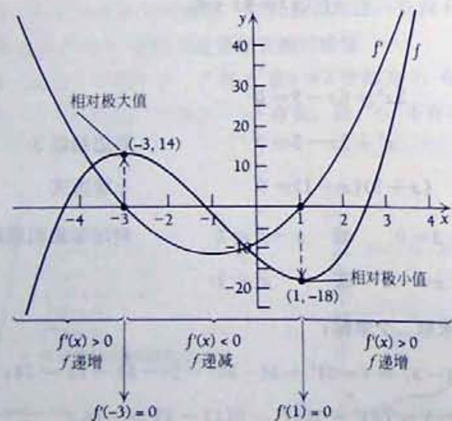


图 2

在图 3 中看到，f' 的递增和递减的区间分别对应 f'' 为正和为负的区间．最后在图 4 中看到，当 $f''<0$ 时 f 是下凹的，而当 $f''>0$ 时 f 是上凹的．

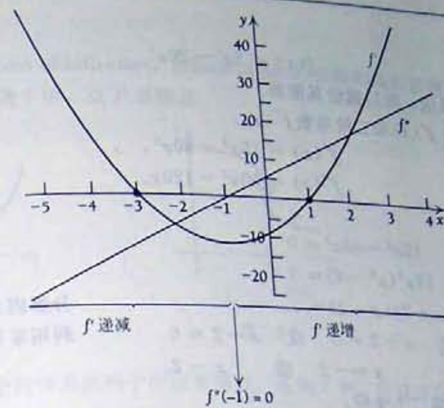


图 3

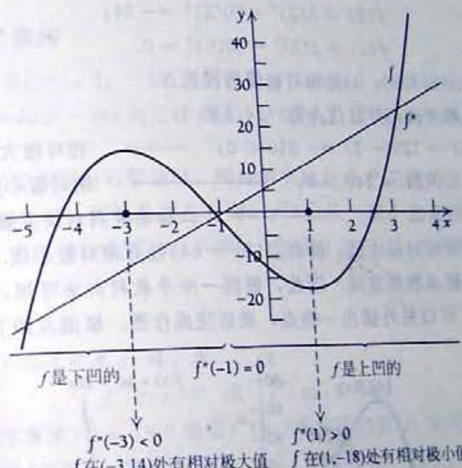


图 4

■

上机技术演练

探索 考虑下面给出的函数 f：

$$f(x)=x^3-3x^2-9x-1.$$

用绘图器来估计其相对极值，然后求其一阶导数和二阶导数．在同一个视窗内画出这两个图形．利用 ZERO 选项确定在哪些点其一阶导数为零．通过验算其二阶导数的符号验证在这些 x 值处是否有相对极值．[illegible]你的工作．

205~206

例 2 求由

$$f(x)=3x^5-20x^3$$

表示的函数 f 的相对极值，然后描绘其图形.

解 求其一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$：

$$f'(x)=15x^4-60x^2,$$
$$f''(x)=60x^3-120x.$$

然后解 $f'(x)=0$：

$$15x^4-60x^2=0$$
$$15x^2(x^2-4)=0$$
$$15x^2(x+2)(x-2)=0 \qquad \text{分解因式}$$
$$15x^2=0 \quad \text{或} \quad x+2=0 \quad \text{或} \quad x-2=0 \qquad \text{利用零乘积原理}$$
$$x=0 \quad \text{或} \quad x=-2 \quad \text{或} \quad x=2.$$

把它们代入原函数，求出第二个坐标：

$$f(-2)=3(-2)^5-20(-2)^3=64;$$
$$f(2)=3(2)^5-20(2)^3=-64;$$
$$f(0)=3(0)^5-20(0)^3=0.$$

点 $(-2,64)$，$(2,-64)$ 和 $(0,0)$ 是相对极值的候选点.

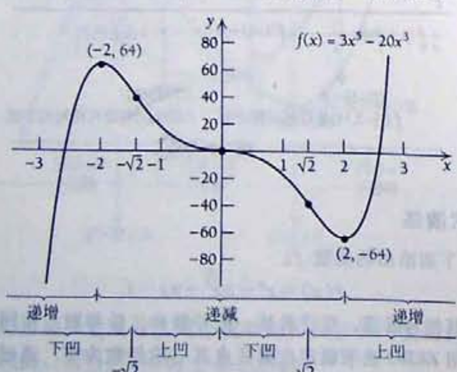
现在用二阶导数判别法，并且代入数 -2，2 和 0：

$f''(-2)=60(-2)^3-120(-2)=-240<0$； ⟶ 相对极大值

$f''(2)=60(2)^3-120(2)=240>0$； ⟶ 相对极小值

$f''(0)=60(0)^3-120(0)=0.$ ⟶ 二阶导数判别法失效. 用一阶导数判别法

因此在点 $(-2,64)$ 处有相对极大值，而在点 $(2,-64)$ 处有相对极小值. 考察其一阶导数，得知在 $x=0$ 的左侧和右侧函数都递减. 因此，根据一阶导数判别法可知，在点 $(0,0)$ 处函数无相对极值. 如果需要，可以另外描出一些点，最后完成作图. 极值点如下图所示.



■

207

拐点

拐点或**回折点**（point of inflection，inflection point）是指曲线经过该点时其凹性方向发生变化. 例如，在图 5 至图 7 中，点 P 是拐点.

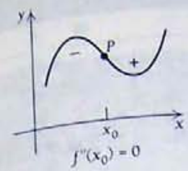


图 5

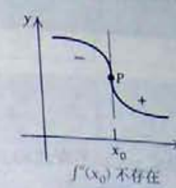


图 6

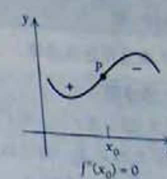


图 7

在本节已经讨论过的其他例子中也有拐点. 在例 1 中，曲线在点 $(-1,-2)$ 处有拐点，而在例 2 中，曲线在点 $(-\sqrt{2},28\sqrt{2})$，$(0,0)$ 和 $(\sqrt{2},-28\sqrt{2})$ 处有拐点.

上机技术演练

探索 用视窗 $[-3,3,-10,10]$ 作由 $f(x)=3x^5-5x^3$ 表示的函数 f 及其二阶导数 $f''(x)=60x^3-30x$ 的图形. 估计 f 的拐点. 在哪个点其二阶导数为 0?

当我们沿着图 5 中的曲线向右移动时，凹性的变化从点 P 左侧的下凹即 $f''(x)<0$，转向点 P 右侧的上凹即 $f''(x)>0$. 因为经过点 P 时，$f''(x)$ 从 $-$ 到 $+$ 改变符号，$f''(x_0)$ 在点 P 处的值必须是 0，如图 5 中所示；或 $f''(x_0)$ 不存在，如图 6 中所示. 关于凹性的一个类似变化出现在图 7 的点 P 上.

定理 6 **求拐点**

如果函数 f 有拐点出现在点 x_0 处，则

$$f''(x_0)=0 \quad \text{或} \quad f''(x_0)\text{不存在}.$$

因此，可以通过考察使 $f''(x_0)=0$ 或使 $f''(x_0)$ 不存在的数 x_0 来求候选拐点. 如果当 x 经过 x_0 时 $f''(x)$ 改变符号（见图 5～图 7），则在 $x=x_0$ 处有拐点. 如果 $f''(x)=k$，其中 $k\neq0$，则 x 不是候选拐点.

关于拐点的定理 6 与关于相对极值点的定理 2 完全类似. 定理 2 是说，当 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在时可能有相对极值. 定理 6 是说，当 $f''(x)=0$ 或 $f''(x)$ 不存在时可能有拐点.

曲线作图

到现在为止，在本章所学到的知识将大大提高我们作曲线图的能力. 我们采用下述步骤，先写出它的简略形式. 208

2007/08/16

作图步骤

a)导数.

b)f 的临界点.

c)递增与递减或递减与递增相对极值.

d)拐点.

e)凹性.

f)作图.

下面来详述其步骤.

作图步骤

a)导数. 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$.

b)f 的临界点. 通过解 $f'(x)=0$ 和求 $f'(x)$ 不存在的点来求临界点. 这些数成为相对极大值或相对极小值的候选点. 求在这些点处的函数值.

c)递增与递减或递减与递增相对极值. 用步骤 b)所求得的临界点划分区间. 确定在各个区间上 f 是否递增或递减. 这通过选取试验值并将其代入 $f'(x)$ 便可做到. 利用这一信息和(或)二阶导数就可以确定相对极大值和相对极小值.

d)拐点. 通过求使 $f''(x)=0$ 或 $f''(x)$ 不存在的点确定候选拐点. 求在这些点处的函数值.

e)凹性. 用步骤 d)所求得的候选拐点划分区间. 考察各区间, 看在其上是否 f' 递增(即 $f''(x)>0$)以及 f' 递减(即 $f''(x)<0$). 这通过选取试验值并将其代入 $f''(x)$ 便可做到.

f)作图. 用从步骤 a)到 e)的信息描绘图形. 如果需要的话, 另外再描出一些点(可用计算器来计算这些点).

例3 求由

$$f(x)=x^3-3x+2$$

209 给出的函数 f 的相对极大值和相对极小值, 并且描绘函数的图形.

解

a)导数. 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$:

$$f'(x)=3x^2-3,$$

$$f''(x)=6x.$$

b)f 的临界点. 通过求 $f'(x)$ 不存在的点以及解 $f'(x)=0$ 求 f 的临界点. 因为对所有 x 值 $f'(x)=3x^2-3$ 都存在, 所以临界点只是满足下述方程的值:

$$3x^2-3=0$$

$$3x^2=3$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1.$$

算出 $f(-1)=4$ 和 $f(1)=0$, 它们给出曲线上的点 $(-1,4)$ 和 $(1,0)$.

c)递增与递减或递减与递增相对极值. 求 f 的递增区间和递减区间. 临界点是 -1 和 1. 用这些点把实数轴划分成三个区间 $A(-\infty,-1)$、$B(-1,1)$ 和 $C(1,\infty)$. 在每一个区间上选一个试验值并且作代换. 所选试验值是 -2, 0 和 3:

A: 试验值 -2, $f'(-2)=3(-2)^2-3=9>0$;

B: 试验值 0, $f'(0)=3(0)^2-3=-3<0$;

C: 试验值 3, $f'(3)=3(3)^2-3=24>0$.

区间	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
试验值	$x=-2$	$x=0$	$x=3$
$f'(x)$ 的符号	$f'(-2)>0$	$f'(0)<0$	$f'(3)>0$
结果	f 递增	f 递减	f 递增

有变化 说明有相对极大值; $f''(-1)<0$

有变化 说明有相对极小值; $f''(1)>0$

因此, 根据一阶导数判别法, 在点 $(-1,4)$ 有相对极大值, 而在点 $(1,0)$ 有相对极小值. 这些值是相对极值的结论也可以用二阶导数判别法来验证: $f''(-1)<0$ 说明 $(-1,4)$ 是相对极大值点, 而 $f''(1)>0$ 说明 $(1,0)$ 是相对极小值点.

d)拐点. 通过求使 $f''(x)$ 不存在的点和解 $f''(x)=0$ 求可能的拐点. 因为对所有的 x 值 $f''(x)=6x$ 都存在, 所以尝试解 $f''(x)=0$:

$$6x=0,$$

$$x=0.$$

算出 $f(0)=2$, 它给出位于曲线上的另一点 $(0,2)$. 210

e)凹性. 求 f 的上凹和下凹的区间. 这通过用步骤 d)中所求得的数来确定在哪个区间 f' 递增而在哪个区间 f' 递减便可做到. 这样的数只有 0. 用这个点把实数轴分成两个区间: $A(-\infty,0)$ 和 $B(0,\infty)$. 在每个区间选一个试验值并把它们代入 f''. 所选试验值是 -4 和 4:

A: 试验值 -4, $f''(-4)=6(-4)=-24<0$;

B: 试验值 4, $f''(4)=6(4)=24>0$.

区间	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
试验值	$x=-4$	$x=4$
f'' 的符号	$f''(-4)<0$	$f''(4)>0$
结果	f' 递减; f 下凹	f' 递增, f 上凹

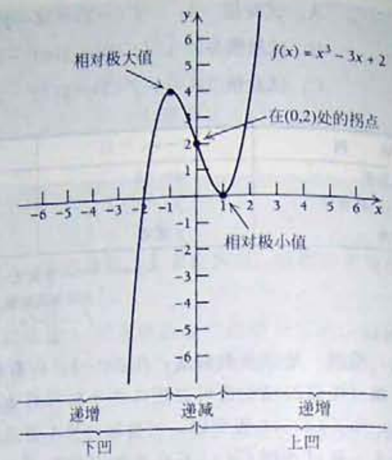
有变化 说明有拐点

因为 f' 在区间 $(-\infty,0)$ 上递减而在区间 $(0,\infty)$ 上递增, 所以 f 在 $(-\infty,0)$ 上下凹而在 $(0,\infty)$ 上上凹. 曲线在经过 $(0,2)$ 时改变凹性方向.

f)作图. 用左下表中的信息描绘曲线. 如果需要, 还可计算另一些函数值. 图形如右下图所示.

2007/08/16

x	$f(x)$
-3	-16
-2	0
-1	4
0	2
1	0
2	4
3	20



上机技术演练

211 用绘图器验证例 3 的结果.

例 4 求由

$$f(x)=x^4-2x^2$$

给出的函数 f 的相对极大值和相对极小值，并描绘函数的图形.

解

a) 导数. 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$:

$$f'(x)=4x^3-4x,$$
$$f''(x)=12x^2-4.$$

b) f 的临界点. 因为 $f'(x)=4x^3-4x$ 对所有 x 的值都存在，所以 f 的临界点只是满足下述方程的值:

$$4x^3-4x=0$$
$$4x(x^2-1)=0$$
$$4x=0 \quad 或 \quad x^2-1=0$$
$$x=0 \quad 或 \quad x^2=1$$
$$x=\pm 1.$$

计算出 $f(0)=0$，$f(-1)=-1$ 和 $f(1)=-1$，它们给出曲线上的点 $(0, 0)$，$(-1, -1)$ 和 $(1, -1)$.

c) 递增与递减或递减与递增相对极值. 用 f 的临界点，即 -1，0 和 1 把实数轴划分为四个区间：$A(-\infty, -1)$，$B(-1, 0)$，$C(0, 1)$ 和 $D(1, \infty)$. 在每一个区间上选一个试验值并

作代换. 所选试验值是 -2，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$ 和 2:

A: 试验值 -2，$f'(-2)=4(-2)^3-4(-2)=-24<0$;

B: 试验值 $-\frac{1}{2}$，$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=4\left(-\frac{1}{2}\right)^3-4\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}>0$;

C: 试验值 $\frac{1}{2}$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{1}{2}\right)^3-4\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}<0$;

D: 试验值 2，$f'(2)=4(2)^3-4(2)=24>0$.

区间	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
试验值	$x=-2$	$x=-\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$x=2$
$f'(x)$ 的符号	$f'(-2)<0$	$f'\left(-\frac{1}{2}\right)>0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right)<0$	$f'(2)>0$
结果	f 递减	f 递增	f 递减	f 递增

有变化 说明有相对极小值；$f''(-1)>0$　有变化 说明有相对极大值；$f''(0)<0$　有变化 说明有相对极小值；$f''(1)>0$ 212

因此，根据一阶导数判别法，在 $(0, 0)$ 处有相对极大值，而在 $(-1, -1)$ 和 $(1, -1)$ 处各有一个相对极小值. 这些值是相对极值也可以用二阶导数判别法来验证：$f''(0)<0$，$f''(-1)>0$ 和 $f''(1)>0$.

d) 拐点. 求使 $f''(x)$ 不存在的点和使 $f''(x)=0$ 的值. 因为 $f''(x)$ 对所有实数都存在，所以我们只解 $f''(x)=0$:

$$12x^2-4=0$$
$$4(3x^2-1)=0$$
$$3x^2-1=0$$
$$3x^2=1$$
$$x^2=\frac{1}{3}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

计算出

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}=-\frac{5}{9}$$

和

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{5}{9}.$$

这给出曲线上的点

2007/08/16

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right) 和 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$$

或近似点(−0.6, −0.6)和(0.6, −0.6).

e)凹性. 求 f 的上凹和下凹区间. 这通过用步骤 d)中所求得的数来确定在哪个区间 f' 递增而在哪个区间 f' 递减便可做到. 这些数把实数轴分成三个区间：

$$A\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad B\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) 和 C\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right).$$

接下来, 在每个区间内选一个试验值并把它们代入 f''. 所选试验值是 −1, 0 和 1：

A：试验值 −1, $f''(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 8 > 0$；

B：试验值 0, $f''(0) = 12(0)^2 - 4 = -4 < 0$；

C：试验值 1, $f''(1) = 12(1)^2 - 4 = 8 > 0$.

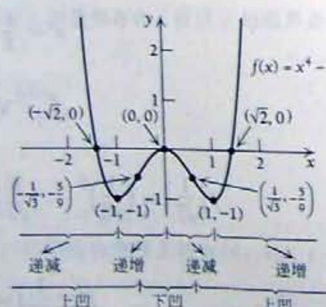
区间	$(-\infty, -1/\sqrt{3})$	$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	$(1/\sqrt{3}, \infty)$
试验值	$x=-1$	$x=0$	$x=1$
f''的符号	$f''(-1)>0$	$f''(0)<0$	$f''(1)>0$
结果	f'递增；f上凹	f'递减；f下凹	f'递增；f上凹

有变化 说明有一个拐点　　有变化 说明有一个拐点

因此, f' 在区间 $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ 上递增, 在区间 $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ 上递减, 在区间 $(1/\sqrt{3}, \infty)$ 上递增. 函数 f 在 $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ 和 $(1/\sqrt{3}, \infty)$ 上上凹, 而在 $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ 上下凹. 曲线经过点 $(-1/\sqrt{3}, -5/9)$ 和 $(1/\sqrt{3}, -5/9)$ 时改变凹性方向, 所以这些点是拐点.

f)作图. 用左下表中的信息描绘曲线. 通过解 $x^4 - 2x^2 = 0$ 容易求得其 x 截距, 相应的点是 $(-\sqrt{2}, 0)$, (0, 0) 和 $(\sqrt{2}, 0)$. 这对作图也有帮助. 若有必要, 可另外计算一些函数值. 图形如右下图所示.

x	$f(x)$, 近似值
−2	8
−1.5	0.56
−1	−1
−0.5	−0.44
0	0
0.5	−0.44
1	−1
1.5	0.56
2	8



■

上机技术演练

用绘图器验证例 4 的结果.

练习

1. 考虑 $f(x) = x^3(x-2)^3$. 你事先能求出几个相对极值? 你认为它们将是哪些点?

用视窗[−1, 3, −2, 6]作 f, f' 和 f''. 估计 f 的相对极值和拐点, 然后用例 3 和例 4 的分析方法验证你的工作.

习题 3.2

求函数的相对极值, 用有序对列出答案. 尽量用二阶导数判别法. 描绘函数的图形.

1. $f(x)=2-x^2$　　2. $f(x)=3-x^2$

3. $f(x)=x^2+x-1$　　4. $f(x)=x^2-x$

5. $f(x)=-4x^2+3x-1$　　6. $f(x)=7-8x+5x^2$

7. $f(x)=2x^3-3x^2-36x+28$

8. $f(x)=3x^3-36x-3$

9. $f(x)=\frac{8}{3}x^3-2x+\frac{1}{3}$

10. $f(x)=80-9x^2-x^3$

11. $f(x)=-x^3+3x^2-4$

12. $f(x)=-x^3+3x-2$

13. $f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$

14. $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+5$

15. $f(x)=(x+1)^{2/3}$　　16. $f(x)=(x-1)^{2/3}$

17. $f(x)=x^4-6x^2$　　18. $f(x)=2x^2-x^4$

19. $f(x)=x^3-2x^2-4x+3$

20. $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$

21. $f(x)=3x^4+4x^3$

22. $f(x)=x^4-2x^3$

23. $f(x)=x^3-6x^2-135x$

24. $f(x)=x^3-3x^2-144x-140$

25. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$　　26. $f(x)=\frac{8x}{x^2+1}$

27. $f(x)=\frac{3}{x^2+1}$　　28. $f(x)=\frac{-4}{x^2+1}$

29. $f(x)=(x-1)^3$　　30. $f(x)=(x+2)^3$

31. $f(x)=x^2(1-x)^2$　　32. $f(x)=x^2(3-x)^2$

33. $f(x)=20x^3-3x^5$　　34. $f(x)=5x^3-3x^5$

35. $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$　　36. $f(x)=-x\sqrt{1-x^2}$

37. $f(x)=(x-1)^{1/3}-1$　　38. $f(x)=2-x^{1/3}$

求所有的拐点, 如果有的话.

39. $f(x)=x^3+3x+1$

40. $f(x)=x^3-6x^2+12x-6$

41. $f(x)=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x$

42. $f(x)=x^3-4x^2+10$

43～84. 用绘图器验证 1～42 题中每一题的结果.

213 | 214

应用

商业与经济

总收益、总成本和总利润. 用同一个坐标系描绘总收益、总成本和总利润函数的图形.

85. $R(x)=50x-0.5x^2$,　$C(x)=4x+10$

86. $R(x)=50x-0.5x^2$,　$C(x)=10x+3$

87. 小企业. 由非农场主产生的收入在美国国民收入中所占百分比可用函数

$$p(x)=\frac{13x^3-240x^2-2\,460x+585\,000}{75\,000}$$

来建模, 其中 x 是从 1970 年算起的年数. 对于 $0 \leqslant x \leqslant 40$, 描绘这个函数的图形.

88. 人力. 45～54 岁间美国民用人力所占百分比可以用函数

$$f(x)=0.025x^2-0.71x+20.44$$

来建模, 其中 x 是 1970 年后的年数. 描绘这个函数在 $0 \leqslant x \leqslant 30$ 间的图形.

生命科学与物理学

当异物进入气管时, 人就会咳嗽.

其半径是 20 毫米. 如果异物的半径为 r(毫米), 则用咳嗽排除异物所需速度 V(毫米/秒)可以表示成

$$V(r)=k(20r^2-r^3),\quad 0\leqslant r\leqslant 20,$$

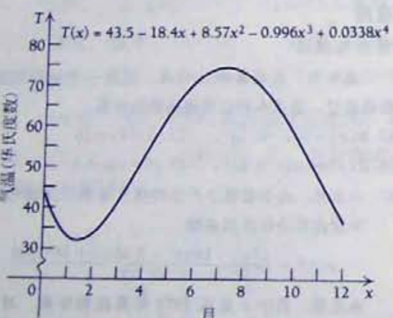
其中 k 是某个正常数. 对于多大的异物, 需用最大的咳嗽速度方可排出该异物?



90. 纽约的气温. 纽约的平均气温可近似地表示成函数

$$T(x)=43.5-18.4x+8.57x^2-0.996x^3+0.0338x^4,$$

其中 T 表示华氏温度度数, $x=1$ 表示一月的平均气温, $x=2$ 表示二月的平均气温, 等等. (资料来源: www. World Climate. com.)



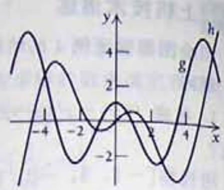
a)根据图形, 预计纽约的最高气温出现在什么时候?

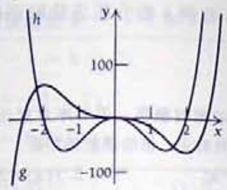
b)根据图形, 预计纽约的最低气温出现在什么时候?

*c)用二阶导数判别法求函数 $T(x)$ 的拐点. 这些点具有什么意义?

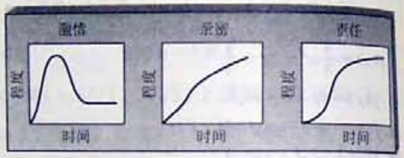
综合题

*在 91 题和 92 题中, 确定哪个图形是另一个图形的导数并说明理由.





社会科学: 爱的三个方面. 耶鲁大学的研究人员已经提出, 下述图形可以表示三个不同方面的爱.



资料来源: "A Triangular Theory of Love," by R.J. Sternberg, 1986, *Psychological Review*, 93(2), 119-135. Copyright 1986 by the American Psychological Association, Inc. Reprinted by permission.

*93. 用你学到的概念(相对极值, 凹性, 递增, 递减等)分析这些图形.

*94. 你同意研究人员提出的这些图形的形状吗? 试说明理由.

上机技术演练

作函数图形. 估计每一个相对极值.

95. $f(x)=3x^{2/3}-2x$　　96. $f(x)=4x-6x^{2/3}$

97. $f(x)=x^2(x-2)^3$　　98. $f(x)=x^2(1-x)^3$

99. $f(x)=x-\sqrt{x}$

100. $f(x)=(x-1)^{2/3}-(x+1)^{2/3}$

*101. 社会科学: 使用家用计算机的时间. 下列数据述及年龄为 x 的人每月使用家用计算机的平均分钟数.

年龄(年)	平均使用时间(分/每月)
6.5	363
14.5	645
21	1 377
29.5	1 727
39.5	1 696
49.5	2 052
55 及以上	2 299

资料来源: Media Matrix; The PC Meter Company

a)试用 1.5 节的回归程序分别求线性函数、三次函数和四次函数 $y=f(x)$ 与表中数据的拟合. 其中, x 是年龄, 而 y 是每月的平均分钟数. 确定哪个函数与表中数据拟合得最好. 说明理由.

b)函数的定义域是什么?

c)函数有相对极值吗? 说明理由.

215~216

3.3 描绘函数的图形: 渐近线与有理函数

要点

- 求极限, 包括无穷大.
- 作有理函数的图形.

有理函数

至此, 我们已全面考虑了如何用微分学这一工具作连续函数的图形. 现在要考虑一些非连续函数, 其中大部分是有理函数. 我们的绘图方法不得不涉及图形的非连续性以及某些称之为渐近线的直线.

先回顾一下有理函数的定义.

定义 有理函数是指可以表示成

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

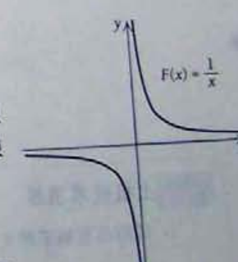
的函数 f, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是多项式且 $Q(x)$ 是非零多项式. f 的定义域由所有使 $Q(x)\neq 0$ 的输入 x 组成.

多项式本身就是一类特殊的有理函数, 因为 $Q(x)$ 可以是多项式 1. 这里, 我们所考虑的是其分母不是常数的有理函数的图形. 但是, 我们先得再讨论极限.

极限与无穷大

再考察有理函数 $F(x)=1/x$ 的图形. 我们知道

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\quad 不存在.$$



看一看右边的图形, 注意到当 x 从右边趋近于 0 时, 输出无限制地增大. 这些数不趋近于任何实数, 虽然也可以说其右极限是无穷大(∞). 即

217

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty.$$

当 x 从左边趋近于 0 时, 输出为负且无限制地减小. 这些数不趋近于任何实数, 虽然也可以说其左极限是负无穷大($-\infty$), 即

2007/08/16

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty.$$

注意∞和−∞都不是实数．我们把∞与沿着正向无限制地增大的数联系起来，如用区间记号(2，∞)．我们还把−∞与沿着负方向无限制地减小的数联系起来，如用区间记号(−∞，8)．

有时，需要确定当输入无限制地变得越来越大时，即它们趋近于无穷大时的极限．在这种情形，我们是求在无穷远点处的极限(limits at infinity)．这个极限可表示成

$$\lim_{x\to\infty}f(x).$$

例1 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x}.$$

解 所考虑的函数是有理函数．求这个极限的方法之一是用输入-输出表，如下，采用逐渐增大的 x 值．

输入，x	1	10	50	100	2 000
输出，$\frac{3x-1}{x}$	2.0	2.9	2.98	2.99	2.999 5

当输入无限制地变得越来越大时，输出越来越接近于 3．因而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x}=3.$$

求这个极限的另一个方法是利用一些代数知识以及如下事实：对任一正整数 n 以及任意常数 a 和 b，$a\neq 0$，都有

$$\frac{b}{ax^n}\to 0,\quad 当 x\to\infty 时.$$

我们乘以 1，即乘 $(1/x)\div(1/x)$．这相当于分子和分母都除以 x：

218

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x}\cdot\frac{(1/x)}{(1/x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-1)\frac{1}{x}}{x\cdot\frac{1}{x}}$$

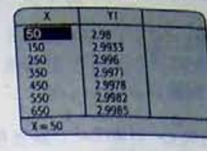
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x\cdot\frac{1}{x}-1\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)$$

$$=3-0=3.$$ ■

上机技术演练

1. 试用具有越来越大的 x 值的 TABLE 选项验证极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x}=3.$$

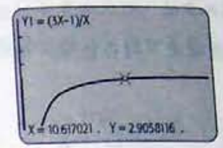


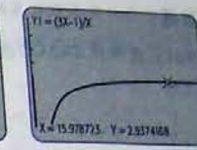


2. 用 DOT 模式作函数

$$f(x)=\frac{3x-1}{x}$$

的图形．然后利用 TRACE 选项沿着图形从左到右移动光标，并且观察 y 坐标的变化过程．





练习 考察极限 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x}$．

1. 用 TABLE 选项求极限．
2. 用 DOT 模式作函数的图形，然后用 TRACE 选项求极限．

例2 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-7x+2}{7x^2+5x+1}.$$

解 这个函数是有理函数．它涉及两个多项式的商．多项式的次数是它的最高次幂．注意到以上每个多项式的次数都是 2．

在分母中 x 的最高次幂是 x^2．分子和分母同除以 x^2：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-7x+2}{7x^2+5x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}}{7+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3-0+0}{7+0+0}=\frac{3}{7}.$$ ■ 219

例3 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+7x+9}{3x^3+2x-4}.$$

解 分母中 x 的最高次幂是 x^3．分子和分母同除以 x^3：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+7x+9}{3x^3+2x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{9}{x^3}}{3+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}}=\frac{0+0+0}{3+0-0}=\frac{0}{3}=0.$$ ■

2007/08/16

例4 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-8x-6}{3x^2+5x+2}.$$

解 分母中 x 的最高次幂是 x^2. 分子和分母同除以 x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-8x-6}{3x^2+5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-\frac{8}{x}-\frac{6}{x^2}}{3+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}7x^3-0-0}{3+0+0}=\infty.$$

在这种情形，分子沿正向无限制地增长而分母趋近于 3. 这可以用输入-输出表来验证. 因此极限是∞. ■

上机技术演练

练习 试用 **TABLE** 选项和 **TRACE** 选项求下列各极限. 然后用例 1～例 4 的分析过程验证你的工作.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-7}{3x^2-4x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+4}{2x^2-3}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{4x+5}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+x-6}$

有理函数的图形

图 1 表示有理函数

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x-6}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+3)}$$

的图形.

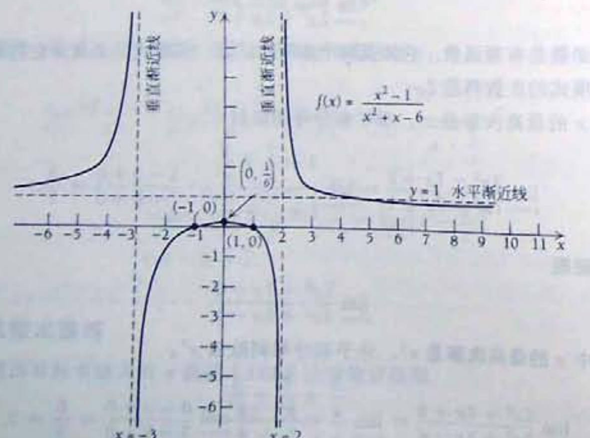


图 1

下面对这个图形作一些点评.

首先注意到，当 x 从左边趋近于 2 时，函数值沿负方向变得越来越小，即趋近于 $-\infty$. 当 x 从右边趋近于 2 时，函数值沿正向变得越来越大. 于是，

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty \quad 和 \quad \lim_{x\to2^+}f(x)=\infty.$$

对于这个图形，我们把直线 $x=2$ 看作"极限线"，称之为垂直渐近线. 类似地，直线 $x=-3$ 也是垂直渐近线.

定义 直线 $x=a$ 为**垂直渐近线**(vertical asymptote)，是指下述极限命题中的任一个成立：

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty \quad 或$$
$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty.$$

有理函数的图形决不会经过垂直渐近线. 如果确定有理函数的表达式已化简成除 −1 或 1 以外其分子和分母没有其他公因子，那么，当 a 是使其分母为 0 的输入时，直线 $x=a$ 就是垂直渐近线.

例如，

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

在 $x=1$ 处没有垂直渐近线，即使 1 是使其分母为 0 的输入. 这是因为，$(x^2-1)/(x-1)$ 尚未化简；即它有 $x-1$ 作为其分子和分母的公因子. 可是，

$$g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x-6}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x+3)}$$

已化简，且 $x=2$ 和 $x=-3$ 为垂直渐近线.

图 2 说明了垂直渐近线可能出现的四种形式.

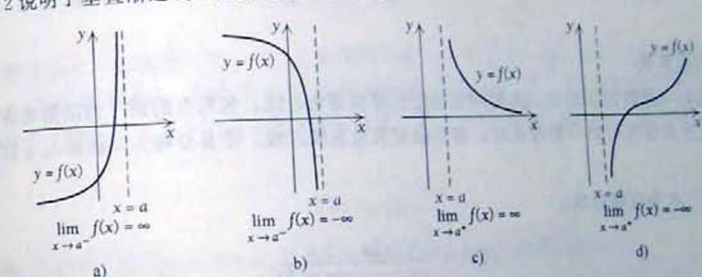


图 2

再考察图 1 中的曲线. 注意到当 x 趋近于 $-\infty$ 时函数值越来越接近于 1. 这表示当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)\to1$. 另外，当 x 趋近于 ∞ 时函数值越来越接近于 1. 这表示当 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to1$. (该曲线实际上经过了水平渐近线 $y=1$，然后又返回到渐近线.)因而

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=1 \quad 和 \quad \lim_{x\to\infty}f(x)=1.$$

直线 $y=1$ 称为水平渐近线.

2007/08/16

上机技术演练

用绘图器上的 GRAPH 选项、TABLE 选项和 TRACE 选项验证极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{(x-2)(x+3)}=1.$$

定义　直线 $y=b$ 为**水平渐近线**(horizontal asymptote)，是指下述极限命题中的一个或两个成立：

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=b.$$

有理函数的图形可能经过也可能不经过水平渐近线．当其分子的次数小于或等于分母的次数时有水平渐近线．

在图 3～图 5 中，可看到水平渐近线可能出现的三种形式．

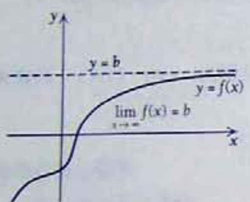


图 3

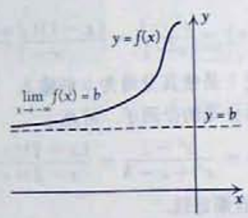


图 4

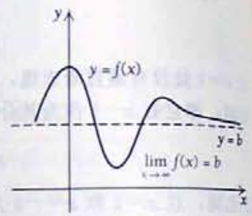


图 5

渐近线的存在性

222　在画有理函数的图形时，重要的是确定在哪里有渐近线，如果有的话．当函数表达式已是简化形式且其分母可以分解因式时，容易确定其垂直渐近线．使其分母为 0 的输入 x 给出垂直渐近线．

例 5　求垂直渐近线：

$$f(x)=\frac{3x-2}{x(x-5)(x+3)}.$$

解　函数表达式已是简化形式．垂直渐近线是直线 $x=0$，$x=5$ 和 $x=-3$．　■

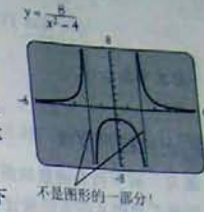
例 6　求垂直渐近线：

$$f(x)=\frac{x-2}{x^3-x}=\frac{x-2}{x(x-1)(x+1)}.$$

解　函数表达式已是简化形式．垂直渐近线是直线 $x=0$，$x=-1$ 和 $x=1$．　■

上机技术演练

渐近线　当绘图器处于 CONNECTED 模式时，下面的讨论可以把术语"垂直渐近线"附加到与有理函数的图形同时出现的神秘竖直线上．例如，用视窗 $[-6, 6, -8, 8]$ 考察 $f(x)=8/(x^2-4)$ 的图形．在 $x=-2$ 和 $x=2$ 两处出现了垂直渐近线．这些直线不是图形的一部分．



练习　在 DOT 模式和 CONNECTED 模式下画下列每个函数的图形．试直观确定其垂直渐近线，然后用例 1 和例 2 的方法验证你的结果．你可能需要尝试不同的视窗．

1. $f(x)=\dfrac{x^2+7x+10}{x^2+3x-28}$　　2. $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^3-x^2-6x}$

例 7　求水平渐近线：

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^3-2x^2+4}.$$

解　因为分子的次数小于分母的次数，所以有水平渐近线．分子和分母同除以 x^3，并且求当 x 趋近于 ∞ 和 $-\infty$ 时，即 $|x|$ 变得越来越大时的极限：

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^3-2x^2+4}=\frac{\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^3}}.$$

当 x 沿负方向变得越来越小时，$|x|$ 变得越来越大．类似地，当 x 沿正方向变得越来越大时，$|x|$ 变得越来越大．于是当 $|x|$ 变得很大时，分母中含有 x 或 x 的某次幂的每个式子都取趋近于 0 的值．因而分子趋近于 0 而分母趋近于 1；因此整个函数表达式取趋近于 0 的值．我们有

$$f(x)\approx\frac{0+0}{1-0+0}.$$　■

因而 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ 且 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$．于是，x 轴即直线 $y=0$ 是水平渐近线．

例 8　求水平渐近线：　223

$$f(x)=\frac{3x^2+2x-4}{2x^2-x+1}.$$

解　分子和分母有相同的次数，所以有水平渐近线．分子和分母同除以 x^2，然后求当 $|x|$ 变得越来越大时的极限：

$$f(x)=\frac{3x^2+2x-4}{2x^2-x+1}=\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

2007/08/16

当 $|x|$ 变得很大时，分子趋近于 3 而分母趋近于 2. 因此函数越来越接近于 $\frac{3}{2}$. 于是

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{3}{2} \quad 和 \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{3}{2}.$$

直线 $y=\frac{3}{2}$ 是水平渐近线. ■

上机技术演练

练习 画下列各函数的图形。试用 **TABLE** 选项和 **TRACE** 选项确定水平渐近线. 用例 7 和例 8 的方法验证你的结果。

1. $f(x)=\frac{x^2+5}{x^3-x^2-6x}$
2. $f(x)=\frac{9x^4-7x^2-9}{3x^4+7x^2+9}$
3. $f(x)=\frac{135x^5-x^2}{x^7}$
4. $f(x)=\frac{3x^2-4x+3}{6x^2+2x-5}$

当分子的次数小于分母的次数时，x 轴或直线 $y=0$ 是水平渐近线.

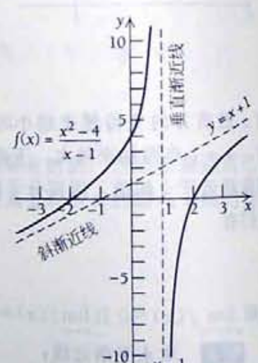
当分子的次数与分母的次数相同时，直线 $y=a/b$ 是水平渐近线，其中 a 是分子的首系数而 b 是分母的首系数.

斜渐近线

存在既不是垂直渐近线又不是水平渐近线的渐近线. 例如，在右边所示的

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}$$

的图形中，直线 $x=1$ 是垂直渐近线. 注意到当 $|x|$ 变得越来越大时，曲线与 $y=x+1$ 变得越来越近. 直线 $y=x+1$ 称为斜渐近线.



定义 直线 $y=mx+b$ 是有理函数 $f(x)=P(x)/Q(x)$ 的**斜渐近线**(oblique asymptote)，是指 $f(x)$ 可以表示成

224

$$f(x)=(mx+b)+g(x),$$

其中当 $|x|$ 趋近于∞时 $g(x)$ 趋近于 0. 当分子的次数恰好比分母的次数多 1 时，有斜渐近线. 函数图形可能经过斜渐近线.

如何求斜渐近线呢？一个办法是用除法.

例 9 求斜渐近线：

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}.$$

解 当用分母除分子时，得到商 $x+1$ 和余项 -3. 因而

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}=(x+1)+\frac{-3}{x-1}.$$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x-1\overline{)\,x^2 \qquad -4} \\ \underline{x^2-x} \\ x-4 \\ \underline{x-1} \\ -3 \end{array}$$

现在可以看到，当 $|x|$ 变得很大时，$-3/(x-1)$ 趋近于 0. 因而，对很大的 $|x|$，表示式 $x+1$ 是

$$(x+1)+\frac{-3}{x-1}$$

的主要部分. 因此 $y=x+1$ 是斜渐近线. ■

上机技术演练

练习 画下列各函数的图形. 试直观确定其斜渐近线，然后用例 9 的方法求斜渐近线，并且与原函数一起画出其图形.

1. $f(x)=\frac{3x^2-7x+8}{x-2}$
2. $f(x)=\frac{5x^3+2x+1}{x^2-4}$

截距

如果一个函数有 x **截距**，则它们出现在使 $y=f(x)=0$ 的那些 x 值，并且给出其函数图形与 x 轴相交的各个点. 如果一个函数有 y **截距**，则它出现在使 $x=0$ 的 y 值，并且给出其函数图形与 y 轴相交的一个点.

例 10 求

$$f(x)=\frac{x^3-x^2-6x}{x^2-3x+2}$$

的截距.

解 对分子和分母作因式分解：

$$f(x)=\frac{x(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}.$$

为求 x 截距，解方程 $f(x)=0$. 这些解出现在分子为 0 而分母不为 0 的情形. 解方程

$$x(x+2)(x-3)=0,$$

使分子为 0 的 x 值是 0，-2 和 3. 因为这些值中没有一个使分母为 0，它们给出函数的 x 截距：(0, 0)，(−2, 0)和(3, 0).

为求 y 截距，令 $x=0$：

$$f(0)=\frac{0^3-0^2-6(0)}{0^2-3(0)+2}=0.$$

对于本例，y 截距也是 x 截距，即(0, 0).

2007/08/16

上机技术演练

练习 画下列每个函数的图形. 用 ZERO 选项和处在 ASK 模式下的表格求 x 截距和 y 截距.

1. $f(x)=\dfrac{x(x-3)(x+5)}{(x+2)(x-4)}$　　2. $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^2+5}$

描绘图形

现在可以进一步深化作图的分析步骤.

绘图步骤

a)截距. 求图形的(诸)x 截距和 y 截距.

b)渐近线. 求垂直渐近线、水平渐近线和斜渐近线.

c)导数. 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$.

d)使 f 无定义的值和 f 的临界点. 令分母为 0, 求使函数无定义的输入. 同时求 f 的临界点.

e)递增与递减或递减与递增相对极值. 用步骤 d)中所求的点确定函数 f 是递增或是递减的区间. 用这些信息和(或)二阶导数确定相对极大值和相对极小值. 相对极值只可能出现在使 $f(c)$ 存在的点 c 处.

f)拐点. 通过求在其上使 $f''(x)$ 不存在或 $f''(x)=0$ 的那些点 x 确定候选拐点. 求这些点处的函数值. 如果 $f(x)$ 不存在, 则该函数在 x 处没有拐点.

g)凹性. 用从步骤 f)求得的值 c 作为区间的端点. 通过验算来确定凹性, 看在哪一段区间 f' 递增(即 $f''(x)>0$)及在哪一段区间 f' 递减(即 $f''(x)<0$). 这通过选择试验值并将其代入 $f''(x)$ 便可做到.

h)作图. 用从步骤 a)到 g)得到的信息来作图, 如果需要, 可另外描出一些点(可用计算器计算这些点).

例 11 描绘 $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$ 的图形.

解

a)截距. x 截距出现在其分子为 0 而分母不为 0 的那些点. 因为此时分子是常数 8, 所以不存在 x 截距. 为求 y 截距, 计算 $f(0)$:

225~226 $$f(0)=\frac{8}{0^2-4}=\frac{8}{-4}=-2.$$

这给出曲线上的一点$(0,\ -2)$.

b)渐近线.

垂直渐近线: 分母 $x^2-4=(x+2)(x-2)$. 对于 x 值 -2 和 2, 分母为 0. 因而该曲线有垂直渐近线 $x=-2$ 和 $x=2$. 用虚线描绘这些渐近线(它们不是实际曲线的一部分).

水平渐近线: 其分子的次数小于其分母的次数, 所以 x 轴或直线 $y=0$ 是水平渐近线. 它已作为坐标轴画出了.

斜渐近线: 不存在斜渐近线, 因为分子的次数不是比分母的次数多 1.

c)导数. 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$. 用商法则可得

$$f'(x)=\frac{-16x}{(x^2-4)^2}\quad 和\quad f''(x)=\frac{16(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

d)使 f 无定义的值和 f 的临界点. 原函数的定义域是除 -2 和 2 以外的所有实数, 在 $x=-2$ 和 $x=2$ 处有垂直渐近线. 通过考察使 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的那些值求 f 的临界点. 现在, 对于使 $-16x=0$ 而使分母不为 0 的 x 值, 有 $f'(x)=0$. 这样的数只有 0 自身. 在 -2 和 2 两处导数 $f'(x)$ 不存在. 因此, 使 f 无定义的值和临界点是 -2, 0 和 2.

e)递增与递减或递减与递增相对极值. 用使 f 无定义的值和临界点划分 f 是递增的区间和 f 是递减的区间. 所考虑的点是 -2, 0 和 2. 这些点把实数轴分成四个区间. 在每一个区间内选一个试验值并且把它们代入导数 f':

$$A: 试验值 -3,\quad f'(-3)=\frac{-16(-3)}{[(-3)^2-4]^2}=\frac{48}{25}>0;$$

$$B: 试验值 -1,\quad f'(-1)=\frac{-16(-1)}{[(-1)^2-4]^2}=\frac{16}{9}>0;$$

$$C: 试验值 1,\quad f'(1)=\frac{-16(1)}{[(1)^2-4]^2}=\frac{-16}{9}<0;$$

$$D: 试验值 3,\quad f'(3)=\frac{-16(3)}{[(3)^2-4]^2}=\frac{-48}{25}<0.$$

区　间	$(-\infty,\ -2)$	$(-2,\ 0)$	$(0,\ 2)$	$(2,\ \infty)$
试验值 $f'(x)$ 的符号 结果	$x=-3$ $f'(-3)>0$ f 递增	$x=-1$ $f'(-1)>0$ f 递增	$x=1$ $f'(1)<0$ f 递减	$x=3$ $f'(3)<0$ f 递减

没有变化　　有变化说明在 $x=0$ 处有相对极大值　　没有变化

227

因为 $f(0)=-2$, 所以在点$(0,\ -2)$处有一个相对极大值.

f)拐点. 通过求使 $f''(x)$ 不存在和 $f''(x)=0$ 的点来确定候选拐点. 因为在 -2 和 2 两处 $f(x)$ 不存在, 所以在 -2 和 2 两处 $f''(x)$ 也不存在. 然后确定在哪些点 $f''(x)=0$, 或

$$16(3x^2+4)=0.$$

但是, 对所有实数 x 都有 $16(3x^2+4)>0$, 又因为 $f(-2)$ 和 $f(2)$ 不存在, 所以没有拐点.

g)凹性. 用步骤 f)中所求的值作为区间的端点. 通过验算来确定凹性, 看在哪一段区间 f' 递增和递减. 点 -2 和 2 把实数轴分成三个区间. 在每个区间选一个试验值并且把它们代入 f'':

$$A: 试验值 -3,\quad f''(-3)=\frac{16[3(-3)^2+4]}{[(-3)^2-4]^3}>0;$$

$$B: 试验值 0,\quad f''(0)=\frac{16[3(0)^2+4]}{[(0)^2-4]^3}<0;$$

2007/08/16

C：试验值 3，　$f''(3)=\dfrac{16[3(3)^2+4]}{[(3)^2-4]^3}>0.$

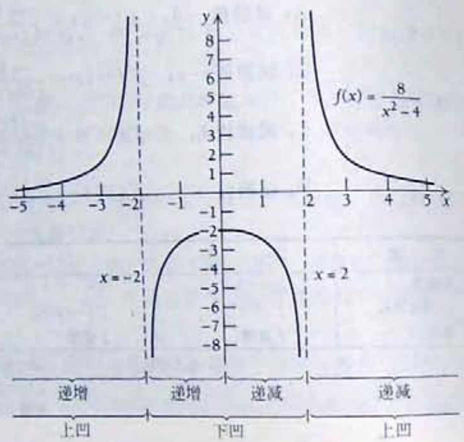
区　间	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
试验值 $f''(x)$的符号 结果	$x=-3$ $f''(-3)>0$ f'递增；f上凹	$x=0$ $f''(0)<0$ f'递减；f下凹	$x=3$ $f''(3)>0$ f'递增；f上凹

变化并不表示有拐点，因为 $f(-2)$ 不存在　　变化并不表示有拐点，因为 $f(2)$ 不存在

函数在区间$(-\infty,-2)$和$(2,\infty)$上是上凹的，在区间$(-2,2)$上是下凹的.

h)作图．用左下表中的信息来描绘图形，如果需要，用从计算器计算出的值描出另一些点．图形如右下图所示．

x	$f(x)$，近似值
−5	0.38
−4	0.67
−3	1.6
−1	−2.67
0	−2
1	−2.67
3	1.6
4	0.67
5	0.38



■

上机技术演练

用绘图器验证例 11 的结果.

例 12　描绘 $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$ 的图形.

解

a)截距．方程 $f(x)=0$ 无实数解，因而无 x 截距．数 0 不在函数定义域内，因而无 y 截距.

b)渐近线.

垂直渐近线：其分母是 x．因为用 0 代替 x 使分母为 0，所以直线 $x=0$ 是垂直渐近线.

水平渐近线：因为分子的次数大于分母的次数，所以没有水平渐近线.

斜渐近线：因为分子的次数比分母的次数多 1 次，所以有斜渐近线．我们作除法，且把原函数表示成形式

$$x\overline{)x^2+4}\quad\text{商 }x,\ \text{余 }4$$

$$f(x)=x+\frac{4}{x}.$$

当$|x|$变得越来越大时，表示式 $4/x$ 趋近于 0，所以直线 $y=x$ 是斜渐近线.

c)导数．求 $f'(x)$和$f''(x)$：

$$f'(x)=1-4x^{-2}=1-\frac{4}{x^2};$$

$$f''(x)=8x^{-3}=\frac{8}{x^3}.$$

228～229

d)使 f 无定义的值和 f 的临界点．数 0 不在 f 的定义域内．除了数 0 外，对 x 的所有值，其导数存在．因此，为求临界点，在解 $f'(x)=0$ 时，只需考察非零解：

$$1-\frac{4}{x^2}=0$$

$$1=\frac{4}{x^2}$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm2.$$

因而−2 和 2 是临界点．现在，$f(0)$不存在，而 $f(-2)=-4$ 和 $f(2)=4$．它们给出曲线上的点$(-2,-4)$和$(2,4)$.

e)递增与递减或递减与递增相对极值．用步骤 d)中所求的点确定 f 是递增的区间和 f 是递减的区间．所考虑的点是−2，0 和 2．这些点把实数轴分成四个区间．在每个区间内选一个试验值，并且把它们代入 f'：

A：试验值 −3，　$f'(-3)=1-\dfrac{4}{(-3)^2}=\dfrac{5}{9}>0$；

B：试验值 −1，　$f'(-1)=1-\dfrac{4}{(-1)^2}=-3<0$；

C：试验值 1，　$f'(1)=1-\dfrac{4}{1^2}=-3<0$；

D：试验值 3，　$f'(3)=1-\dfrac{4}{3^2}=\dfrac{5}{9}>0.$

区　间	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
试验值 f'的符号 结果	$x=-3$ $f'(-3)>0$ f递增	$x=-1$ $f'(-1)<0$ f递减	$x=1$ $f'(1)<0$ f递减	$x=3$ $f'(3)>0$ f递减

有变化说明在 $x=-2$ 处有相对极大值　　没有变化　　有变化说明在 $x=2$ 处有相对极小值

2007/08/16

因为 $f(-2)=-4$ 和 $f(2)=4$，所以在 $(-2,\ -4)$ 有相对极大值，而在 $(2,\ 4)$ 有相对极小值.

f) 拐点. 通过求使 $f''(x)$ 不存在或 $f''(x)=0$ 的点来确定候选拐点. 现在 $f''(x)$ 不存在，
230 但又因为 $f(0)$ 也不存在，所以在 $x=0$ 处不可能有拐点. 然后考察使 $f''(x)=0$ 的 x 值：

$$\frac{8}{x^3}=0.$$

但该方程无解，所以无拐点.

g) 凹性. 用在步骤 f) 中所求的值作为区间的端点. 通过验算来确定凹性，看在哪段区间 f' 递增和递减. 数 0 把实数轴分成两个区间 $(-\infty,\ 0)$ 和 $(0,\ \infty)$. 可以在每个区间选一个试验值然后代入 f''. 但注意到对任何 $x<0$ 有 $x^3<0$，所以

$$f''(x)=\frac{8}{x^3}<0,$$

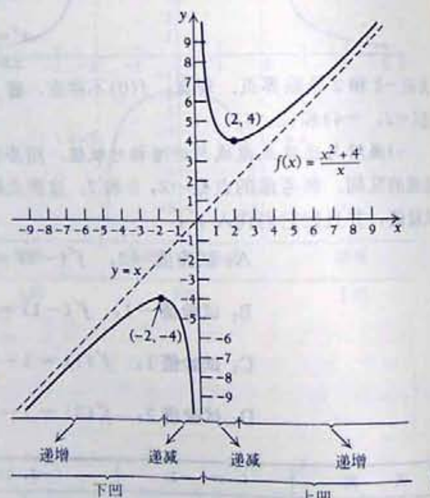
且对任何 $x>0$ 有 $x^3>0$，所以

$$f''(x)=\frac{8}{x^3}>0.$$

因此，f 在区间 $(-\infty,\ 0)$ 上是下凹的，而在区间 $(0,\ \infty)$ 上是上凹的.

h) 作图. 用前面得到的信息描绘图形，如果需要，可另外计算一些 f 的值. 图形如下.

x	$f(x)$，近似值
−6	−6.67
−5	−5.8
−4	−5
−3	−4.3
−2	−4
−1	−5
−0.5	−8.5
0.5	8.5
1	5
2	4
3	4.3
4	5
5	5.8
6	6.67



■

上机技术演练

用绘图器验证例 12 的结果.

习题 3.3

求极限，如果它存在.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-4}{5x}$
2. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{-5}{x(x+h)}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{4x}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-5}{4x+3}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\frac{3}{x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2-x+7}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+1}{5x-2}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-3x}{5-2x^2}$
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-3x-12x^2}{1+5x+3x^2}$
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^4-3x^2}{5x^2+6x}$
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-x}{4x^4-3x^3}$
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^4-5x^2+7}{8x^4+4x^3-8x}$
14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^4-x^3}{4x^2-3x^3}$
15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11x^3+4x^3-6x+2}{6x^3+5x^2+3x-1}$
16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-6x^3+2x^2-10}{2x^3+4x^2-x+23}$

描绘函数的图形.

17. $f(x)=\frac{4}{x}$
18. $f(x)=-\frac{5}{x}$
19. $f(x)=\frac{-2}{x-5}$
20. $f(x)=\frac{1}{x-5}$
21. $f(x)=\frac{1}{x-3}$
22. $f(x)=\frac{1}{x+2}$
23. $f(x)=\frac{-2}{x+5}$
24. $f(x)=\frac{-3}{x-3}$
25. $f(x)=\frac{2x+1}{x}$
26. $f(x)=\frac{3x-1}{x}$
27. $f(x)=x+\frac{9}{x}$
28. $f(x)=x+\frac{2}{x}$
29. $f(x)=\frac{2}{x^2}$
30. $f(x)=\frac{-1}{x^2}$
31. $f(x)=\frac{x}{x-3}$
32. $f(x)=\frac{x}{x+2}$
33. $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$
34. $f(x)=\frac{-1}{x^2+2}$
35. $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$
36. $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$
37. $f(x)=\frac{x^2-4}{x+3}$
38. $f(x)=\frac{x^2-9}{x+1}$
39. $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x-3}$
40. $f(x)=\frac{x+2}{x^2+2x-15}$
41. $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-16}$
42. $f(x)=\frac{x^2+x-2}{2x^2+1}$
43. $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$
44. $f(x)=\frac{10}{x^2+4}$
45. $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$
46. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$

应用

商业与经济

47. 折旧. 设某个产品的价值 V 随时间 t(月) 而下降或折旧，其中

$$V(t)=50-\frac{25t^2}{(t+2)^2}.$$

a) 求 V(0)，V(5)，V(10) 和 V(70).
b) 求在区间 $[0,\ \infty)$ 上该产品的极大值.
c) 描绘 V 的图形.
d) 求 $\lim\limits_{t\to\infty}V(t)$.
*e) 是否存在一个值，在这个值以下 V 将不再下降? 试说明理由.

48. 平均成本. Acme 股份有限公司生产 x 件某产品的总成本函数可以表示成

$$C(x)=3x^2+80.$$

a) 平均成本由 $A(x)=C(x)/x$ 给出. 求 $A(x)$.
b) 作平均成本函数的图形.
c) 求关于 $y=A(x)$ 的图形的斜渐近线，并给予解释.

49. 污染控制成本. 城市和公司欲求急剧增长的污染控制成本，其成本与从周边环境中清除污染物的百分比有关. 设从一个化学垃圾场清除 $p\%$ 的污染物所花费的成本 C(单位：美元) 可表示成

$$C(p)=\frac{48\,000}{100-p}.$$

a) 求 C(0)，C(20)，C(80) 和 C(90).
b) 求 $\lim\limits_{p\to 100^-}C(p)$.
*c) 说明 b) 中所求极限的意义.
d) 描绘 C 的图形.
*e) 该公司能担负得起清理 100% 的污染物吗? 试说明理由.

50. 总成本和总收益. 生产 x 件产品的总成本函数和总收益函数分别是

$$C(x)=5\,000+600x,$$

$$R(x)=-\frac{1}{2}x^2+1\,000x.$$

2007/08/16

a)求总利润函数 $P(x)$.

b)平均利润由 $A(x)=P(x)/x$ 给出. 求 $A(x)$.

c)作平均利润函数的图形.

d)求关于 $y=A(x)$ 的图形的斜渐近线并作出解释.

51. 购货价格. 从 1970 年起, 当用零售价格来计量时美元的购买力可以用函数

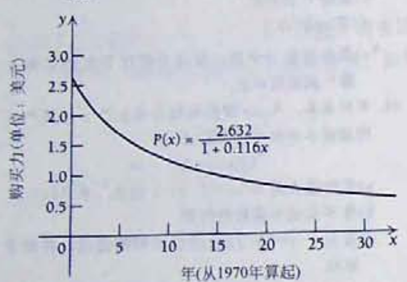
$$P(x)=\frac{2.632}{1+0.116x}$$

来建模, 其中 x 是从 1970 年算起的年数. (资料来源: U. S. Bureau of Economic Analysis.)

a)求 $P(10)$, $P(20)$ 和 $P(40)$.

b)何时购买力是 0.50 美元?

c)求 $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$.



生命科学与物理学

52. 血液中的药物. 在一次注射以后, 血液中的药物剂量 A 随过去的时间 t(小时)而减小. 设在某些条件下, A 可表示成

$$A(t)=\frac{A_0}{t^2+1},$$

其中 A_0 是给出的药物初始剂量. 假设注射了 100cc 的初始剂量.

a)求 $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, $A(7)$ 和 $A(10)$.

b)求 $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)$.

c)求注射剂量在区间 $[0,\infty)$ 上的极大值.

d)描绘该函数的图形.

*e)根据这个函数, 药物一定能全部从血液中消失吗? 解释你的答案.

一般兴趣

53. 棒球: 得分平均值. 投手得分平均值(每 9 局或 1 场传出的平均得分数)可表示成

$$E=9\cdot\frac{n}{i},$$

其中 n 是认可的得分数, i 是投球的局数. 假设把认可的得分数固定为 4 而让 i 变化. 我们得到了如下函数:

$$E(i)=9\cdot\frac{4}{i}.$$



a)完成下表, 四舍五入到小数点后两位.

投球的局数(i)	得分平均值(E)
9	
8	
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	
$\frac{2}{3}$	
$\frac{1}{3}$	

b)求 $\lim\limits_{i\to 0^+}E(i)$.

*c)以 a)和 b)为条件确定投手得分平均值, 其中设 4 是认可的得分数且出局次数为 0.

综合题

*54. 说明为何垂直渐近线不可能是函数图形的一部分.

*55. 利用图形与极限, 说明函数图形的渐近线概念. 描述三种形式的渐近线.

求极限, 如果它存在.

56. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+5}{2-x}$

57. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

58. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$

59. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x^3+7x}{2x^2-3x-10}$

60. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-6x^3+7x}{2x^2-3x-10}$

61. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$

62. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7x^3+x-9}{6x+x^3}$

63. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^4+x}{x+1}$

上机技术演练

作函数图形.

64. $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$

65. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

66. $f(x)=\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2-x-2}$

67. $f(x)=\frac{x^3+2x^2-15x}{x^2-5x-14}$

68. $f(x)=\frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-25}$

69. $f(x)=\left|\frac{1}{x}-2\right|$

70. 作函数

$$f(x)=\frac{x^2-3}{2x-4}$$

的图形. 以下仅用 TRACE 选项和 ZOOM 选项,

a)求所有 x 截距.

b)求 y 截距.

c)求所有渐近线.

*71. 作函数

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x-3}$$

的图形.

a)用图形估计 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, 若需要作精确估计, 可用输入—输出表.

b)描述函数在区间 $(-2,-1)$ 上的输出.

c)看得出函数的定义域是什么吗? 试作说明.

d)求 $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$. 232~234

3.4 利用导数求绝对极大值与绝对极小值

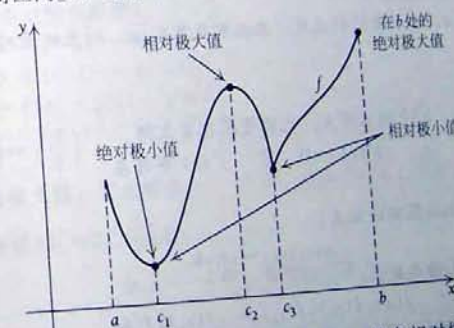
要点

- 用极大-极小值原理 1 求绝对极值.
- 用极大-极小值原理 2 求绝对极值.

绝对极大值和绝对极小值

一个相对极小值可能是也可能不是绝对极小值, 后者意指函数在其整个定义域上的最小值. 类似地, 一个相对极大值可能是也可能不是绝对极大值, 后者意指函数在其整个定义域上的最大值.

下图中的函数在闭区间 $[a,b]$ 的内点 c_1 和 c_2 上有相对极小值.



在 c_1 处的相对极小值正好也是绝对极小值. 函数在 c_2 处有相对极大值但它不是绝对极大值. 绝对极大值出现在端点 b.

2007/08/16

定义 设 I 是函数 f 的定义域内的区间，在 I 中的输入 c 上，其值 $f(c)$ 存在.

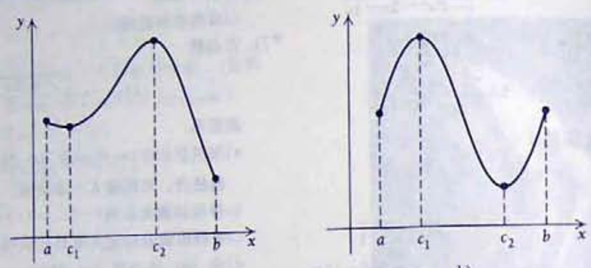
如果对于 I 中所有 x 都有 $f(c)\leqslant f(x)$，则 $f(c)$ 是**绝对极小值**(absolute minimum).

如果对于 I 中所有 x 都有 $f(x)\leqslant f(c)$，则 $f(c)$ 是**绝对极大值**(absolute maximum).

在闭区间上求绝对极大值和绝对极小值

首先考虑闭区间上的连续函数. 为此，考察下面的图形并且试求该闭区间上的点，使得在

235 其上有绝对极大值和绝对极小值(即绝对极值).



a) b)

你可能已发现了两个定理. 上述每一个函数的确有一个绝对极大值和一个绝对极小值. 这使我们得到其中的一个定理.

定理7 极值定理

在闭区间 $[a, b]$ 上定义的连续函数在 $[a, b]$ 中的点上一定有一个绝对极大值和一个绝对极小值.

仔细考察上面的图形，并且研究各个临界点和各个端点. 在a)部分，图形从 $f(a)$ 开始并且下降到 $f(c_1)$. 然后图形从 $f(c_1)$ 上升到 $f(c_2)$. 从那里，图形下降到 $f(b)$. 在b)部分，图形从 $f(a)$ 开始并且上升到 $f(c_1)$. 然后图形从 $f(c_1)$ 下降到 $f(c_2)$. 从此，图形上升到 $f(b)$. 这似乎有理由说，无论是极大值还是极小值，它们都出现在函数值 $f(a)$，$f(c_1)$，$f(c_2)$ 和 $f(b)$ 之中. 这使我们得到一个确定绝对极值的步骤.

定理8 极大-极小值原理1

设 f 是在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数. 求函数在区间 $[a, b]$ 上的绝对极大值和绝对极小值的步骤为：

a)先求 $f'(x)$.

b)然后确定 f 在 $[a, b]$ 中的临界点. 也就是求在其上使

$$f'(c)=0 \quad 或 \quad f'(c)\ 不存在$$

的所有点 c.

c)列出 f 的各临界点和区间的端点：

$$a, c_1, c_2, \cdots, c_n, b.$$

d)求在c)中所列点上的函数值：

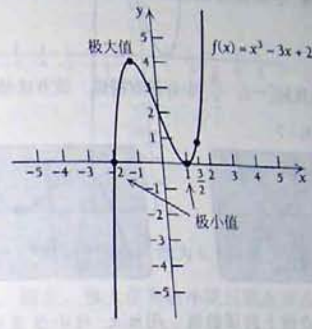
236 $$f(a), f(c_1), f(c_2), \cdots, f(c_n), f(b).$$

这些值的最大者是 f 在区间 $[a, b]$ 上的**绝对极大值**. 这些值的最小者是 f 在区间 $[a, b]$ 上的**绝对极小值**.

例1 求函数

$$f(x)=x^3-3x+2$$

在区间 $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$ 上的绝对极大值和绝对极小值.



解 在本节例1～例6中，都给出相关的图形(例如，这里所示的图形)，使你能看到绝对极值. 我们所采用的步骤并不要求描绘图形. 注意，我们只考虑区间 $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$.

a)求 $f'(x)$：$f'(x)=3x^2-3$.

b)求临界点. 其导数对于所有实数都存在，因而只需解 $f'(x)=0$：

$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm 1.$$

c)列出各临界点和端点. 这些点是 -2，-1，1 和 $\frac{3}{2}$.

d)求步骤c)中那些点的函数值：

$$f(-2)=(-2)^3-3(-2)+2=-8+6+2=0; \longrightarrow 极小值$$
$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=-1+3+2=4; \longrightarrow 极大值$$
$$f(1)=(1)^3-3(1)+2=1-3+2=0; \longrightarrow 极小值$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\left(\frac{3}{2}\right)+2=\frac{27}{8}-\frac{9}{2}+2=\frac{7}{8}.$$

这些值的最大者 4 是极大值，它出现在 $x=-1$ 处. 这些值的最小者是 0，它出现在 $x=-2$ 和 $x=1$ 两处. 因此，在区间 $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$ 上，

$$在\ x=-1\ 处，绝对极大值=4，$$

而

$$在\ x=-2\ 和\ x=1\ 处，绝对极小值=0. \quad 237$$

注意，一个绝对极大值或绝对极小值可能出现在多个点处.

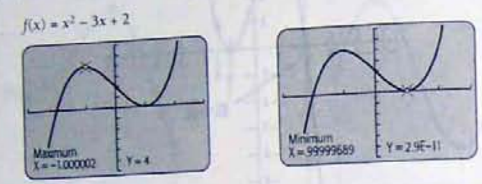
2007/08/16

上机技术演练

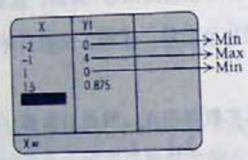
求绝对极值　如何用绘图器来求绝对极值呢？首先考察例 1．我们可以利用 3.1 节的“上机技术演练”中求相对极值时所述的任一种方法．这里，采用方法 3 和方法 4.

方法 3

选择方法 3 是因为在区间$\left[-2,\ \frac{3}{2}\right]$中有相对极值．该方法给出相对极值的近似值．

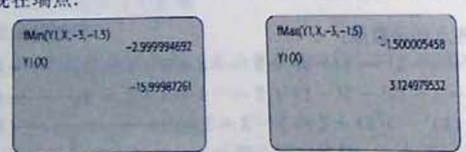


然后检验在这些 x 值和端点值上的函数值，用极大-极小值原理 1 确定绝对极大值和绝对极小值：



方法 4

例 2(如后)考虑的函数与例 1 中的相同，但区间不同．这时，我们用 **MATH** 菜单中的 **fMax** 和 **fMin** 选项．因为不存在相对极值，可以用 **fMax** 和 **fMin**．极小值和极大值出现在端点．



练习

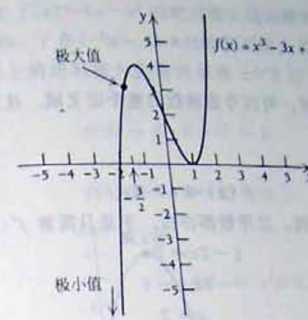
1. 用绘图器估计 $f(x)=x^3-x^2-x+2$ 分别在区间$[-2,\ 1]$和$[-1,\ 2]$上的绝对极大值和绝对极小值．然后用例 1 和例 2 的方法验证你的工作．

238

例 2　求函数

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

在区间$\left[-3,\ -\frac{3}{2}\right]$上的绝对极大值和绝对极小值．



解　如例 1 中所求，在 −1 和 1 两处其导数为 0．但是 −1 和 1 都不在区间$\left[-3,\ -\frac{3}{2}\right]$内，所以在该区间内没有临界点．因此，极大值和极小值出现在端点：

$$f(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 2 = -27 + 9 + 2 = -16; \longrightarrow \text{极小值}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 2 = -\frac{27}{8} + \frac{9}{2} + 2 = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}. \longrightarrow \text{极大值}$$

于是在区间$\left[-3,\ -\frac{3}{2}\right]$上，

$$\text{在 } x = -\frac{3}{2} \text{ 处，绝对极大值} = 3\frac{1}{8}，$$

而

$$\text{在 } x = -3 \text{ 处，绝对极小值} = -16.$$ ■

在其他区间上求绝对极大值和绝对极小值

当 I 中只有一个临界点 c 时，不必考察端点的值就可以确定函数在端点是否有绝对极大值和绝对极小值．239

定理 9　**极大-极小值原理 2**

设 f 是一个函数，对于区间 I 内的每一个 x 其 $f'(x)$ 都存在，且 I 中只有一个(临界)内点 c，使得 $f'(c)=0$．

如果 $f''(c)<0$，则 $f(c)$ 是 I 上的绝对极大值．

如果 $f''(c)>0$，则 $f(c)$ 是 I 上的绝对极小值．

不论区间 I 是开区间、闭区间或者推广到无穷区间，定理 9 都成立．如果 $f''(c)=0$，则或者需要用极大-极小值原理 1，或者需要知道函数在给定区间上的更多性质．

例 3 求函数

$$f(x) = 4x - x^2$$

的绝对极大值和绝对极小值.

解 当没有特别指明区间时，可以考虑函数的整个定义域. 这里，其定义域是所有实数的集合.

a)求 $f'(x)$：

$$f'(x) = 4 - 2x.$$

b)求临界点. 对于所有实数值，其导数都存在. 于是只需解 $f'(x)=0$：

$$4 - 2x = 0$$
$$-2x = -4$$
$$x = 2.$$

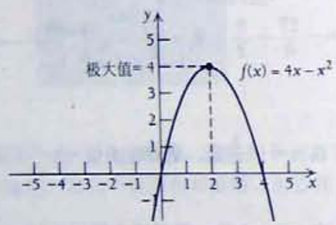
c)因为只有一个临界点，所以可以运用极大-极小值原理 2，并且求二阶导数：

$$f''(x) = -2.$$

其二阶导数是常数. 于是，$f''(2)=-2$，又因为它是负数，因而有

$$在\ x=2\ 处，绝对极大值 = f(2) = 4\cdot 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$

该函数没有极小值，其图形如下所示.



■

上机技术演练

求绝对极值 用绘图器做例 3. 我们还是采用 3.1 节的"上机技术演练"中求相对极值时的方法. 严格地说，不能用 CALC 菜单中的 fMin 或 fMax 选项或者 MAXIMUM 或 MINIMUM 选项，因为例 3 不是闭区间.

方法 1 和方法 2

用 TRACE 和(或)TABLE 选项作函数图形，考察其形状. 这个过程使我们看到确实没有绝对极小值. 在 $x=2$ 处有一个绝对极大值 $f(x)=4$.

练习

1. 试用绘图器估计 $f(x)=x^2-4x$ 的绝对极大值和绝对极小值. 然后用例 3 的方法验证你的工作.

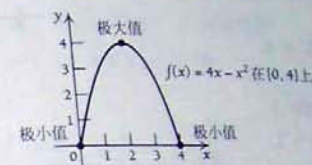
例 4 求在区间[0, 4]上 $f(x)=4x-x^2$ 的绝对极大值和绝对极小值.

解 基于例 3 的推理可知，f 在 $(-\infty, \infty)$ 上的绝对极大值是 $f(2)$ 或 4. 因为 2 在区间[0, 4]内，可知 f 在[0, 4]上的绝对极大值将出现在 $x=2$ 处. 为求绝对极小值，需要考察端点：

$$f(0) = 4\cdot 0 - 0^2 = 0$$

和

$$f(4) = 4\cdot 4 - 4^2 = 0.$$



在图中看到，极小值是 0，它出现在 $x=0$ 和 $x=4$ 两处. 因此

$$在\ x=2\ 处，绝对极大值 = 4，$$

而

$$在\ x=0\ 和\ x=4\ 处，绝对极小值 = 0.$$

■

至此，我们仅限于把极大-极小值原理 2 用于具有一个临界点的区间. 现在设一个闭区间含有两个临界点，于是可以把该区间分成两个子区间，在这两个子区间上考察极大值和极小值，并且进行比较. 但是需要考察在端点处的值，因为实际上要采用极大-极小值原理 1. 我们最好一开始就用原理 1. 240 ~ 241

求极大值和极小值的步骤

下述的一般策略可用来求连续函数的极大值和极小值.

求绝对极大值和绝对极小值的步骤

求绝对极大值和绝对极小值的步骤如下：

求一个连续函数在一个区间上的绝对极大值和绝对极小值的步骤如下：

a)求 $f'(x)$.

b)求临界点.

c)如果该区间是闭区间且有多个临界点，用极大-极小值原理 1.

d)如果区间是闭区间且只有一个临界点，则可以用极大-极小值原理 1，也可用极大-极小值原理 2. 如果函数容易求导，则用极大-极小值原理 2.

e)如果区间不是闭区间，它或者没有端点，或者不包含其端点，例如，$(-\infty, \infty)$，$(0, \infty)$或(a, b)，又该函数只有一个临界点，则用极大-极小值原理 2. 在这种情形，如果函数有极大值，它就没有极小值；如果它有极小值，就没有极大值.

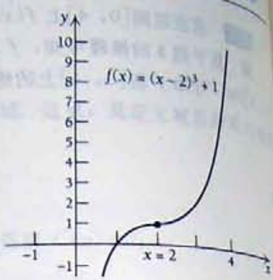
当有多个临界点出现在上述步骤 e)中所述的区间内时，求绝对极大值和绝对极小值的情形必须用详细的图形来论述，或用超出本书范围的技巧来处理.

2007/08/16

例 5 求函数

$$f(x)=(x-2)^3+1$$

的绝对极大值和绝对极小值.



解

a)求 $f'(x)$.

$$f'(x)=3(x-2)^2.$$

b)求临界点. 对所有实数, 其导数都存在. 因而解 $f'(x)=0$:

$$3(x-2)^2=0$$
$$(x-2)^2=0$$
$$x-2=0$$
$$x=2.$$

242 c)因为只有一个临界点且没有端点, 所以可以尝试用极大-极小值原理 2, 并且求其二阶导数:

$$f''(x)=6(x-2).$$

现在

$$f''(2)=6(2-2)=0,$$

所以极大-极小值原理 2 失效. 我们不能用极大-极小值原理 1, 因为不存在端点. 但是注意到 $f'(x)=3(x-2)^2$ 不可能取负值. 于是除了在 $x=2$ 以外, $f(x)$ 处处都是递增的, 因而既无极大值也无极小值. 对于 $x<2$ 或 $x-2<0$, 有 $f''(x)=6(x-2)<0$. 类似地, 对于 $x>2$ 或 $x-2>0$, 有 $f''(x)=6(x-2)>0$. 因此, 在 $x=2$ 处函数有一个拐点. ■

例 6 求函数

$$f(x)=5x+\frac{35}{x}$$

在区间 $(0,\infty)$ 上的绝对极大值和绝对极小值.

解

a)求 $f'(x)$. 首先把 $f(x)$ 表示成

$$f(x)=5x+35x^{-1},$$

则

$$f'(x)=5-35x^{-2}=5-\frac{35}{x^2}.$$

b)求临界点. 现在 $f'(x)$ 对 $(0,\infty)$ 内的所有 x 值都存在. 因而临界点只是使得 $f'(x)=0$ 的那些值:

$$5-\frac{35}{x^2}=0$$

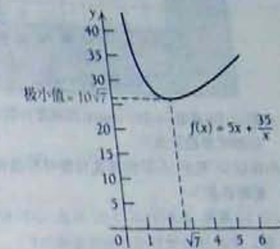
$$5=\frac{35}{x^2}$$

$$5x^2=35 \qquad \text{因为 } x\neq 0\text{, 乘以 } x^2$$
$$x^2=7$$
$$x=\pm\sqrt{7}\approx\pm 2.646.$$

c)该区间不是闭区间而是 $(0,\infty)$. 仅有的临界点是 $\sqrt{7}$. 因此, 可以运用极大-极小值原理 2, 并且求二阶导数: 243

$$f''(x)=70x^{-3}=\frac{70}{x^3},$$

以便确定是否有极大值或极小值. 现在对于 $(0,\infty)$ 内的所有 x 值, 有 $f''(x)\geqslant 0$, 因此 $f''(\sqrt{7})>0$, 并且在 $x=\sqrt{7}$ 处,

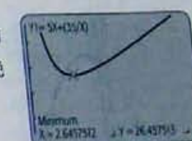


$$\text{绝对极小值}=f(\sqrt{7})$$
$$=5\cdot\sqrt{7}+\frac{35}{\sqrt{7}}=5\sqrt{7}+\frac{35}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$
$$=5\sqrt{7}+\frac{35\sqrt{7}}{7}=5\sqrt{7}+5\sqrt{7}$$
$$=10\sqrt{7}\approx 26.458.$$

函数没有极大值, 这是因为区间 $(0,\infty)$ 不是闭区间. ■

上机技术演练

求绝对极值 试用 CALC 菜单中的 MAXIMUM 和 MINIMUM 选项做例 6. 图形的形状使我们看到没有绝对极大值, 但有绝对极小值.



[0, 10, 0, 50]

注意到

$$\sqrt{7}\approx 2.6458 \quad 和 \quad 10\sqrt{7}\approx 26.458.$$

它进一步证实有分析解.

练习

1. 用绘图器估计 $f(x)=10x+1/x$ 在区间 $(0,\infty)$ 上的绝对极大值和绝对极小值. 然后用例 6 的分析方法验证你的工作. 244

习题 3.4

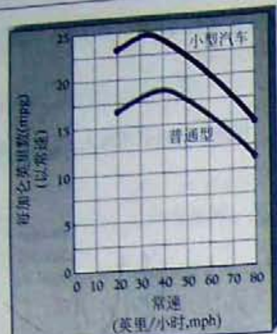
油耗里程. 下图中的两条曲线展示了当一辆普通型汽车和一辆小型汽车以常速行驶时所测得的油耗里程(每加仑汽油所行的平均英里数).

1. 考察普通型汽车在区间 [20, 80] 上的图形.

a)估计以常速行驶所测得的最大油耗里程时的速度.

b)估计以常速行驶所测得的最小油耗里程时的速度.

2007/08/16



c)在以 70 英里/小时[⊖](mph)的速度行驶时所测得的油耗里程是多少?

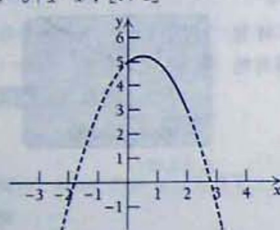
d)在以 50 英里/小时的速度行驶时所测得的油耗里程是多少?

e)以 55 英里/小时而不以 70 英里/小时的速度行驶,里程油耗增长的百分比是多少?

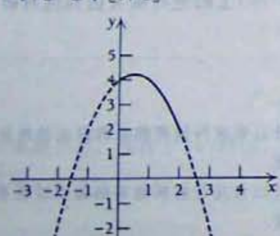
2. 对于小型汽车,回答第 1 题中的问题.

求函数在指定的区间上的绝对极值,如果它们存在的话.

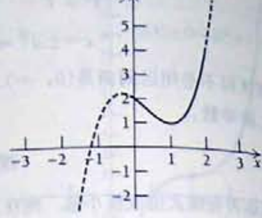
3. $f(x)=5+x-x^2$; [0, 2]



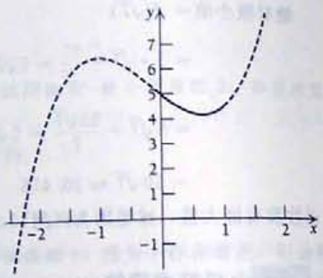
4. $f(x)=4+x-x^2$; [0, 2]



5. $f(x)=x^3-x^2-x+2$; [0, 2]



6. $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+5$; [0, 1]



7. $f(x)=x^3-x^2-x+2$; [−1, 0]

8. $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+5$; [−2, 0]

9. $f(x)=5x-7$; [−2, 3]

10. $f(x)=2x+4$; [−1, 1]

11. $f(x)=7-4x$; [−2, 5]

12. $f(x)=-2-3x$; [−10, 10]

13. $f(x)=-5$; [−1, 1]

14. $g(x)=24$; [4, 13]

15. $f(x)=x^2-6x-3$; [−1, 5]

16. $f(x)=x^2-4x+5$; [−1, 3]

17. $f(x)=3-2x-5x^2$; [−3, 3]

18. $f(x)=1+6x-3x^2$; [0, 4]

19. $f(x)=x^3-3x^2$; [0, 5]

20. $f(x)=x^3-3x+6$; [−1, 3]

21. $f(x)=x^3-3x$; [−5, 1]

22. $f(x)=3x^2-2x^3$; [−5, 1]

23. $f(x)=1-x^3$; [−8, 8]

⊖ 英里/小时的单位符号为 mile/h,1mile/h=0.447 04m/s.——编辑注

24. $f(x)=2x^3$; [−10, 10]

25. $f(x)=12+9x-3x^2-x^3$; [−3, 1]

26. $f(x)=x^3-6x^2+10$; [0, 4]

27. $f(x)=x^4-2x^3$; [−2, 2]

28. $f(x)=x^3-x^4$; [−1, 1]

29. $f(x)=x^4-2x^2+5$; [−2, 2]

30. $f(x)=x^4-8x^2+3$; [−3, 3]

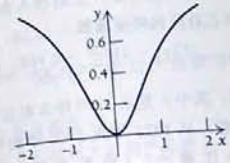
31. $f(x)=(x+3)^{2/3}-5$; [−4, 5]

32. $f(x)=1-x^{2/3}$; [−8, 8]

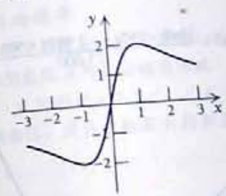
33. $f(x)=x+\frac{1}{x}$; [1, 20]

34. $f(x)=x+\frac{4}{x}$; [−8, −1]

35. $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$; [−2, 2]



36. $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$, [−3, 3]



37. $f(x)=(x+1)^{1/3}$; [−2, 26]

38. $f(x)=\sqrt[3]{x}$; [8, 64]

39~48. 用绘图器验证 3, 5, 9, 13, 19, 23, 33, 35, 37 和 38 题.

求在指定区间上函数的绝对极大值和绝对极小值,如果它们存在的话. 当未指明区间时,采用实轴(−∞, ∞).

49. $f(x)=x(70-x)$

50. $f(x)=x(50-x)$

51. $f(x)=2x^2-40x+400$

52. $f(x)=2x^2-20x+100$

53. $f(x)=x-\frac{4}{3}x^3$; (0, ∞)

54. $f(x)=16x-\frac{4}{3}x^3$; (0, ∞)

55. $f(x)=17x-x^2$

56. $f(x)=27x-x^2$

57. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x$; [−2, 2]

58. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-5x$; [−3, 3]

59. $f(x)=-0.001x^2+4.8x-60$

60. $f(x)=-0.01x^2+1.4x-30$

61. $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+6x^2-11x-50$; (0, 3)

62. $f(x)=-x^3+x^2+5x-1$; (0, ∞)

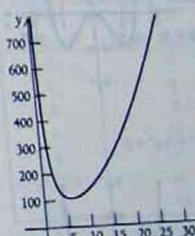
63. $f(x)=15x^2-\frac{1}{2}x^3$; [0, 30]

64. $f(x)=4x^2-\frac{1}{2}x^3$; [0, 8]

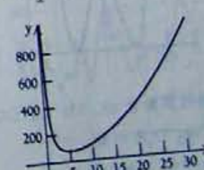
65. $f(x)=2x+\frac{72}{x}$; (0, ∞)

66. $f(x)=x+\frac{3\,600}{x}$; (0, ∞)

67. $f(x)=x^2+\frac{432}{x}$; (0, ∞)



68. $f(x)=x^2+\frac{250}{x}$; (0, ∞)



69. $f(x)=2x^4-x$; [−1, 1]

70. ... [−1, 1]

2007/08/16

71. $f(x)=\sqrt[3]{x}$；[0，8]

72. $f(x)=\sqrt{x}$；[0，4]

73. $f(x)=(x+1)^3$

74. $f(x)=(x-1)^3$

75. $f(x)=2x-3$；[−1，1]

76. $f(x)=9-5x$；[−10，10]

77. $f(x)=2x-3$

78. $f(x)=9-5x$

79. $f(x)=x^{2/3}$；[−1，1]

80. $g(x)=x^{2/3}$

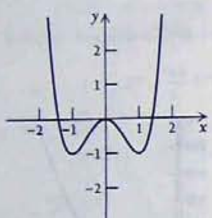
81. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$

82. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$

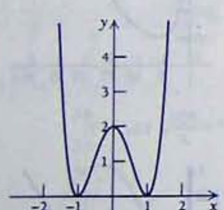
83. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x$；[0，4]

84. $g(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+x$；[−4，0]

85. $t(x)=x^4-2x^2$



86. $f(x)=2x^4-4x^2+2$



87～96. 用绘图器验证 49，51，53，57，61，65，67，69，73 和 85 题.

应用

商业与经济

97. 月生产率. 人们发现，一个职工的月生产率 M（以生产的产品数计）是其从业年数 t 的函数. 对某个产品，生产率函数可表示成

$$M(t)=-2t^2+100t+180,\quad 0\leqslant t\leqslant 40.$$

求最大生产率以及达到其最大值的年数.

98. 广告. 一公司估计，在花费 a 美元广告费以后它将卖出 N 件产品，其中，

$$N(a)=-a^2+300a+6,\quad 0\leqslant a\leqslant 300,$$

且 a 以千美元计. 求可能卖出的最大产品数量以及为了达到其最大值必须花费的总金额.

99. 利润最大化. 一公司确定，从生产和销售 x 件产品中获得的总利润(美元)可表示成

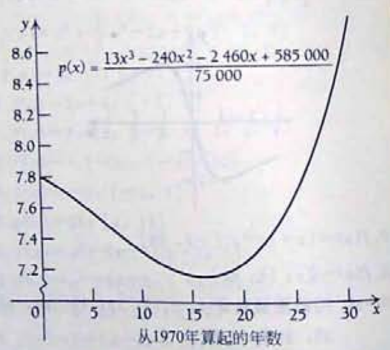
$$P(x)=\frac{1\,500}{x^2-6x+10}.$$

求使其总利润为最大时的产品数 x.

100. 小企业. 由非农场主产生的收入在美国国民收入中所占百分比可用函数

$$p(x)=\frac{13x^3-240x^2-2\,460x+585\,000}{75\,000}$$

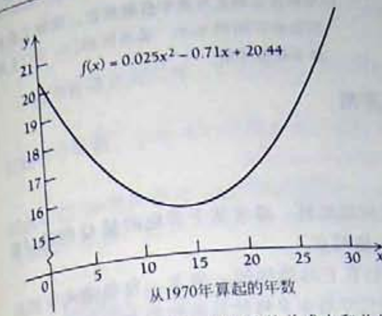
来建模，其中 x 是从 1970 年算起的年数. 根据这个模型，从 1970 年到 2000 年的哪一年中这个百分比最小？（资料来源：U. S. Census Bureau.）



101. 人力. 45～54 岁间的美国民用人力所占百分比可以用函数

$$f(x)=0.025x^2-0.71x+20.44$$

来建模，其中 x 是从 1970 年算起的年数. 根据这个模型，从 1970 年到 2000 年的哪一年中这个百分比最小？（资料来源：U. S. Census Bureau.）



利润最大化. 生产 x 件产品的总成本和总收益函数是

$$C(x)=5\,000+600x,$$

$$R(x)=-\frac{1}{2}x^2+1\,000x,$$

其中 $0\leqslant x\leqslant 600$. 把这个函数用于 102 题和 103 题.

102. a)求总利润函数 $P(x)$.

b)求使总利润最大时的产品数 x.

103. a)平均利润由 $A(x)=P(x)/x$ 给出. 求 $A(x)$.

b)求使平均利润最大时的产品数 x.

生命科学与物理学

104. 血压. 对于剂量为 x 立方厘米(cc)的某种药物所引起的血压 B 可近似地表示成

$$B(x)=0.05x^2-0.3x^3,\quad 0\leqslant x\leqslant 0.16.$$

求最高血压，并且求取多大药剂量时出现最高血压.

综合题

求函数在指定区间上的绝对极大值和绝对极小值，如果它们存在的话.

105. $g(x)=x\sqrt{x+3}$；　[−3，3]

106. $h(x)=x\sqrt{1-x}$；　[0，1]

107. 商业：总成本. 商界中的各种成本可以分成两个部分：随总量增加的部分和随总量减小的部分. 当成本增加时，虽然为客户服务的质量成本会变得更高，但所增加的成本部分可以通过客户信誉来弥补. 某公司已确定，其服务成本可由下述"质量单位"的函数给出：

$$C(x)=(2x+4)+\left(\frac{2}{x-6}\right),\quad x>6.$$

为使公司的服务总成本最小化，求该公司应采用的"质量单位"等级数.

108. 设

$$y=(x-a)^2+(x-b)^2.$$

对于 x 的哪个值，y 值最小？

*109. 说明一阶导数在求函数的绝对极值中的用途.

*110. 说明二阶导数在求函数的绝对极值中的用途.

上机技术演练

试用绘图器作每个给定区间上的函数图形. 直观估计在何处出现绝对极大值和绝对极小值，然后用 TABLE 选项精确你的估计.

111. $f(x)=x^4-4x^2+10$；　[0，4]

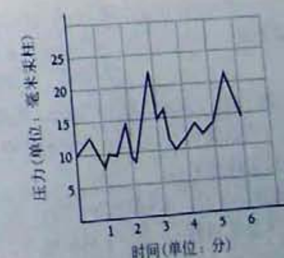
112. $f(x)=x^{2/3}(x-5)$；　[1，4]

113. $f(x)=\frac{3}{4}(x^2-1)^{2/3}$

114. $f(x)=x\left(\frac{x}{2}-5\right)^4$

115. 生命科学与物理学：怀孕期间的收缩作用. 下表与下图把孕妇的收缩[1]作用的大小表示成时间的函数.

时间 t（单位：分）	压力（单位：毫米汞柱）
0	10
1	8
2	9.5
3	15
4	12
5	14
6	14.5



[1] 在生理学上，收缩是指工作肌肉或肌肉纤维变...

2007/08/16

用有 REGRESSION 选项的绘图器.

a)用线性方程与表中数据拟合. 预测 7 分钟后收缩作用的大小.

b)用四次多项式与表中数据拟合. 预测 7 分钟后收缩作用的大小. 求在区间[0, 10]上的最小收缩作用.

3.5 最大-最小值问题：在商业与经济中的应用

要点

- 利用微分学解最大-最小值问题.

微积分的一个十分重要的应用是求最大-最小值问题的解，即求某个变化的量 Q 的绝对极大值或绝对极小值，并且求在其上出现最大值或最小值的点.

245~249 **例 1** 面积最大化. 一个商店想用 20 英尺的围栏在它的展厅的一角为一台电动火车围起一块矩形场地，靠墙壁的两边不需要围栏，其矩形的尺寸是多少将使其面积最大？其最大面积是多少？

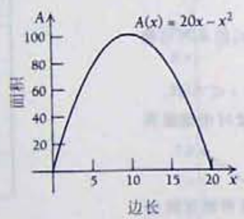
解 初看起来，可能以为不论采用什么尺寸都无关紧要：它们都会得到同样的面积. 情况并非如此. 我们先画图，并且用变量表示其面积. 如果设 x 为一边之长而 y 为另一边之长，则因为边长之和必须是 20 英尺，因而有



$$x+y=20 \quad 和 \quad y=20-x.$$

因此，其面积可以表示成

$$A=xy=x(20-x)=20x-x^2.$$



我们试着求

$$A(x)=20x-x^2 \text{ 在区间}(0,20)\text{上}$$

的最大值.（这不是求方程 $y=20-x$ 的最大值.）我们考察区间 (0, 20) 是因为 x 是一边之长，且不能为负值或 0. 因为只有 20ft 的围栏，所以 x 不能超过 20. 另外 x 不能等于 20，因为这样 y 的长度将等于 0.

a)先求 $A'(x)$：$A'(x)=20-2x$.

（这不是求函数 $y=20-x$ 的导数.）

b)对于 (0, 20) 中的所有 x 值，这个导数都存在. 因而临界点只能是下面的解：

$$A'(x)=20-2x=0$$

$$-2x=-20$$
$$x=10.$$

因为在该区间只有一个临界点，所以可以用二阶导数来确定是否有最大值. 注意到

$$A''(x)=-2,$$

它是一个常数. 于是 $A''(10)$ 是负的，因而 $A(10)$ 是最大值. 现在

$$A(10)=10(20-10)=10\cdot10=100.$$

因此，以 10 英尺作为一边之长且以 20−10（即 10）作为另一边之长便可得到 100 平方英尺的最大面积. 注意，$A(5)=75$，$A(16)=64$ 和 $A(12)=96$，所以边长的确影响面积. ■

上机技术演练

探索练习

1. 用绘图器完成下表.

x	$y=20-x$	$A=x(20-x)$
0		
4		
6.5		
8		
10		
12		
13.2		
20		

2. 在区间[0, 20]上画 $A(x)=x(20-x)$ 的图形.
3. 估计最大值，并且估计在何处有最大值. 250

这里给出解最大-最小值问题的一般步骤. 虽然它不可能保证你一定成功，但必定会增加你成功的可能性.

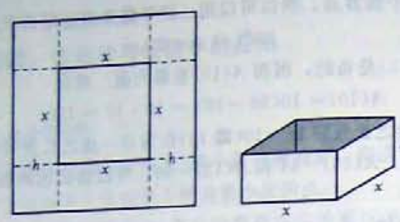
解最大-最小值问题的步骤

1. 仔细审读该问题. 如果与该问题有联系，可以画个图.
2. 用适当的变量和常量标注图形，注意什么量变化，什么量固定不变.
3. 把该问题翻译成一个包含可以最大化或最小化的量 Q 的方程. 试着用步骤 2 中的变量表示 Q.
4. 试着把 Q 表示成一个变量的函数. 利用在 3.1 节、3.2 节和 3.4 节中所阐述的方法确定其最大值或最小值，并且确定取最大值或最小值的点.

例 2 容积最大化. 把一块 8 英寸×8 英寸的薄纸板从其四个角剪去四个小正方形，使得四边可以折起做成一个无盖盒子. 什么样的尺寸将得到一个容积最大的盒子？最大容积是多少？

2007/08/16

解 开始也可能以为盒子的尺寸无关紧要，但是例1的经验使我们不去那样思考．我们画一个图．



当从四个角剪去四个边长为 h 的正方形时，留下一个边长为 x 的正方形底．所做成的盒子的容积是

$$V = lwh = x \cdot x \cdot h.$$

我们要把 V 表示成一个变量的函数．注意到纸板一边的全长是8英寸．从图形中得知

$$h + x + h = 8$$

或

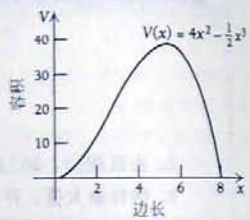
251 $$x + 2h = 8.$$

为求出 h，我们有

$$2h = 8 - x$$

$$h = \frac{1}{2}(8-x) = \frac{1}{2}\cdot 8 - \frac{1}{2}x$$

$$= 4 - \frac{1}{2}x. \quad \text{(这不是求导)}$$



于是，

$$V = x \cdot x \cdot \left(4 - \frac{1}{2}x\right) = x^2\left(4 - \frac{1}{2}x\right) = 4x^2 - \frac{1}{2}x^3.$$

我们试试看求

$$V(x) = 4x^2 - \frac{1}{2}x^3 \text{ 在区间}(0,8)\text{上}$$

的最大值．先求 $V'(x)$：

$$V'(x) = 8x - \frac{3}{2}x^2.$$

现在，对于区间(0，8)上的所有 x，$V'(x)$ 都存在，所以令 $V'(x)=0$ 求临界点：

$$V'(x) = 8x - \frac{3}{2}x^2 = 0$$

$$x\left(8 - \frac{3}{2}x\right) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{或} \quad 8 - \frac{3}{2}x = 0$$

$$x = 0 \quad \text{或} \quad -\frac{3}{2}x = -8$$

$$x = 0 \quad \text{或} \quad x = -\frac{2}{3}(-8) = \frac{16}{3}.$$

在(0，8)内的唯一临界点是 $\frac{16}{3}$．于是可以利用二阶导数，

$$V''(x) = 8 - 3x$$

以便确定是否有最大值．因为

$$V''\left(\frac{16}{3}\right) = 8 - 3\cdot\frac{16}{3} = -8,$$

$V''\left(\frac{16}{3}\right)$ 是负的，所以 $V\left(\frac{16}{3}\right)$ 是最大值，且

$$V\left(\frac{16}{3}\right) = 4\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1\,024}{27} = 37\frac{25}{27}.$$

最大容积是 $37\frac{25}{27}$ 立方英寸[⊖]．得到这个最大容积的各向尺寸是

$$x = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}\text{(英寸)}，x = 5\frac{1}{3}\text{(英寸)}，h = 4 - \frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}\right) = 1\frac{1}{3}\text{(英寸)}.$$ ■

上机技术演练

探索练习

1. 用绘图器完成下表．

x	$h=4-\frac{1}{2}x$	$V=4x^2-\frac{1}{2}x^3$
0		
1		
2		
3		
4		
4.6		
5		
6		
6.8		
7		
8		

2. 在区间[0，8]上作 $V(x)=4x^2-\frac{1}{2}x^3$ 的图形． 252

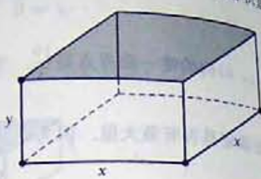
3. 估计最大值，并且估计在何处有最大值．

在下面的问题中，要构造一个有固定容积的开口容器．需要确定其尺寸，使构造这个容器所

⊖ 立方英寸的单位符号为 in^3，$1in^3=1.638\ 71\times10^{-}$

花的材料最少．从生态学的观点来看，这可能是一个重要问题．

例3 表面面积最小化．某容器公司正设计一款具有正方形底的开口长方形盒，其容积是 108cm^3．取什么样的尺寸可得到最小表面面积？最小表面面积是多少？



解 先画图．盒子的表面面积由底面积和四个侧面面积给出，即

$$S = x^2 + 4xy.$$

容积必须是 108cm^3，因而它可写成

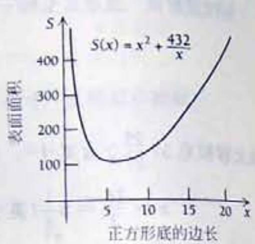
$$V = x^2 y = 108.$$

为了用一个变量表示 S，解 $x^2y=108$ 求 y：

$$y = \frac{108}{x^2}.$$

于是

$$S(x) = x^2 + 4x\left(\frac{108}{x^2}\right) = x^2 + \frac{432}{x}.$$



其应用性质告诉我们，S 的定义域是所有正数．因此可在区间 $(0,\infty)$ 上求 S 的最小值．先求 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}x$：

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

因为对 $(0,\infty)$ 内的所有 x，$\mathrm{d}S/\mathrm{d}x$ 都存在，所以临界点只出现在 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}x=0$ 处，于是解下列方程：

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0$$

$$x^2\left(2x - \frac{432}{x^2}\right) = x^2 \cdot 0 \quad \text{为去分式，乘以 } x^2$$

$$2x^3 - 432 = 0$$

$$2x^3 = 432$$

$$x^3 = 216$$

$$x = 6.$$

253 这是唯一的临界点，所以可用二阶导数来确定是否有最小值：

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}x^2} = 2 + \frac{864}{x^3}.$$

注意到对于 x 的所有正值，这个二阶导数都取正值．因而在 $x=6$ 处有最小值．当 $x=6$ 时推出 $y=3$：

$$y = \frac{108}{6^2} = \frac{108}{36} = 3.$$

因此，当 $x=6\text{cm}$ 和 $y=3\text{cm}$ 时，表面面积最小．最小表面面积是

$$S = 6^2 + 4 \cdot 6 \cdot 3 = 108(\text{cm}^2).$$

这个数正好与固定容积相同． ■

商业与经济应用：边际分析

例4 商业：收益最大化．某立体声收音机厂商测定，为了销售一新款立体声收音机 x 台，每台的价格（单位：美元）必须是

$$p = 1\,000 - x.$$

厂商还决定，生产 x 台的总成本可以表示成

$$C(x) = 3\,000 + 20x.$$

a)求总收益 $R(x)$．

b)求总利润 $P(x)$．

c)为使利润最大化，公司必须生产并销售多少台？

d)最大利润是多少？

e)为实现这一最大利润，每台价格必须变成多少？

解

a) $R(x)$ = 总收益 =（产品台数）· 单价

$$= x \cdot p$$

$$= x(1\,000 - x) = 1\,000x - x^2.$$

b) $P(x) = R(x) - C(x) = (1\,000x - x^2) - (3\,000 + 20x)$

$$= -x^2 + 980x - 3\,000.$$

c)为求 $P(x)$ 的最大值，先求 $P'(x)$：

$$P'(x) = -2x + 980.$$

这对所有实数都有意义（实际上我们只关心 $[0,\infty)$ 中的数，因为不可能生产负数台立体声收音机）．于是解方程： 254

$$P'(x) = -2x + 980 = 0$$

$$-2x = -980$$

$$x = 490.$$

因为只有一个临界点，所以可以用二阶导数来确定是否有最大值．注意到

$$P''(x) = -2 \text{ 是一个常数，}$$

所以 $P''(490)$ 是负的，因而 $P(490)$ 是最大值．

d)最大利润由

$$P(490) = -(490)^2 + 980 \cdot 490 - 3\,000$$

$$= 237\,100(\text{美元})$$

给出．因此立体声收音机厂商可通过生产并销售 490 台立体声收音机实现 237 100 美元的最大利润．

e)实现最大利润所需单价是

$$p = 1\,000 - 490 = 510(\text{美元}).$$ ■

现在一般地考察总利润函数以及与它有关的函数．

图1展示了一个关于总成本函数与总收益函数的例子．根据观察，可以估计到最大利润可能是 $R(x)$ 与 $C(x)$ 之间的最宽差距．点 B_0 和 B_2 是损益平衡点．

2007/08/16

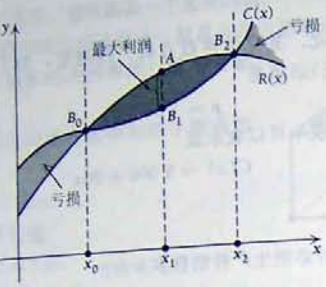


图 1

图2展示了一个关于总利润函数的例子. 注意到当产量太低($<x_0$)时会出现亏损，这是因为高固定成本或高初始成本以及低收益所致. 当产量太高($>x_2$)时也会出现亏损，这是由于高边际成本和低边际收益所致(如图3中所示).



图 2

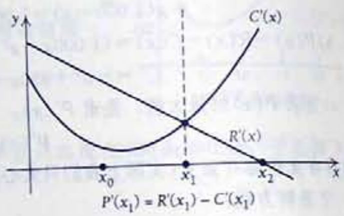


图 3

商业在 x_0 和 x_2 之间的每一个有赢利之处运转. 注意最大利润出现在 $P(x)$ 的临界点 x_1 上. 如果假定对某个区间(通常取$[0, \infty)$)的所有 x，$P'(x)$都存在，则这个临界点出现在使得

$$P'(x) = 0$$

和

$$P''(x) < 0$$

的某个数 x 上. 因为 $P(x)=R(x)-C(x)$，由此可得

$$P'(x) = R'(x) - C'(x)$$

和

$$P''(x) = R''(x) - C''(x).$$

因此，最大利润出现在使得

255

$$P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0$$

和

$$P''(x) = R''(x) - C''(x) < 0,$$

或

$$R'(x) = C'(x)$$

和

$$R''(x) < C''(x)$$

的某个数 x 上. 综上所述，有下面的定理.

定理 10

当边际收益等于边际成本且边际收益的变化率小于边际成本的变化率时，即

$$R'(x) = C'(x) \quad 和 \quad R''(x) < C''(x),$$

可以实现最大利润.

例 5 商业：确定票价. 忙碌的推销商驾驭在利润与亏损之间的一条细线上，特别是在确定价格上，例如，对当地电影院的影片准入闭路电视议价. 根据连续记录，影院测定，如果人场票价是20美元，则影院取1 000人为观影的平均人数. 但是每提价1美元，影院就从平均人数中失去100个顾客. 每位顾客在让价上平均花费1.80美元. 为使总收益最大化，影院应当确定的人场票价是多少?

解 设 x 是20美元的票价应该提价的金额. (如果 x 是负值，则票价下跌.)首先把总收益 R 表示成 x 的函数. 注意到

$$R(x) = (票房收益) + (让价收益)$$
$$= (人数)\cdot(票价) + 1.80(人数)$$
$$= (1\,000 - 100x)(20 + x) + 1.80(1\,000 - 100x)$$
$$= 20\,000 - 2\,000x + 1\,000x - 100x^2 + 1\,800 - 180x$$
$$R(x) = -100x^2 - 1\,180x^2 + 21\,800.$$

我们欲在所有实数组成的集合上求最大值. 为求使 $R(x)$ 最大的 x，先求 $R'(x)$:

$$R'(x) = -200x - 1\,180.$$

这个导数对于所有实数 x 都存在. 因而临界点只是使得 $R'(x)=0$ 的值，于是解方程:

$$-200x - 1\,180 = 0$$
$$-200x = 1\,180$$
$$x = -5.9 = -5.90(美元).$$ 256

因为这是唯一的临界点，所以可以利用二阶导数

$$R''(x) = -200$$

来确定是否有最大值. 因为 $R''(-5.9)$ 是负数，所以 $R(-5.9)$ 是最大值. 因此，为使收益最大化，影院应定价为

$$20 + (-5.90) \text{ 或每张票 } 14.10 \text{ 美元}.$$

也就是说，下调后的票价将吸引更多的观众去电影院，其人数是

$$1\,000 - 100(-5.9) \quad 或 \quad 1\,590,$$

这将带来最大的收益. ■

存货成本最小化

商业的零售商店关心存货成本. 例如，假定一[illegible]每年销售2 500台电视机，商店

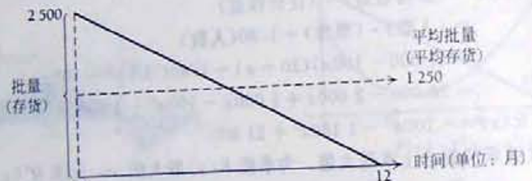


可能通过一次整批订购所有电视来保证营业. 但是另一方面, 业主将面临储存所有电视所承担的持产成本(例如, 保险、房屋面积等). 于是他们可能分成几批较小的订货单, 例如 5 批, 因而必须储存的最大数是 500. 但是, 每次再订货, 却要为文书工作、送货费用、劳动力等支付成本. 因此, 似乎在持产成本和再订购成本之间存在一个平衡点. 下面看一看微分学怎样帮我们确定平衡点可能是什么. 我们试着最小化下述函数:

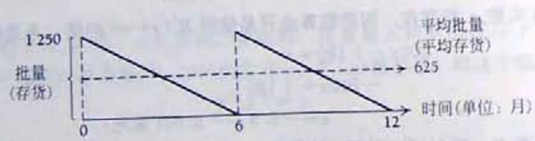
总存货成本 = (年度持产成本) + (年度再订购成本)

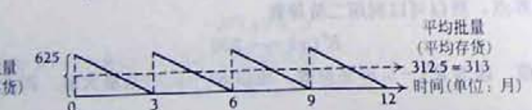
所谓批量 x 是指每个再订购期所订货物的最大量. 如果 x 是每期的订货量, 则在那一时段, 现有存货处在 0 到 x 台之间的某个位置. 为了有一个关于在该期间的每个时刻的现有存货量的表示式, 可以采用平均量 $x/2$. 这表示该年度的相应时段的平均存货量.

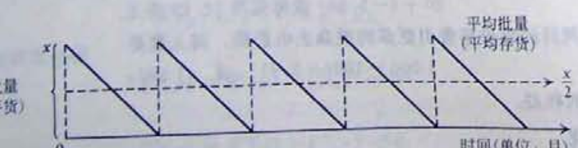
参看如下所示的图形. 如果该批量是 2 500, 则在前后两次订货之间的那个时段中, 现有存货处在 0 到 2 500 台的某个位置. 现存货物取平均存量为 2 500/2 即 1 250 台. 如果批量是 1 250, 则在前后两次订货之间的那个时段中, 现有存货处在 0 到 1 250 台的某个位置. 现存货物取平均存量为 1 250/2 即 625 台.



257







上机技术演练

探索练习　许多绘图器有制作函数值表和(或)函数值电子表格的功能. 关于例 6, 如果没有微分学知识, 人们可能利用如下的表格对将要最小化总存货成本的批量做一个粗略的估计. 试完成下表并且作出一个估计.

批量, x	再订购次数, $\frac{2\,500}{x}$	平均存货, $\frac{x}{2}$	持产成本, $10\cdot\frac{x}{2}$	每次订购成本, $20+9x$	再订购成本, $(20+9x)\frac{2\,500}{x}$	总存货成本, $C(x)=10\cdot\frac{x}{2}+(20+9x)\frac{2\,500}{x}$
2 500	1	1 250	12 500	22 200	22 520	35 020
1 250	2	625	6 250	11 270	22 540	
500	5	250	2 500	4 520		
250	10	125				
167	15	84				
125	20					
100	25					
90	28					
50	50					

1. 用绘图器作 $C(x)$ 在区间 [0, 2 500] 上的图形.
2. 用绘图器估计最小值并且估计在何处出现最小值.

258

例 6　商业: 存货成本最小化. 某零售电器商店每年销售 2 500 台电视机. 库存一台电视机一年, 商店需花费 10 美元. 为了再订购, 需付 20 美元的固定成本, 再每台另付 9 美元. 为了最小化存货成本, 商店应按多大的批量再订购且每年应订购几次?

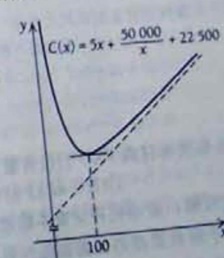
解　设 x 表示批量. 存货成本表示为

$$C(x) = (\text{年度持产成本}) + (\text{年度再订购成本}).$$

我们分别讨论每一项.

a) 年度持产成本. 现有平均存货量是 $x/2$, 并且每台库存花费 10 美元. 因而

$$\text{年度持产成本} = (\text{每台年度成本})\cdot(\text{平均台数}) = 10\cdot\frac{x}{2}.$$



b) 年度再订购成本. 已知 x 表示批量. 又假定每年再订购 N 次. 于是 $Nx=2\,500$, 且 $N=2\,500/x$. 因而

$$\text{年度再订购成本} = (\text{每次订购成本})\cdot(\text{再订购次数}) = (20+9x)\frac{2\,500}{x}.$$

c) 因此

$$C(x) = 10\cdot\frac{x}{2} + (20+9x)\frac{2\,500}{x} = 5x + \frac{50\,000}{x} + 22\,500.$$

2007/08/16

d)需要求 C 在区间[1, 2 500]上的最小值(参看上图). 先求 $C'(x)$:

259
$$C'(x)=5-\frac{50\ 000}{x^2}.$$

e)对于[1, 2 500]内的所有 x，$C'(x)$ 都存在，所以临界点只是那些使得 $C'(x)=0$ 的 x. 解 $C'(x)=0$:

$$5-\frac{50\ 000}{x^2}=0$$
$$5=\frac{50\ 000}{x^2}$$
$$5x^2=50\ 000$$
$$x^2=10\ 000$$
$$x=\pm 100.$$

因为在区间[1, 2 500]内只有一个临界点，即 $x=100$，所以可以利用二阶导数来判定是否有最大值或最小值:

$$C''(x)=\frac{100\ 000}{x^3}.$$

对于[1, 2 500]内的所有 x，$C''(x)$ 均为正数，所以在 $x=100$ 处有最小值. 因此，为了最小化存货成本，商店应每年订货(2 500/100)即 25 次，其批量是 100. ■

在这样一类问题中，当答案不是整数时会发生什么情形呢? 对于这些函数，可以考虑与答案最接近的两个整数，然后把它们代入 $C(x)$，使 $C(x)$ 较小的值就是其批量.

例 7 商业：存货成本最小化. 再讨论例 6，除了把存货成本 10 美元改为 20 美元外，采用例 6 给出的所有数据. 为使存货成本最小化，商店应按多大的批量再订购电视机且每年应订购几次?

解 把这个例子与例 6 作比较，求其存货成本，它变成

$$C(x)=20\cdot\frac{x}{2}+(20+9x)\frac{2\ 500}{x}$$
$$=10x+\frac{50\ 000}{x}+22\ 500.$$

然后求 $C'(x)$，令它等于 0 来求解 x:

$$C'(x)=10-\frac{50\ 000}{x^2}=0$$
$$10=\frac{50\ 000}{x^2}$$
$$10x^2=50\ 000$$
$$x^2=5\ 000$$

260
$$x=\sqrt{5\ 000}\approx 70.7.$$

因为每次再订购 70.7 台没有意义，考虑与 70.7 最接近的两个整数，它们是 70 和 71. 现在有

$$C(70)\approx 23\ 914.29(\text{美元})\quad 和\quad C(71)\approx 23\ 914.23(\text{美元}).$$

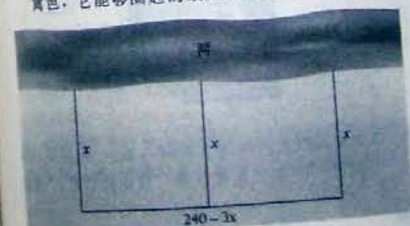
由此可得，最小化存货成本的批量是 71，尽管相差 0.06 美元并不重要.（注意：这一步骤不是对于所有类型的函数都能行得通，但是对于这里正在讨论的函数是可行的.）应再订购的次数是2 500/71≈35，所以仍然涉及某个近似值. ■

使总存货成本最小的批量常称为经济订购量. 在用上述方法来确定经济订购量时，要做三个

假设. 首先，产品的需求在全年是一样的，这对于电视机可能合理，但对于季节性商品，例如服装或滑雪板，这可能不合理. 其次，在全年中，每次发出订货单与接收货物之间的时间是一致的. 最后，所涉及的各种成本(如仓储、运输费用等)是不变的. 这在通货膨胀时可能是不合理的，虽然可以计算出这些成本，例如通过预测它们可能是多少以及利用平均成本来计算. 尽管如此，上面所描述的方法仍然是有用的，并且使我们能够利用微分学来分析一些看似困难的问题.

习题 3.5

1. 在其和为 50 的所有数中，求有最大乘积的两个数，即最大化 $Q=xy$，其中 $x+y=50$.
2. 在其和为 70 的所有数中，求有最大乘积的两个数，即最大化 $Q=xy$，其中 $x+y=70$.
3. 在第 1 题中，可能有最小乘积吗? 说明理由.
4. 在第 2 题中，可能有最小乘积吗? 说明理由.
5. 在其差为 4 的所有数中，求有最小乘积的两个数.
6. 在其差为 6 的所有数中，求有最小乘积的两个数.
7. 求 $Q=xy^2$ 的最大值，其中 x 和 y 是满足 $x+y^2=1$ 的正数.
8. 求 $Q=xy^2$ 的最大值，其中 x 和 y 是满足 $x+y^2=4$ 的正数.
9. 求 $Q=2x^2+3y^2$ 的最小值，其中 $x+y=5$.
10. 求 $Q=x^2+2y^2$ 的最小值，其中 $x+y=3$.
11. 求 $Q=xy$ 的最大值，其中 x 和 y 是满足 $\frac{4}{3}x^2+y=16$ 的正数.
12. 求 $Q=xy$ 的最大值，其中 x 和 y 是满足 $x+\frac{4}{3}y^2=1$ 的正数.
13. 面积最大化. 某农夫要用 120 码长的篱笆沿河岸围一矩形篱笆地块. 其矩形的尺寸是多少将使其面积最大? 其最大面积是多少?（注意，农夫不必沿河岸做篱笆.）
14. 面积最大化. 某农夫要沿河岸圈起两个矩形地块，一个养羊，一个养牛. 现在有 240 码可用的篱笆，它能够圈起的最大总面积是多少?



15. 面积最大化. 某木工打算造一个矩形房间，其固定周长是 54 英尺. 可能造出的最大房间的尺寸是多少? 其最大面积是多少?
16. 面积最大化. 在周长为 34 英尺的所有矩形中，求具有最大面积的矩形的尺寸. 其面积是多少?
17. 容积最大化. 把一块 30 英寸×30 英寸的薄纸板从其四个角剪去四个小正方形，使得四边可以折起做成一个开口盒子. 什么样的尺寸将得到容积最大的盒子? 最大容积是多少?
18. 容积最大化. 把一块 20 英寸×20 英寸的薄纸板从其四个角剪去四个小正方形，使得四边可以折起做成一个开口盒子. 什么样的尺寸将得到容积最大的盒子? 最大容积是多少?
19. 表面面积最小化. 某容器公司正设计一款具有正方形底的开口长方形盒，其容积是 62.5 立方英寸. 取什么样的尺寸可得到最小表面面积? 最小表面面积是多少?
20. 表面面积最小化. 一饮料公司要建一个底为正方形的开口长方形金属水箱，其容积是 32 立方英尺. 取什么样的尺寸可得到最小表面面积? 最小表面面积是多少?

应用

商业与经济

利润最大化. 求最大利润以及为达到最大利润所应生产和销售的产品数量.

21. $R(x)=50x-0.5x^2$，$C(x)=4x+10$
22. $R(x)=50x-0.5x^2$，$C(x)=10x+3$
23. $R(x)=2x$，$C(x)=0.01x^2+0.6x+30$
24. $R(x)=5x$，$C(x)=0.001x^2+1.2x+60$
25. $R(x)=9x-2x^2$，$C(x)=x^3-3x^2+4x+1$；其中，$R(x)$ 和 $C(x)$ 以千美元计，而 x 以千件计.
26. $R(x)=100x-x^2$，$C(x)=\frac{1}{3}x^3-6x^2+89x+100$；

2007/08/16

其中，$R(x)$和$C(x)$以千美元计，而x以千件计.

27. 利润最大化. Raggs服装有限公司确定，为卖出x套服装，其单价应为

$$p = 150 - 0.5x.$$

同时还确定，生产x套服装的总成本可表示成

$$C(x) = 4\,000 + 0.25x^2.$$

a)求总收益$R(x)$.

b)求总利润$P(x)$.

c)为最大化利润，公司应生产并销售多少套服装?

d)最大利润是多少?

e)为获得这个最大利润，其服装单价应定为多少?

28. 利润最大化. 某公司正在生产一新款冰箱. 它确定，为了卖出x台冰箱，每台价格应为

$$p = 280 - 0.4x.$$

同时还确定，生产x台冰箱的总成本可表示成

$$C(x) = 5\,000 + 0.6x^2.$$

a)求总收益$R(x)$.

b)求总利润$P(x)$.

c)为最大化利润，公司应生产并销售多少台冰箱?

d)最大利润是多少?

e)为获得这个最大利润，其冰箱单价应定为多少?

29. 收益最大化. 某大学正试图为足球票定价. 如果每张票价为6美元，则平均每场比赛有70 000名观众. 每提价1美元，就要从平均人数中失去10 000名观众. 每名观众在让价上平均花费1.50美元. 为使收益最大化，每张票应定价多少? 按该票价，将有多少名观众观看比赛?

30. 收益最大化. Gritz-Charlston是拥有300套房间的旅馆. 当旅馆把每套房定价为每日80美元时，所有房间都有人住. 如果每日房价上调x美元，则有x套空房. 在服务并维持营业方面，每套占用房每日花费22美元. 为使收益最大化，旅馆应把房价定为多少?

31. 产出最大化. 当在一英亩[①]地上种植20棵苹果树时，果农平均从每棵果树获得30蒲式耳(1蒲式耳=8加仑)苹果. 当每英亩地多种1棵树时，由于太拥挤，每棵树减产1bu(蒲式耳). 为了获得最高产量，每英亩应种植多少棵果树?

32. 氮的价格. 在2001年，氮的价格下跌41%. 在同一周期，氮的需求上升12%. (资料来源：*Chemical Week*.)

a)假定需求呈线性变化，试通过求过点(1, 1)和(0.59, 1.12)的直线方程求需求函数$D(p)$. 这里p是用2001年1月的价格表示的价格.

b)为使收益最大化，用2001年1月的价格表示的氮的价格应是多少?

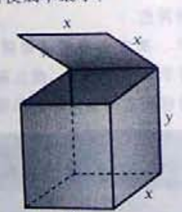
33. 个性化车号牌照. 根据定价模型，如果个性化车号牌照的初始收费提价1美元，则在某州将申请该牌照的人数比率会下降0.04%. (资料来源：E. D. Craft, "The demand for vanity (plates), elasticities, net revenue maximization, and deadweight loss," *Contemporary Economic Policy*, Vol. 20, 133-144(2002).)

a)最近，马里兰州的个性化牌照的初始收费是25美元，且该州持有个性化牌照的人数比率是2.13%. 试用这个信息构造一个需求函数$D(p)$来描述将要申请个性化车号牌照的马里兰州人所占的百分比.

b)求将使收益最大化的初始收费价格p.

34. 收益最大化. 当影院对每张入场票定价5美元时，平均有180人观看电影. 如果每张票提价0.10美元，则从平均人数中失掉1个顾客. 为使收益最大化，入场票价应定为多少?

35. 成本最小化. 构造一个容积为320立方英尺的长方体盒，并且带有方形底和顶. 底每平方英尺造价为15¢(哥斯达黎加科郎)，顶每平方英尺造价为10¢，而各侧面每平方英尺造价为2.5¢. 什么样的尺寸将使成本最小?



*36. 向营业员购买展示牌子的商人说，"我想要一块10英尺×10英尺的展示牌."营业员回答，"那就是我们要给您准备的牌子，不过，为了使它更加美观好看，为什么不把它换成7英尺×13英尺呢?"试作点评.

37. 利润最大化. 储户在银行储蓄的金额数量与银行按金额支付的利率成正比. 假设银行可按18%的利率贷出其储户的所有金额. 为使利润最大化，银行应付给储户多大的利率?

38. 面积最大化. 本书[②]的一页有73.125平方英寸. 每页的顶部和底部分别有0.75英寸的余量，而两侧各有0.5英寸的余量. 每页的外围尺寸应为多少才能使其印刷面积最大? 测量一下本书一页的外围尺寸，看是否是使印刷面积最大的实际尺寸.

39. 存货成本最小化. 体育用品商店每年销售100张台球桌. 库存一张台球桌一年的费用为20美元. 为再订购，需付40美元的固定成本，以及每张台球桌另加16美元. 为了最小化存货成本，商店每年应订购台球桌几次，每次批量为多少?

40. 存货成本最小化. 保龄球中心的职业运动员商店每年销售200个保龄球. 库存一个保龄球一年的费用是4美元. 为再定购，需付1美元的固定成本，以及每个保龄球另加0.50美元. 为最小化存货成本，商店每年应订购保龄球几次，每次批量为多少?

41. 存货成本最小化. Boxowitz计算器零售商店每年销售360台计算器. 库存一台计算器一年的费用是8美元. 为再订购，需付10美元的固定成本，以及每台计算器另加8美元. 为最小化存货成本，商店每年应订购计算器几次，每次批量为多少?

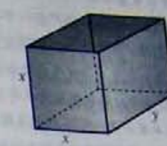
42. 存货成本最小化. 南加州的某家体育用品商店每年销售720副冲浪板. 库存一副冲浪板一年的费用是2美元. 为再订购，需付5美元的固定成本，以及每副冲浪板另加2.50美元. 为最小化存货成本，商店每年应订购冲浪板几次，每次批量为多少?

43. 存货成本最小化. 重做第41题，除把库存费8美元改为9美元外，采用原题中给出的所有数据.

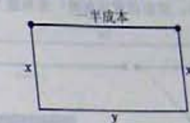
44. 最小化存货成本. 重做第42题，除把5美元的固定成本改为4美元外，采用原题中给出的所有数据.

一般兴趣

45. 容积最大化. 邮局服务部对打算邮寄的包裹的长度与围长(绕包裹一周之长)的总长有84英寸的限制. 具有横截正方形的矩形盒子取何尺寸将容纳容积最大的可邮寄包裹? (提示：有两个不同的围长.)



46. 成本最小化. 在个人庭院中用栅栏隔挡开一个矩形游戏场地，其面积为48平方码. 邻居同意为游戏场地所标注的一边上的栅栏付一半费用. 什么样的尺寸将使栅栏的成本最小?



47. 使光线最好. Norman窗户是其顶部为一个半圆周的矩形. 设一个特殊的Norman窗户的周长为24英尺. 为了能使最多的光线进入窗户，其尺寸应为多少?





48. 使光线最好. 重做第47题，但假定半圆是着色玻璃，它透过的光线只有47题中的半圆的一半.

综合题

49. 对于什么样的正数，其倒数与其平方的5倍之和最小?

---

① 英亩的单位符号为acre，1acre=4 046.856m². ——编辑注

② 这里是指英文原书. ——编辑注

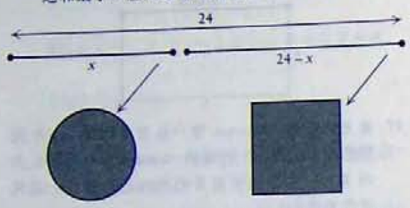
2007/08/16

50. 对于什么样的正数，其倒数与其平方的 4 倍之和最小？

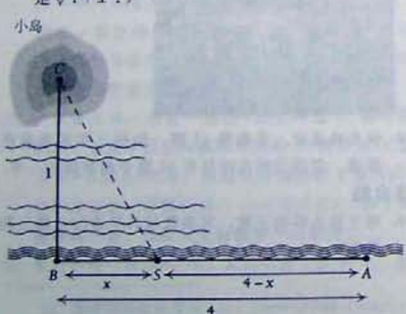
51. 商业：存货成本最小化——一般解. 某商店每年销售 Q 件产品，库存一件产品一年的费用是 a 美元. 为再订购，需付 b 美元的固定成本，以及每件产品另加 c 美元. 为使存货成本最小化，商店每年应订购几次，每次批量是多少？

52. 商业：存货成本最小化. 利用 51 题求得的一般解，求商店每年应再订购的次数以及每次的批量，已知 $Q=2\,500$，$a=10$ 美元，$b=20$ 美元和 $c=9$ 美元.

53. 一条 24 英寸的细绳剪成两段. 用一条围成一个圆，用另一条围成一个正方形. 为使这两个面积之和最小，应如何剪该细绳？其和最大又如何？

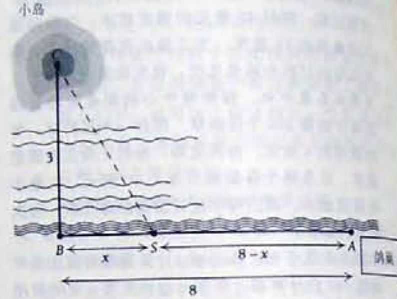


54. 商业：成本最小化. 一根电缆从点 A 处的发电站铺设到点 C 处的小岛，从海岸边的点 B 沿水路径直到点 C 的距离是 1 英里. 从 A 处的发电站沿海岸到点 B 的距离是 4 英里. 在水下铺设电缆每英里造价为 5 000 美元，而在陆地下铺设电缆每英里造价为 3 000 美元. 为使造价最省，位于岸边的电缆应从 A 沿岸铺设到何处(S)？注意，S 有可能正好是 B 或 A.（提示：CS 之长是 $\sqrt{1+x^2}$.）

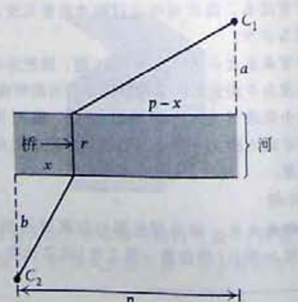


55. 生命科学：信鸽的飞行距离. 我们知道，信鸽白天力图避免在水面上空飞行，这可能是因为水面上空的向下气流会造成飞行困难. 假设在 C 处的岛上放飞信鸽，从海岸边上的点 B 经水路径直到点 C 的距离是 3 英里. 从点 A 处的鸽巢沿海岸到点 B 的距离是 8 英里. 设鸽子在水面上空飞行所需能耗率是它在陆地上空飞行的 1.28 倍. 为使回到鸽巢 A 所需总能耗最省，按沿岸距离，鸽子应朝距 A 处多远的 S 处飞行？假定

（总能耗）=（水面上空的能耗率）·（水面上的距离）+（陆地上空的能耗率）·（陆地上的距离）



56. 商业：距离最小化. 在两个城市 C_1 和 C_2 之间修一条公路，两个城市位于宽度均为 r 的一条河的两侧. 因为这条河，所以必须建一座桥. C_1 到河的距离是 a，C_2 到河的距离是 b；$a \leqslant b$. 为使两个城市之间的总距离最短，桥应建在何处？用下图中的常数 a，b，p 和 r 给出一般解.



57. 商业：成本最小化. 生产 x 件某种产品的总成本函数可表示成

$$C(x) = 8x + 20 + \frac{x^3}{100}.$$

a)求边际成本 $C'(x)$.

b)求平均成本 $A(x)=C(x)/x$.

c)求边际平均成本 $A'(x)$.

d)求 $A(x)$ 的最小值和取最小值时的值 x_0. 求 x_0 处的边际成本.

e)比较 $A(x_0)$ 和 $C'(x_0)$.

58. 商业：成本最小化. 考虑 $A(x)=C(x)/x$.

a)利用 $C'(x)$ 和 $C(x)$ 求 $A'(x)$.

b)证明 $A(x)$ 在满足

$$C'(x_0) = A(x_0) = \frac{C(x_0)}{x_0}$$

的值 x_0 上有最小值. 这说明，当边际成本与平均成本相同时，产品正以最低平均成本在生产.

59. 求 $Q=x^2+2y^2$ 的最小值，其中 x 和 y 是满足 $x+y=1$ 的正数.

60. 求 $Q=3x+y^3$ 的最小值，其中 $x^2+y^2=2$.

*61. 说明如何利用边际收益、边际成本和边际利润求最大利润.

261 ~ 265

3.6 微分

要点

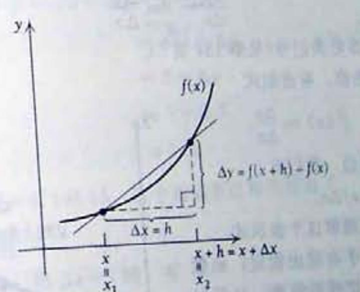
- 求 Δy 和 dy.
- 用微分表示近似值.

在本节里，我们讨论如何利用微分学来进行线性逼近. 例如，在患病的某个时刻，某患者的体温是(华氏)102°，且体温的瞬时变化率是每分钟 −2°，看来有理由预测，1 分钟后患者的体温大约为 100°. 特别地，如果体温是下述某个特殊形式的函数表达式，更可以进行预测.

记号

回顾下图中所解释的差商

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$



差商用于定义函数在 x 处的导数. 数 h 看作是 x 的改变量. 这个改变量的另一个记号是 Δx，读作"delta x"并且称之为 **Δ 记号**(delta notation). 表示式 Δx 不是 Δ 与 x 的乘积，而是一个整体，即它是一个新型的变量，表示 x 值从第一个值到第二个值的改变量. 因此

$$\Delta x = (x+h) - x = h.$$

如果用下标来表示 x 的第一个值和第二个值，则有

2007/08/16

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad 或 \quad x_2 = x_1 + \Delta x.$$

Δx 可正可负.

例1

a) 如果 $x_1=4$ 且 $\Delta x=0.7$，则 $x_2=4.7$.

b) 如果 $x_1=4$ 且 $\Delta x=-0.7$，则 $x_2=3.3$. ■

266 一般我们省略下标而采用 x 和 $x+\Delta x$. 现在，设有一个由 $y=f(x)$ 给出的函数. x 从 x 到 $x+\Delta x$ 的改变产生 y 从 $f(x)$ 到 $f(x+\Delta x)$ 的改变. y 的改变量可以表示成

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

例2 对于 $y=x^2$，$x=4$ 和 $\Delta x=0.1$，求 Δy.

解 我们有

$$\Delta y = (4+0.1)^2 - 4^2 = (4.1)^2 - 4^2 = 16.81 - 16 = 0.81.$$ ■

例3 对于 $y=x^3$，$x=2$ 和 $\Delta x=-0.1$，求 Δy.

解 我们有

$$\Delta y = [2+(-0.1)]^3 - 2^3 = (1.9)^3 - 2^3 = 6.859 - 8 = -1.141.$$ ■

下面考察如何利用微分学对函数值进行估计(或进行预测). 如要采用 Δ 记号，则差商

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

变成

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

于是，可以把导数表示成

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

注意，Δ 记号类似于莱布尼茨记号(见第137页⊖).

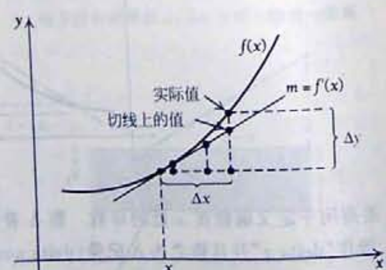
对于 Δx 趋近于0的值，有近似式

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad 或 \quad f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

用 Δx 乘第二个式子的两边，我们有

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

在右图中，可以用图形来理解这个表示式.



从这个图形来看，似乎有理由假定，函数的平均变化率近似等于其切线的斜率，且可以用切线估计函数值.

267 我们通过考察平方根函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 来说明这个想法. 我们知道如何用计算器求 $\sqrt{27}$ 的

⊖ 这是指原书页码，与书中页边标注的页码一致. ——编辑注

近似值. 但是现在假定不用计算器. 从 $\sqrt{25}$ 开始且用输入 $\Delta x=2$ 作为改变量，我们要用 y 的改变量 $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ 来估计 $\sqrt{27}$.

例4 用 $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ 求 $\sqrt{27}$ 的近似值.

解 首先考虑一个最接近于27的完全平方数，这就是25. 我们要做的是，当25改变 $\Delta x=2$ 时，近似计算 y 或 $\sqrt{x}$ 如何改变. 设

$$y = f(x) = \sqrt{x}.$$

则

$$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{x+\Delta x} - y,$$

因而

$$y + \Delta y = \sqrt{x+\Delta x}.$$

现在

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x = \frac{1}{2}x^{-1/2}\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

如果设 $x=25$ 且 $\Delta x=2$，则

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

于是有

$$\begin{aligned}\sqrt{27} = \sqrt{25+2} = \sqrt{x+\Delta x} &= y + \Delta y \\ &= \sqrt{25} + \Delta y \qquad y=\sqrt{x};\ x=25 \\ &= 5 + \Delta y \\ &\approx 5 + 0.2 \\ &\approx 5.2.\end{aligned}$$ ■

精确到小数点后5位，$\sqrt{27}=5.196\ 15$. 这个近似值已相当精确了.

商业与经济应用：边际分析

设有总成本函数 $C(x)$. 当 $\Delta x=1$ 时，有

$$\Delta C \approx C'(x). \qquad \leftarrow C'(x)\Delta x = C'(x)\cdot 1 = C'(x)$$

这是否是一个好的近似取决于所给函数以及 x 的值. 我们来考察一个例子. 268

例5 考虑总成本函数

$$C(x) = 2x^3 - 12x^2 + 30x + 200.$$ (见第151页)

a) 当 $x=2$ 和 $\Delta x=1$ 时，求 ΔC 和 $C'(x)$.

2007/08/16

b)当 $x=100$ 和 $\Delta x=1$ 时，求 ΔC 和 $C'(x)$.

解

a)我们有

$$\Delta C = C(2+1) - C(2) = C(3) - C(2) = 236 - 228 = 8(\text{美元}).$$

已知 $C(2)$是生产 2 件产品的总成本，$C(3)$是生产 3 件产品的总成本，所以 $C(3)-C(2)$即 8 美元是生产第 3 件产品的成本．现在

$$C'(x) = 6x^2 - 24x + 30, \quad \text{因而} \quad C'(2) = 6(\text{美元}).$$

b)我们有

$$\Delta C = C(100+1) - C(100) = C(101) - C(100) = 58\ 220(\text{美元}).$$

所以，这是生产第 101 件产品的成本．现在

$$C'(100) = 57\ 630(\text{美元}).$$

注意，在 a)中，近似值 6 美元比“正确”值 8 美元少 2 美元：与正确值相比，其百分比差是 2/8 即 25%．在 b)中，近似值 57 630 美元比“正确”值 58 220 美元少 590 美元；与正确值相比，其百分比差是 590/58 220 即约 1%，所以它是一个非常精确的近似．■

在例 5 中我们有意采用 $\Delta x=1$，是为了说明以下事实．

$$C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$$

边际成本(近似)等于第$(x+1)$件或下一件产品的成本．

这是经济学家对边际成本给出的历史定义．

类似地，以下事实成立．

$$R'(x) \approx R(x+1) - R(x)$$

边际收益(近似)等于从第$(x+1)$件或下一件产品的销售中所获得的收益．

并且

$$P'(x) \approx P(x+1) - P(x)$$

269 **边际利润**(近似)等于从第$(x+1)$件或下一件产品的生产和销售中所获得的利润．

微分

直到现在，我们还没有把记号 dy 和 dx 定义为各自独立的整体，并且我们一直把 dy/dx 作为一个记号来对待．现在要定义 dy 和 dx，这两个记号都称为**微分**(differential)．

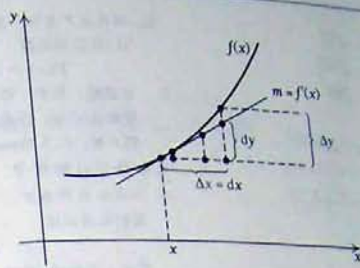
定义 对于 $y=f(x)$，规定

dx 称为 x **的微分**，它由 $dx=\Delta x$ 给出．

而

dy 称为 y **的微分**，它由 $dy=f'(x)dx$ 给出．

可以用下图来说明 dx 和 dy．注意，$dx=\Delta x$，但是 $dy\neq\Delta y$，尽管对于 dx 的较小值有 $dy\approx\Delta y$．



例 6 对于 $y=x(4-x)^3$：

a)求 dy．

b)求当 $x=5$ 和 $dx=0.2$ 时的 dy．

解

a)首先，求 dy/dx：

$$\frac{dy}{dx} = -x[3(4-x)^2] + (4-x)^3 \quad \text{利用乘积法则和广义幂法则}$$
$$= (4-x)^2[-3x+(4-x)]$$
$$= (4-x)^2[-4x+4] \quad \text{化简}$$
$$= -4(4-x)^2(x-1).$$

于是

$$dy = -4(4-x)^2(x-1)dx. \qquad 270$$

注意，dy 的表示式包含 x 和 dx 这两个变量．

b)当 $x=5$ 和 $dx=0.2$ 时，

$$dy = -4(4-5)^2(5-1)0.2 = -4(-1)^2(4)(0.2) = -3.2.$$ ■

习题 3.6

求 Δy 和 $f'(x)\Delta x$．

1. 对于 $y=f(x)=x^2$，$x=2$ 和 $\Delta x=0.01$
2. 对于 $y=f(x)=x^3$，$x=2$ 和 $\Delta x=0.01$
3. 对于 $y=f(x)=x+x^2$，$x=3$ 和 $\Delta x=0.04$
4. 对于 $y=f(x)=x-x^2$，$x=3$ 和 $\Delta x=0.02$
5. 对于 $y=f(x)=1/x^2$，$x=1$ 和 $\Delta x=0.5$
6. 对于 $y=f(x)=1/x$，$x=1$ 和 $\Delta x=0.2$
7. 对于 $y=f(x)=3x-1$，$x=4$ 和 $\Delta x=2$
8. 对于 $y=f(x)=2x-3$，$x=8$ 和 $\Delta x=0.5$
9. 对于总成本函数
$$C(x) = 0.01x^2 + 0.6x + 30,$$
求 $x=70$ 和 $\Delta x=1$ 时的 ΔC 和 $C'(x)$．
10. 对于总成本函数
$$C(x) = 0.01x^2 + 1.6x + 100,$$
求 $x=80$ 和 $\Delta x=1$ 时的 ΔC 和 $C'(x)$．
11. 对于总收益函数
$$R(x) = 2x,$$
求 $x=70$ 和 $\Delta x=1$ 时的 ΔR 和 $R'(x)$．
12. 对总收益函数
$$R(x) = 3x,$$
求 $x=80$ 和 $\Delta x=1$ 时的 ΔR 和 $R'(x)$．
13. a)用第 9 题的 $C(x)$和第 11 题的 $R(x)$求总利润 $P(x)$．
b)求 $x=70$ 和 $\Delta x=1$ 时的 ΔP 和 $P'(x)$．
14. a)用第 10 题的 $C(x)$和第 12 题的 $R(x)$求总利润 $P(x)$．
b)求 $x=80$ 和 $\Delta x=1$ 时的 ΔP 和 $P'(x)$．

……求近似值．

2007/08/16

15. $\sqrt{19}$　　16. $\sqrt{10}$

17. $\sqrt{102}$　　18. $\sqrt{103}$

19. $\sqrt[3]{10}$　　20. $\sqrt[3]{28}$

求 dy.

21. $y=\sqrt{x+1}$　　22. $y=\sqrt{3x-2}$

23. $y=(2x^3+1)^{3/2}$　　24. $y=x^3(2x+5)^2$

25. $y=\sqrt[3]{x+27}$　　26. $y=\dfrac{x^3+x+2}{x^2+3}$

27. $y=x^4-2x^3+5x^2+3x-4$

28. $y=(7-x)^8$

29. 在第 27 题中，求 $x=2$ 和 $dx=0.1$ 时的 dy.

30. 在第 28 题中，求 $x=1$ 和 $dx=0.01$ 时的 dy.

应用

商业与经济

31. **平均成本.** 某公司生产 x 件产品的平均成本可表示成函数

$$A(x)=\frac{13x+100}{x}.$$

当产量从 100 件增加到 101 件时平均成本近似变化了多少?

32. **供给.** 某个产品的供给函数可表示成

$$S(p)=0.08p^3+2p^2+10p+11.$$

当价格从单价 18.00 美元变到 18.20 美元时，卖方将大约多供给多少件产品?

33. **广告.** 某公司预测，在花费了 a 美元广告费以后，将卖出 N 件产品，其中

$$N(a)=-a^2+300a+6,$$

且 a 以千美元计. 当广告费从 100 千美元增加到 101 千美元时，公司将大约多卖出多少件产品?

34. **棒球大联赛票价.** 棒球大联赛平均票价可以用函数

$$p(x)=0.09x^2-0.19x+9.41$$

来建模，其中 x 是 1990 年以后的年数. 从 2005 年到 2006 年，票价将大约上涨多少?(资料来源：Major League Baseball.)

35. **国内生产总值.** 美国国内生产总值(以 10^9 美元计)可以用函数

$$P(x)=567+x(36x^{0.6}-104)$$

来建模，其中 x 是自 1960 年算起的年数. 从 2005 年到 2006 年，国内生产总值将大约增长多少?(资料来源：U. S. Bureau for Economic Analysis.)

生命科学与物理学

36. **正在愈合的伤口.** 一个正在愈合的伤口的圆形面积可表示成

$$A=\pi r^2,$$

其中 r 是半径(单位：厘米). 当其半径从 2 厘米减少到 1.9 厘米时，其面积大约减少了多少?($\pi=3.14$.)

37. **人体表面面积.** 某个化学疗法的辐射量与患者身体的表面面积有关. 根据 Gehan 和 George 模型

$$S=0.022\,35h^{0.422\,46}w^{0.514\,56},$$

其中，h 是患者身高(厘米)，w 是患者体重(千克)，而 S 是其表面面积(平方米)的近似值. (资料来源：www. halls. md.)

a)设患者身高 165 厘米，体重 70 千克. 用 Gehan 和 George 模型求患者表面面积的近似值.

b)设患者体重增加 1 千克，而身高仍为 165 厘米. 用微分估计他的表面面积的改变量.

38. **药物剂量.** 函数

$$N(t)=\frac{0.8t+1\,000}{5t+4}$$

给出了在时间 t(小时)后药物剂量在体内的浓度 $N(t)$(以百万分之一计). 当时间从 2.8 小时变到 2.9 小时的时候，其浓度大约变化了多少?

一般兴趣

39. 假设一根绳子在赤道上环绕地球. 若绳子延长 10 英尺，则该绳从地球上大约升高多少?

综合题

*40. 在关于数学史的书中查阅微分的思想，写出一段短文.

*41. 说明微分的用途.

3.7[1] 隐微分法与相关变化率

要点

- 求隐函数的导数.
- 求解相关变化率问题.

[1] 略去这一节不会影响连贯性.

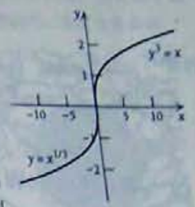
隐微分法

考虑方程

$$y^3=x.$$

这个方程暗示 y 是 x 的函数，因为如果解出 y 就可得到

$$y=\sqrt[3]{x}$$
$$=x^{1/3}.$$



271
)
272

由前面的介绍可知

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

一种称为**隐微分**(implicit differentiation)的方法使我们能在不解出 y 的情况下求 dy/dx. 我们采用链式法则，把 y 看作 x 的函数. 利用广义幂法则对

$$y^3=x$$

两边关于 x 求导：

$$\frac{d}{dx}y^3=\frac{d}{dx}x.$$

用广义幂法则求左边的导数：

$$3y^2\frac{dy}{dx}=1.$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2}\quad 或\quad \frac{1}{3}y^{-2}.$$

用 $x^{1/3}$ 代替 y 可以证明，这的确给出了与表示式(1)相同的答案：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}y^{-2}=\frac{1}{3}(x^{1/3})^{-2}=\frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

常有的情形是为得到一个用 x 表示的明显表达式，不易或不能解 y. 例如，方程

$$y^3+x^2y^5-x^4=27$$

确定 y 为 x 的函数，但要解出 y 很难. 我们可不必解出 y 也能求得一个关于 y 的导数公式. 这需要对不同的整数 n 计算 $\frac{d}{dx}y^n$，并且把广义幂法则用于

$$\frac{d}{dx}y^n=ny^{n-1}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

例 1 对于 $y^3+x^2y^5-x^4=27$：

a)用隐微分法求 dy/dx.

b)求该曲线在点(0，3)处的切线斜率.

解

a)用乘积法则求 x^2y^5 项的导数. 注意，只要是求包含 y 的表示式的导数，dy/dx 都必须是求导结果的一个因子. 当求只含 x 的表示式的导数时，就不会出现 dy/dx.　273

2007/08/16

$$\frac{d}{dx}(y^3+x^2y^5-x^4)=\frac{d}{dx}(27)$$

$$\frac{d}{dx}y^3+\frac{d}{dx}x^2y^5-\frac{d}{dx}x^4=0$$

$$3y^2\cdot\frac{dy}{dx}+x^2\cdot 5y^4\cdot\frac{dy}{dx}+2x\cdot y^5-4x^3=0$$

因而

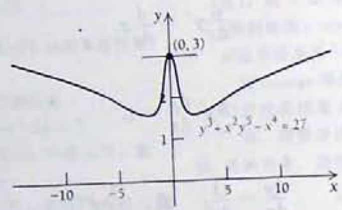
$$3y^2\cdot\frac{dy}{dx}+5x^2y^4\cdot\frac{dy}{dx}=4x^3-2xy^5 \qquad \text{只把含 } dy/dx \text{ 的诸项放在同一边}$$

$$(3y^2+5x^2y^4)\frac{dy}{dx}=4x^3-2xy^5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-2xy^5}{3y^2+5x^2y^4} \qquad \text{解出 } dy/dx\text{，答案中保留 } x \text{ 和 } y$$

b) 为求该曲线在点(0，3)处的切线斜率，把 x 代以 0，且 y 代以 3：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4\cdot 0^3-2\cdot 0\cdot 3^5}{3\cdot 3^2+5\cdot 0^2\cdot 3^4}=0.$$



■

产品的需求函数(见 1.5 节和 2.6 节)常常用隐函数给出．

例 2　对需求方程 $x=\sqrt{200-p^3}$，用隐微分法求 dp/dx．

解

$$\frac{d}{dx}x=\frac{d}{dx}\sqrt{200-p^3}$$

$$1=\frac{1}{2}(200-p^3)^{-1/2}\cdot(-3p^2)\cdot\frac{dp}{dx}$$

$$1=\frac{-3p^2}{2\sqrt{200-p^3}}\cdot\frac{dp}{dx}$$

274
$$\frac{2\sqrt{200-p^3}}{-3p^2}=\frac{dp}{dx}$$

■

相关变化率

设 y 是 x 的函数，例如

$$y=f(x),$$

且 x 随时间 t 变化(作为时间 t 的函数)．因为 y 依赖于 x 而 x 依赖于 t，所以 y 也依赖于 t．即 y 也是时间 t 的函数．链式法则给出下述公式：

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

因此，y 的变化率与 x 的变化率是相关的．让我们看一看如何把它变成现实问题．这有助于理解任何变量都是时间 t 的函数，即使不能给出一个用 t 来表示的特殊表示式，情况也是如此．

例 3　商业：服务范围．某餐饮供应商在一个圆形区域内提供餐饮服务，并且在其服务半径达到 $r=5$ 英里的那个时刻，其半径 r 以每年 2 英里的速率在扩展服务，在该时刻，服务范围以多快的速率在增长？



解　面积 A 与其半径 r 总可以通过圆面积方程建立起联系：

$$A=\pi r^2.$$

两边关于 t 求导数：

$$\frac{dA}{dt}=2\pi r\cdot\frac{dr}{dt}.$$

在上述那个时刻，$dr/dt=2$ 英里/年且 $r=5$ 英里．所以

$$\frac{dA}{dt}=2\pi\cdot 5\cdot 2=20\pi$$

$$\approx 63(\text{平方英里 / 年})$$

■　275

例 4　商业：收益、成本和利润的变化率．对于某公司制造的立体声收音机，从销售 x 台立体声收音机所获得的总收益可表示成

$$R(x)=1\,000x-x^2,$$

且其总成本可表示成

$$C(x)=3\,000+20x.$$

假定在生产第 400 台立体声收音机的那个时刻，公司正以每天 10 台的速率生产和销售立体声收音机．在这同一时刻，a)其总收益变化率是多少？b)总成本呢？c)总利润呢？

解

a) $$\frac{dR}{dt}=1\,000\cdot\frac{dx}{dt}-2x\cdot\frac{dx}{dt} \qquad \text{关于时间求导}$$

$$=1\,000\cdot 10-2(400)10 \qquad \frac{dx}{dt}\text{ 代以 10 和 } x \text{ 代以 400}$$

$$=2\,000(\text{美元 / 天}).$$

b) $$\frac{dC}{dt}=20\cdot\frac{dx}{dt} \qquad \text{关于时间求导}$$

$$=20(10)=200(\text{美元 / 天}).$$

c) 因为 $P=R-C$，

$$\frac{dP}{dt}=\frac{dR}{dt}-\frac{dC}{dt}$$

$$=2\,000-200=1\,800(\text{美元 / 天}).$$

■

2007/08/16

习题 3.7

用隐微分法求 dy/dx. 然后求该曲线在给定点的斜率.

1. $xy-x+2y=3$; $\left(-5, \frac{2}{3}\right)$
2. $xy+y^2-2x=0$; $(1, -2)$
3. $x^2+y^2=1$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4. $x^2-y^2=1$; $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$
5. $x^2y-2x^3-y^3+1=0$; $(2, -3)$
6. $4x^3-y^4-3y+5x+1=0$; $(1, -2)$

用隐微分法求 dy/dx.

7. $2xy+3=0$
8. $x^2+2xy=3y^2$
9. $x^2-y^2=16$
10. $x^2+y^2=25$
11. $y^2=x^3$
12. $y^3=x^5$
13. $x^2y^3+x^3y^4=11$
14. $x^3y^2-x^5y^3=-19$

对于给定的需求方程, 用隐微分法求 dp/dx.

15. $\frac{x^2p+xp+1}{2x+p}=1$ (提示: 先化掉分式.)
16. $\frac{xp}{x+p}=2$ (提示: 先化掉分式.)
17. $p^2+p+2x=40$
18. $xp^3=24$
19. $(p+4)(x+3)=48$
20. $1\,000-300p+25p^2=x$
21. 两个变量 A 和 B 通过方程
$$A^3+B^3=9$$
建立起联系. 在 $A=2$ 和 $dB/dt=3$ 的时刻, 变化率 dA/dt 是多少?
22. 两个非负变量 G 和 H 通过方程
$$G^2+H^2=25$$
建立起联系. 当 $dG/dt=3$ 和 $G=0$ 时, 变化率 dH/dt 是多少? $G=1$ 呢? $G=3$ 呢?

应用

商业与经济

总收益、总成本和总利润的变化率. 对下列各题, 分别求总收益、总成本和总利润的变化率.

23. $R(x)=50x-0.5x^2$,
$C(x)=4x+10$,
当 $x=30$ 且 $dx/dt=20$(件/天)时.
24. $R(x)=50x-0.5x^2$,
$C(x)=10x+3$,
当 $x=10$ 且 $dx/dt=5$(件/天)时.
25. $R(x)=2x$,
$C(x)=0.01x^2+0.6x+30$,
当 $x=20$ 且 $dx/dt=8$(件/天)时.
26. $R(x)=280x-0.4x^2$,
$C(x)=5\,000+0.6x^2$,
当 $x=200$ 且 $dx/dt=300$(件/天)时.
27. *销售的变化.* 设某产品的价格 p 和销售量 x 满足方程
$$5p+4x+2px=60.$$
又设 p 和 x 都是时间的函数. 当 $x=3$, $p=5$ 和 $dp/dt=1.5$ 时, 求 x 以什么变化率在变化.
28. *收益的变化.* 上接第 27 题, 当 $x=3$, $p=5$ 和 $dp/dt=1.5$ 时, 求总收益以什么变化率在变化.

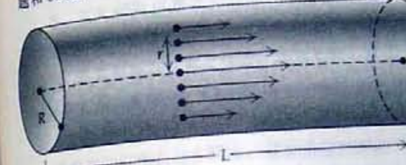
生命科学

29. *人体表面面积.* 某个化学疗法的药物剂量与患者身体的表面面积有关. 根据 Mosteller 模型
$$S=\frac{\sqrt{hw}}{60},$$
其中, h 是患者的身高(厘米), w 是患者的体重(千克), 而 S 是患者的近似表面面积(平方米). (资料来源: www.halls.md.) 设患者身高不变, 为 165 厘米, 但他在节制饮食. 如果患者每月减少 2 千克, 在他体重 70 千克的时刻, 他的表面面积在以多快的速度减少?
30. *正在愈合的伤口的变化率.* 正在愈合的伤口的圆形面积可表示成
$$A=\pi r^2.$$
在 $r=25$ 毫米的时刻其半径以每天 1 毫米(−1毫米/天)的速率在减小. 在该时刻其面积以多快的速度在减小?

普瓦瑟耶粘滞定律. 对于血管中的血液, 靠近血管中心的血液流得较快, 而靠近血管壁的血液流得较慢. 血流速率 V 可表示成
$$V=\frac{p}{4Lv}(R^2-r^2),$$
其中, R 是血管的半径, r 是测量点血液与血管中心间的距离, 而 p, L 和 v 分别是与血管的压力、长度和粘滞度有关的物理常量. 把这个公式用于 31 题和 32 题.



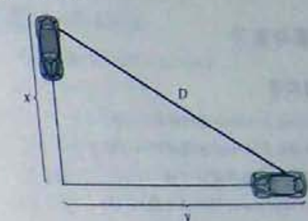
血管中的血流可以用普瓦泽伊粘滞定律来建模



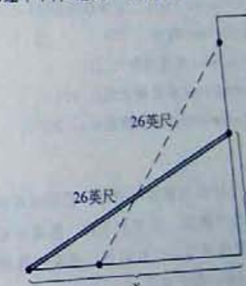
31. 设 r 与 p, L 和 v 一样是常量.
a) 当 $L=1$ 毫米, $p=100$ 和 $v=0.05$ 时, 用 R 和 dR/dt 求变化率 dV/dt.
b) 某人到寒冷的户外去铲雪. 冷空气有收缩远离心脏的血管的功效. 假定在血管中半径 $R=0.007\,5$ 毫米的部位, 血管以
$$\frac{dR}{dt}=-0.001\,5 \text{ 毫米/分}$$
的速率在收缩. 求在该部位的变化率 dV/dt.
32. 设 r 与 p, L 和 v 一样是常量.
a) 当 $L=1$ 毫米, $p=100$ 和 $v=0.05$ 时, 用 R 和 dR/dt 求变化率 dV/dt.
b) 当在寒风中铲雪时, 有心脏病史的人由于血管收缩可能引发心绞痛(胸口痛). 为了缓解疼痛, 他可能服用硝酸甘油片, 因为它可以扩张血管. 设服用硝酸甘油片以后, 在半径 $R=0.02$ 毫米的血管部位, 血管以
$$\frac{dR}{dt}=0.002\,5 \text{ 毫米/分}$$
的速率扩张. 求变化率 dV/dt.

一般兴趣

33. 两辆汽车在同一时间从同一地点起程(见下图). 一辆以 25 英里/小时的速度向北行驶, 而另一辆以 60 英里/小时的速度向东行驶. 在 1 小时末, 它们之间的距离以多快的速度在增大? (提示: $D^2=x^2+y^2$. 为求 1 小时后的 D, 解 $D^2=25^2+60^2$.)



34. 一架长 26 英尺的梯子斜靠在一堵竖直的墙上. 如果其下端正以 5 英尺/秒的速率离开墙壁, 那么当下端距离墙壁 10 英尺时, 其顶端的高以多快的速率下降(这是一个负变化率)?



综合题

用隐微分法求 dy/dx.

35. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$
36. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=5$
37. $y^3=\frac{x-1}{x+1}$
38. $y^2=\frac{x^2-1}{x^2+1}$
39. $x^{2/3}+y^{2/3}=1$
40. $(x-y)^3+(x+y)^3=x^5+y^5$

用隐微分法求 dy/dx 和 d^2y/dx^2.

2007/08/16

41. $xy+x-2y=4$　　42. $y^2-xy+x^2=5$

43. $x^2-y^2=5$　　44. $x^3-y^3=8$

276～278

*45. 说明隐微分法的用途.

*46. 在字典中查阅词"隐含的"，说明该定义与"隐含地"定义的函数概念有何联系.

上机技术演练

用绘图器作下列每个方程的图形. 在大多数绘图器上，必须先解方程求出 y 方可把它们输进去.

47. $x^2+y^2=4$. 注意，可能需要把图形画成两个部分：

$$y=\sqrt{4-x^2}\quad 和 \quad y=-\sqrt{4-x^2}.$$

然后画图形在点$(-1, \sqrt{3})$处的切线.

48. $x^4=y^2+x^6$. 然后画图形在点$(-0.8, 0.384)$处的切线.

49. $y^4=y^2-x^2$　　50. $x^3=y^2(2-x)$

51. $y^2=x^3$

概要与复习

关键术语

Increasing function(递增函数)，187
Decreasing function(递减函数)，187
Critical point(临界点)，188
Relative maximum(相对极大值)，189
Relative minimum(相对极小值)，189
Relative extrema(相对极值)，189
First-Derivative Test(一阶导数判别法)，192
Concavity(凹性)，202，203
Second-Derivative Test(二阶导数判别法)，204
Point of inflection(拐点)，208
Rational function(有理函数)，217
Vertical asymptote(垂直渐近线)，221
Horizontal asymptote(水平渐近线)，222
Oblique asymptote(斜渐近线)，224
x-intercepts(x 截距)，225
y-intercept(y 截距)，225
Absolute minimum(绝对极小值)，235
Absolute maximum(绝对极大值)，235
Maximum-Minimum Principle 1(极大-极小值原理1)，236-237
Maximum-Minimum Principle 2(极大-极小值原理2)，240
Delta notation(Δ 记号)，266
Differential(微分)，270
Implicit differentiation(隐微分)，273
Related rates(相关变化率)，275

复习题

这些复习题是为测验准备的，它们也可以用作不限时间的练习测验. 答案在书后. 答案中还包括方括号内的参考章节，它告诉你，如果你的答案不正确，应该再学习哪个章节.

求函数的相对极值. 用有序对列出你的答案，然后画出函数的图形.

1. $f(x)=3-2x-x^2$
2. $f(x)=x^4-2x^2+3$
3. $f(x)=\frac{-8x}{x^2+1}$
4. $f(x)=4+(x-1)^3$
5. $f(x)=x^3+x^2-x+3$
6. $f(x)=3x^{2/3}$
7. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$
8. $f(x)=x^3-3x+2$

画函数的图形.

9. $f(x)=\frac{5}{x+2}+2$　　10. $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}$

11. $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$　　12. $f(x)=\frac{x}{x-2}$

在指定区间上求函数的绝对极大值和绝对极小值，如果它们存在的话. 未指明区间的函数取实轴.

13. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+2$
14. $f(x)=x^2-10x+8$; $[-2, 6]$
15. $f(x)=4x^3-6x^2-24x+5$; $[-2, 3]$
16. $f(x)=5x-7$; $[-1, 1]$
17. $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$; $(-\infty, 0)$
18. $f(x)=5x-7$
19. $f(x)=3x^4+2x^3-3x^2+1$; $[-3, 0]$
20. $f(x)=5x^2+\frac{5}{x^2}$; $(0, \infty)$
21. $f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+8$; $[-5, 2]$
22. $f(x)=-x^2+5x+7$
23. 在其和为 60 的所有数中，求有最大乘积的两个数.
24. 求 $Q=x^2-2y^2$ 的最小值，其中 $x-2y=1$.
25. 商业：利润最大化. 如果
$$R(x)=52x-0.5x^2 \quad 和 \quad C(x)=22x-1,$$
求最大利润；另外，为了达到这个最大利润，求所必须生产和销售的产品数量.
26. 一个具有方形底和盖的矩形盒，其容积为 2 500 立方英尺. 如果底每平方英尺造价为 2 美元，顶为 3 美元，而侧面为 1 美元. 为使造价最省，其尺寸应为多少？
27. 商业：存货成本最小化. 加州某商店每年销售 360 辆多变速自行车. 库存一辆自行车一年需花费 8 美元. 为再订购，需付 10 美元的固定成本，以及每辆自行车另付 2 美元. 为使存货成本最小化，商店每年应订购自行车几次，每次批量为多少？

对于第 28 题和第 29 题，
$$y=f(x)=2x^3+x.$$

28. 求 Δy 和 $f'(x)\Delta x$，已知 $x=1$ 和 $\Delta x=-0.05$.
29. a)求 dy.
b)求 $x=-2$ 和 $dx=0.01$ 时的 dy.
30. 利用 $\Delta y=f'(x)\Delta x$ 求 $\sqrt{69}$ 的近似值.
31. 用隐微分法对下述函数求 dy/dx. 然后求曲线在给定点的斜率.
$$2x^3+2y^3=-9xy; (-1, -2)$$
32. 一架长 25 英尺的梯子斜靠在一堵竖直的墙上. 如果其下端以 6 英尺/秒的速率离开墙壁，那么当下端距离墙壁 7 英尺时，梯子顶端的高以多快的速率下降？
33. 商业：总收益、总成本和总利润. 对于
$$R(x)=120x-0.5x^2 \quad 和 \quad C(x)=15x+6,$$
当 $x=100$ 且 $dx/dt=30$ 件/天时求总收益、总成本和总利润的变化率.

综合题

34. 在指定的区间上求函数
$$f(x)=(x-3)^{2/3}; (-\infty, \infty)$$
的最大值和最小值.
35. 用隐微分法求 dy/dx，
$$(x-y)^4+(x+y)^4=x^4+y^4.$$
36. 求函数
$$y=x^4-8x^3-270x^2$$
的相对极大值和相对极小值.

上机技术演练

用绘图器估计函数的相对极值.

37. $f(x)=3.8x^2-18.6x^3$
38. $f(x)=\sqrt[3]{|9-x^2|}-1$
39. 生命科学与物理学：乳腺癌发病率. 下表提供的数据是关于 100 000 个不同年龄女性的乳腺癌发病人数.

年龄	每 100 000 人中的发病人数
0	0
27	10
32	25
37	60
42	125
47	187
52	224
57	270
62	340
67	408
72	437
77	475
82	460
87	420

资料来源：National Cancer Institute

279～280

a)用带有 REGRESSION 选项的绘图器分别求线性函数、二次函数、三次函数和四次函数与表中数据的拟合.
*b)指出哪个函数与表中数据拟合得最好，并说明理由.
*c)根据函数和问题的实情确定函数的定义域，并 … 理由

2007/08/16

d)确定函数在其定义域上的最大值．在哪个年龄乳腺癌发病率最高？

测验

求函数的相对极值．用有序对列出你的答案，然后画函数的图形．

1. $f(x)=x^2-4x-5$
2. $f(x)=2x^4-4x^2+1$
3. $f(x)=(x-2)^{2/3}-4$
4. $f(x)=\frac{16}{x^2+4}$
5. $f(x)=x^3+x^2-x+1$
6. $f(x)=4+3x-x^3$
7. $f(x)=(x-2)^3+3$
8. $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$

画函数的图形．

9. $f(x)=\frac{2}{x-1}$
10. $f(x)=\frac{-8}{x^2-4}$
11. $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$
12. $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$

在指定的区间上求函数的绝对极大值和绝对极小值，如果它们存在的话．未指明区间的函数取实轴．

13. $f(x)=x(6-x)$
14. $f(x)=x^3+x^2-x+1$；$\left[-2, \frac{1}{2}\right]$
15. $f(x)=-x^2+8.6x+10$
16. $f(x)=-2x+5$；$[-1, 1]$
17. $f(x)=-2x+5$
18. $f(x)=3x^2-x-1$
19. $f(x)=x^2+\frac{128}{x}$；$(0, \infty)$
20. 在其差是 8 的所有数中，求有最小乘积的两个数．
21. 求 $Q=x^2+y^2$ 的最小值，其中 $x-y=10$．
22. 商业：最大利润．求最大利润，另外，为实现最大利润，求必须生产和销售的产品数量．已知

$$R(x)=x^2+110x+60,$$
$$C(x)=1.1x^2+10x+80.$$

23. 把一块 60 英寸×60 英寸的薄纸板，从其四个角剪去四个小正方形，使得四边可以折起做成一个开口盒子．什么样的尺寸将得到一个容积最大的盒子？最大容积是多少？
24. 商业：存货成本最小化．某体育用品商店每年销售 1 225 个网球拍．库存一个网拍球一年的费用是 2 美元．为再订购，需付 1 美元的固定成本，以及每个网球拍另加 0.50 美元．为使存货成本最省，体育用品商店每年应订购网球拍几次，每次批量为多少？

注意：1.1 节的例 7 中所采用的函数就是用这种方法求出来的．

25. 对于 $y=f(x)=x^2-3$，$x=5$ 和 $\Delta x=0.1$，求 Δy 和 $f'(x)\Delta x$．
26. 用 $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$ 求 $\sqrt{50}$ 的近似值．
27. 对于 $y=\sqrt{x^2+3}$：

a)求 dy．

b)求 $x=2$ 和 $dx=0.01$ 时的 dy．

28. 用隐微分法对下述函数求 dy/dx．然后求曲线在给定点的斜率．

$$x^3+y^3=9;(1,2)$$

29. 一块长 13 英尺的木板斜靠在一堵竖直的墙上．如果其下端以 0.4 英尺/秒的速率离开墙壁，那么当下端距离墙壁 12 英尺时，其上端以多快的速率下滑？

综合题

30. 在指定的区间上求函数的绝对极大值和绝对极小值，如果它们存在的话．

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x^3};\quad [0,\infty)$$

31. 商业：平均成本最小化．生产 x 件产品的总成本可以表示成

$$C(x)=100x+100\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x^3}}{100}.$$

a)求平均成本 $A(x)$．

b)求 $A(x)$ 的最小值．

上机技术演练

32. 用绘图器估计函数的相对极值．

$$f(x)=5x^3-30x^2+45x+5\sqrt{x}$$

33. 商业：广告．制造并销售保龄球的企业是一个经常更换产品的企业．大约每 3～4 个月，公司必须把一些新的模型推向市场．一般地，创建一种新模型是因为技术方面的进展，例如，新的表面材料或把重木块装入球中的新方法．为了测定如何使用广告费最好，公司跟踪调查保龄球的销售与花在广告上的费用之间的关系．假定公司从以往的销售中收集到以下数据．

花在广告上的费用（以千美元计）	卖出的保龄球数 N
0	8
50	13 115
100	19 780
150	22 612
200	20 083
250	12 430
300	4

a)用带有 REGRESSION 选项的绘图器分别求线性函数、二次函数、三次函数和四次函数与表中数据的拟合．

*b)确定哪个函数与表中数据拟合得最好，并说明理由．

*c)根据函数和问题的实情确定函数的定义域，并说明理由．

d)确定函数在其定义域上的最大值．为了使卖出的保龄球数量最多，公司应在它的下一个新模型上花多少广告费？

注意：习题 3.4 的第 98 题中所采用的函数可能是用这个方法求出来的．

281 | 282

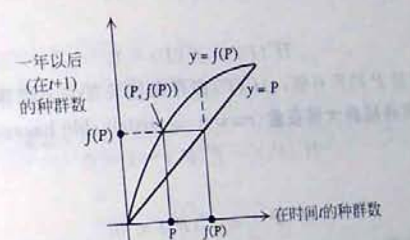
上机技术的深入应用

可持续最大捕获量

在某些情形，生物学家能够确定称之为**繁殖曲线**(reproduction curve)的函数．它是这样一个函数

$$y=f(P),$$

如果 P 是在某个时间 t 的种群数，那么一年以后或在时间 $t+1$ 的种群数是 $f(P)$．这条曲线如下所示．

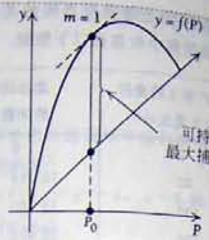


直线 $y=P$ 值得注意有两个理由．首先，如果 $y=P$ 是 f 的一个特例，则可知种群数年年相同．但是上述 f 的图形大都在该直线上方，在这种情形，表示种群数量在增加．

森林中的鹿太多会造成食物供应短缺，并且最终因为食物匮乏引起种群数量减少．常常在这种情形(因而引来若干争议)，允许猎人"捕获"一定数量的鹿，之后，随着食物供应逐渐充足，剩下的鹿群实际上可能会兴旺并递增．

我们知道，一年之后种群数 P 将增长到 $f(P)$．如果这是关于一种皮毛动物的种群数，且种群数在增加，于是在不使最初的种群数 P 减少的情况下，人们每年可以"捕获"的数量为

2007/08/16



$f(P)-P$.

如果种群数保持不变或减少，则这种捕获将会使种群枯竭.

假定我们想弄清楚一个值 P_0，在种群数达到 P_0 时，允许其捕获量最大. 如果能确定该值 P_0，那么就能让种群数增长直到它达到值 P_0 的水平，从此开始年年可按数量 $f(P_0)-P_0$ 来捕获.



283

设捕获量函数 H 可表示成

$$H(P)=f(P)-P.$$

则

$$H'(P)=f'(P)-1.$$

现在，如果假定对 P 的所有值，$H'(P)$ 都存在且只有一个临界点，由此可知，出现在值 P_0 处的**可持续最大捕获量**(maximum sustainable harvest)满足

$$H'(P_0)=f'(P_0)-1=0$$

和

$$H''(P_0)=f''(P_0)<0.$$

或等价地有下述定理.

定理　出现在 P_0 处的**可持续最大捕获量**满足

$$f'(P_0)=1 \quad 和 \quad f''(P_0)<0,$$

并且可以表示成

$$H(P_0)=f(P_0)-P_0.$$

练习　对于第1题～第3题的繁殖曲线，做下列各题.

a)用同一个坐标系或视窗作繁殖函数、函数 $y=P$ 和捕获量函数的图形.

b)求在其上可持续最大捕获量出现的种群数. 既用图示法也用微分法来求解.

c)求可持续最大捕获量.

1. $f(P)=P(10-P)$，其中 P 以千只计.

2. $f(P)=-0.025P^2+4P$，其中 P 以千只计. 这是哈得逊湾区域中关于皮毛动物雪鞋野兔的繁殖曲线.





3. $f(P)=-0.01P^2+2P$，其中 P 以千只计. 这是哈得逊湾区域中关于皮毛动物猞猁的繁殖曲线.

对于第4题和第5题中的繁殖曲线，做下列各题.

a)用同一个坐标系或视窗作繁殖函数、函数 $y=P$ 和捕获量函数的图形.

b)求在其上出现可持续最大捕获量的种群数. 只用图示法求解.

c)求可持续最大捕获量.

4. $f(P)=40\sqrt{P}$，其中 P 以千只计. 假定这是一个大湖中关于棕色鳟鱼的繁殖曲线.

5. $f(P)=0.237P\sqrt{2\,000-P^2}$，其中 P 以千只计.

6. 下表列出了关于某种动物的繁殖数据.

种群数 P(以千只计)	一年以后的种群数 f(P)
10	9.7
20	23.1
30	37.4
40	45.2
50	42.6

a)用绘图器上的 **REGRESSION** 选项求一个三次多项式与表中数据的拟合.

b)在同一个坐标系或视窗上作繁殖函数、函数 $y=P$ 和捕获量函数的图形. 284

c)求在其上出现可持续最大捕获量的种群数. 只用图示法求解.

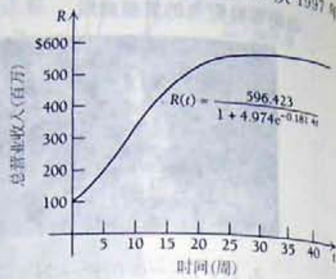
2007/08/16

第4章 指数函数与对数函数

应用 在一段时间内，电影《泰坦尼克》是有史以来最具票房价值的影片之一，从1997年12月开始直到1998年8月制成录像带销售，它一直在电影院放映．在整个美国，它的总营业收入 R(百万美元)与时间 t(周)的关系可表示为

$$R(t) = \frac{596.423}{1+4.974e^{-0.181\,4t}}.$$

(**资料来源**：Exhibitor Relations Co., Inc.)作出这个函数的草图．



这是一个逻辑斯谛(logistic)函数，其图形见右图．

这个问题出现在4.3节例8中．

引言 本章研究两类有着密切联系的函数：指数函数与对数函数．我们将学习它们的求导方法．
285 这两个函数在种群的增长与衰减、永续复利、噪声传播和碳定年代法等诸多方面具有广泛的应用．

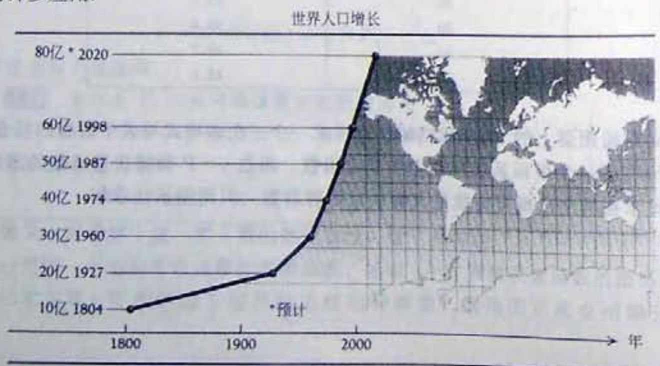
4.1 指数函数

要点

- 作指数函数的图形．
- 求指数函数的导数．

指数函数的图形

考察下面的图形．图形的迅速增长说明，该图形近似表示一个指数函数．现在来研究这个函数及它的许多应用．



资料来源：U. S. Bureau of the Census.

回顾一下形如 a^x 的表达式的定义，其中 x 是有理数．例如，

$$a^{2.34} \quad 或 \quad a^{234/100}.$$

其意义为"a 的234次幂再开100次方($\sqrt[100]{a^{234}}$)"．

当指数是无理数时，例如 $2^{\sqrt{2}}$，2^{π} 或 $2^{-\sqrt{3}}$，其意义又如何呢？每个无理数都是一个无限不循环小数．我们来看 2^{π}．众所周知，π 是一个无理数，可表示为无限不循环小数

$$3.141\,592\,653\cdots.$$

由此可见，π 可用有理数

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.141\,5, \cdots$$

的极限来逼近．因此，2^{π} 可用有理数方幂

$$2^{3}, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.141}, 2^{3.141\,5}, \cdots$$

的极限来逼近．用计算器计算出每个方幂的近似值，得到

$$8, 8.574\,188, 8.815\,241, 8.821\,353, 8.824\,411, \cdots.$$

一般地，a^x 可用 a^r 的值来近似，其中有理数 r 近似于 x；a^x 是 a^r 当 r 沿有理数趋于 x 时的极限．总之，对 $a>0$，a^x 的定义可用通常的指数律由有理数 x 拓展到任意实数 x，例如，指 286
数律

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad a^x \div a^y = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

仍然成立．此外，由此得到的函数 $f(x)=a^x$ 是连续函数．

上机技术演练

在绘图器上用指数键可得到 2^{π} 的近似值：

$$2^{\pi} \approx 8.824\,977\,827.$$

练习 求近似值：

1. 5^{π}　2. $5^{\sqrt{3}}$　3. $7^{-\sqrt{2}}$　4. $18^{-\pi}$

定义 指数函数(exponential function) f 为

$$f(x)=a^x,$$

其中 x 是任意实数，$a>0$ 且 $a\neq 1$．数 a 称为底(base)．

下面是几个指数函数的例子：

$$f(x)=2^x, f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x)=(0.4)^x.$$

注意，与幂函数(例如 $y=x^2$ 或 $y=x^3$)相反，在指数函数中变量是指数，而不是底．

指数函数有着广泛的应用．现在讨论它的图形．

例1 作出 $y=f(x)=2^x$ 的图形．

解 a) 第一步，求出一些函数值．

2007/08/16

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	−1	−2
$y=f(x)=2^x$	1	1.4	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$x=0,\quad y=2^0=1;$

$x=\frac{1}{2},\quad y=2^{1/2}=\sqrt{2}\approx 1.4;$

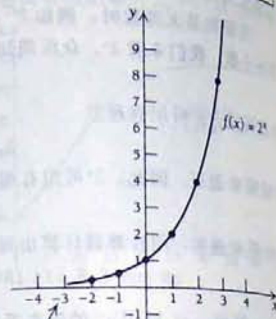
$x=1,\quad y=2^1=2;$

$x=2,\quad y=2^2=4;$

$x=3,\quad y=2^3=8;$

$x=-1,\quad y=2^{-1}=\frac{1}{2};$

$x=-2,\quad y=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}.$



b)第二步，描出诸点且用光滑曲线连接. 图形是连续的、递增的、上凹的. 不难看出，x 轴是一条水平渐近线(见 3.3 节)，即

287

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \text{且} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty.$$ ■

例 2 作出 $y=f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图形.

解 a) 第一步，求出一些函数值. 注意到

$$y=f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=(2^{-1})^x=2^{-x}.$$

由此求函数值较为容易.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	−1	−2	−3
y	1	0.7	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2	4	8

$x=0,\quad y=2^{-0}=1;$

$x=\frac{1}{2},\quad y=2^{-1/2}=\frac{1}{2^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx\frac{1}{1.4}\approx 0.7;$

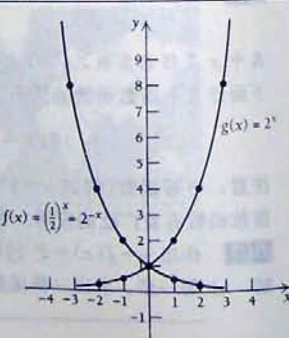
$x=1,\quad y=2^{-1}=\frac{1}{2};$

$x=2,\quad y=2^{-2}=\frac{1}{4};$

$x=-1,\quad y=2^{-(-1)}=2;$

$x=-2,\quad y=2^{-(-2)}=4;$

$x=-3,\quad y=2^{-(-3)}=8.$



b)第二步，描出诸点且用光滑曲线连接，图形是连续的、递减的、上凹的. 不难看出，x 轴是一条水平渐近线，即

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \quad \text{且} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty.$$

为了比较，也画出了 $g(x)=2^x$ 的图形. ■

上机技术演练

检验例 1 和例 2 中函数的图形. 再作出

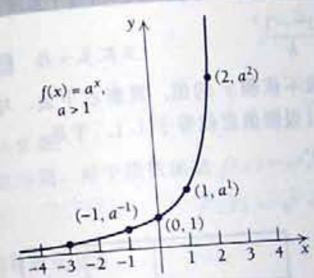
$$f(x)=3^x \quad \text{和} \quad g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

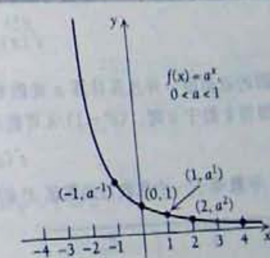
的图形，并进行观察比较.

下面是指数函数的一些性质.

1. 当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=a^x$ 是正的递增连续函数. 当 x 逐渐变小时，a^x 逼近于 0. 图形是上凹的，如左下图所示.（如果你学习了 3.3 节，还会知道 x 轴是一条渐近线.） 288

2. 当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)=a^x$ 是正的递减连续函数. 当 x 逐渐变大时，a^x 逼近于 0. 图形是上凹的，如右下图所示.（x 轴是一条渐近线.）





当 $a=1$ 时，$f(x)=a^x=1^x=1$，是一个常数函数. 因此，指数函数的底不允许是 1.

a^x 的导数；数 e

现在考虑求指数函数

$$f(x)=a^x$$

的导数. 它的导数为

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{导数定义}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \qquad \text{用 } a^{x+h} \text{ 代替 } f(x+h)\text{，}a^x \text{ 代替 } f(x)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot a^h-a^x\cdot 1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}a^x\cdot\left(\frac{a^h-1}{h}\right)$$

2007/08/16

$$= a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$ 因为变量是 h 且 h 趋于 0，所以把 a^x 当作常数处理．而常数与一个函数之积的极限等于常数乘以这个函数的极限

289

由此得到

$$f'(x) = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

特别地，对于 $g(x) = 2^x$，

$$g'(x) = 2^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}.$$

注意，这个极限与 x 的值无关，为了确定 $g'(x)$ 的存在性，必须确定

$$\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

是否存在．现在来研究这个问题．

选择 h 的一个趋于 0 的数列，计算 $(2^h - 1)/h$，结果列在左下表中．由表中数据推测，当 h 趋于 0 时 $(2^h - 1)/h$ 可能有极限，并且这个极限值近似等于 0.7．于是，

$$g'(x) \approx (0.7)2^x.$$

换言之，2^x 的导数等于一个常数与函数值 2^x 的乘积．类似地，对于 $t(x) = 3^x$，

$$t'(x) = 3^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h}.$$

再求极限的近似值，并且在计算 x 处的导数时该极限不依赖 x 的值．观察右下表，与前述一样，推测当 h 趋于 0 时，$(3^h - 1)/h$ 可能有极限，并且极限值近似等于 1.1．于是，

$$t'(x) \approx (1.1)3^x.$$

换言之，导数等于一个常数与函数值 3^x 的乘积．

h	$\frac{2^h - 1}{h}$
0.5	0.828 4
0.25	0.756 8
0.175	0.736 9
0.062 5	0.708 4
0.031 25	0.700 7
0.001 11	0.693 4
0.000 001	0.693 1

h	$\frac{3^h - 1}{h}$
0.5	1.464 1
0.25	1.264 3
0.175	1.211 3
0.062 5	1.137 2
0.031 25	1.117 7
0.001 11	1.099 3
0.000 001	1.098 6

上机技术演练

练习 使用绘图器，进入 ASK 模式，制作上面的表．

现在来观察和分析上面所做的工作．已经证明

$$\text{如果 } f(x) = a^x\text{，则 } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \cdot a^x.$$

考察 $\lim_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$．

1. 对于 $a = 2$，

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.7.$$

2. 对于 $a = 3$，

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.1.$$ 290

看来，有理由认为在 2 和 3 之间存在某个数 a，使得

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$$

和

$$f'(x) = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot 1 = f(x).$$

换言之，在 2 和 3 之间存在某个数 a，使得函数 a^x 的导数就是它自己．用 e 来定义这个数．稍后将会看到这个数可近似地表示为

$$e \approx 2.718\,281\,828\,459.$$

定义 数 e 是满足

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

的唯一正实数．

由此得到，对于指数函数 $f(x) = e^x$，

$$f'(x) = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

即 e^x 的导数是 e^x．

复利及 e 的近似值

在第 1 章曾经指出，由复利公式可导出

$$A = P\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt},$$

这是 e 的一个应用．式中，A 是初始投资额为 P，利率为 i，每年计 n 次复利情况下 t 年后的结存．

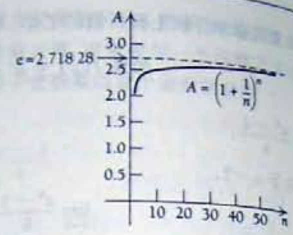
假设初始投资额为 1 美元，利率为 100%，时间为 1 年（显然没有金融机构会这样做），则公式变为 291

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

假设复利计算次数无限增大，现在研究函数 A 的性质．我们有下面的数值表和图形．

2007/08/16

n	$A=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$（单位：美元）
1	2.000 00
2	2.250 00
3	2.370 37
4	2.441 41
12	2.613 04
52	2.692 60
365	2.714 57
8 760	2.718 13
525 600	2.718 28



投资额按连续复利增长，且趋于一个极限．这个极限及 e 的近似值由下述定理给出．

定理 1

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx 2.718\ 281\ 828\ 459.$$

这表明，e 是当 n 无限增大时被

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

逼近的一个数．

上机技术演练

探索　利用视窗[0，5 000，0，5]，Xscl=1 000，Yscl=1 作出

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

的图形．沿着图形跟踪．为什么图形逐渐呈现水平状？向右跟踪，注意它的 y 坐标．它逼近一个常数吗？它的值有多大？

求与 e 有关的函数的导数

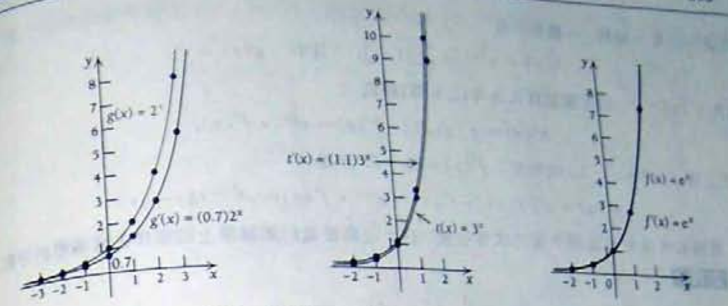
前面讨论了函数 $f(x)=e^x$，得到了 $f'(x)=e^x$．或者简述如下．

292 **定理 2**

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x$$

现在来比较 $g(x)=2^x$ 与 $g'(x)\approx(0.7)2^x$，$t(x)=3^x$ 与 $t'(x)\approx(1.1)3^x$，以及 $f(x)=e^x$ 与 $f'(x)=e^x$ 的图形．注意，g'的图形在 g 的图形之下，t'的图形在 t 的图形之上，而 f'的图形与 f 的图形完全相同．

定理 2 说明，对于函数 $f(x)=e^x$，在任意点 x，其导数 $f'(x)=e^x$（切线的斜率）与该函数的函数值相同．



上机技术演练

探索　利用视窗[−5，5，−1，10]作出 $f(x)=e^x$ 的图形．跟踪一个点，观察它的 y 值．再确定该点 y'的值．比较 y 与 y'．

对于另外的 3 个 x 值，重复上述过程．你观察到了什么？

现在来求某些其他函数的导数．

例 3

$$\frac{d}{dx}3e^x=3\frac{d}{dx}e^x=3e^x$$ ■

例 4

$$\frac{d}{dx}(x^2e^x)=x^2\cdot e^x+2x\cdot e^x \qquad \text{根据乘积法则}$$

$$=e^x(x^2+2x)．\quad \text{或}\quad xe^x(x+2) \qquad \text{分解因式}$$ ■ 293

例 5

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x^3}\right)=\frac{x^3\cdot e^x-3x^2\cdot e^x}{x^6} \qquad \text{根据商法则}$$

$$=\frac{x^2e^x(x-3)}{x^6} \qquad \text{分解因式}$$

$$=\frac{e^x(x-3)}{x^4} \qquad \text{化简}$$ ■

上机技术演练

利用绘图器验证例 3～5 的结果．这需要你有画 f 与 f'的图形的绘图器．

然后，求 $f(x)=e^x/x^2$ 的导数．利用绘图器验证你的答案．

假设有一个比较复杂的指数函数，例如

$$h(x)=e^{\ldots}$$

这是一个复合函数．一般地，有

$$h(x)=e^{f(x)}=g[f(x)],\quad 其中\quad g(x)=e^x.$$

现在 $g'(x)=e^x$．因此根据链式法则(2.8节)得到

$$h'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x).$$

对于上面 $f(x)=x^2-5x$ 的情况，$f'(x)=2x-5$．于是

$$h'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)=e^{x^2-5x}(2x-5).$$

利用链式法则可证明下面的求导法则．这个法则使我们能够像上面那样去求函数的导数．

定理 3

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)}=f'(x)e^{f(x)},$$

或

$$\frac{d}{dx}e^u=\frac{du}{dx}\cdot e^u.$$

e 的幂的导数等于幂的导数与 e 的幂之积．

下面给出记忆这个法则的方法．

$$g(x)=e^{x^2-5x}\quad ①\qquad ①\ 求指数的导数$$

$$g'(x)=(2x-5)e^{x^2-5x}\quad ②\qquad ②\ 用原来函数乘以指数的导数$$

294

例 6

$$\frac{d}{dx}e^{5x}=5e^{5x}.$$ ■

例 7

$$\frac{d}{dx}e^{-x^2+4x-7}=(-2x+4)e^{-x^2+4x-7}.$$ ■

例 8

$$\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x^2-3}}=\frac{d}{dx}e^{(x^2-3)^{1/2}}=\frac{1}{2}(x^2-3)^{-1/2}\cdot 2x\cdot e^{(x^2-3)^{1/2}}$$

$$=x(x^2-3)^{-1/2}\cdot e^{\sqrt{x^2-3}}=\frac{xe^{\sqrt{x^2-3}}}{\sqrt{x^2-3}}.$$ ■

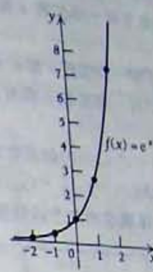
e^x，e^{-x} 和 $1-e^{-kx}$ 的图形

既然已经知道如何求 $f(x)=e^x$ 的导数，那我们就由 3.2 节中所讨论的微分学概念和曲线描绘法的观点来考察 $f(x)=e^x$ 的图形．

例 9 作出 $f(x)=e^x$ 的图形，利用微分学来分析图形．

解 如果想要快捷地作图，则可用计算器简单地求出几个函数值，描出诸点，然后作出草图如下．

x	$f(x)$
−2	0.135
−1	0.368
0	1
1	2.718
2	7.389



然而，可以利用微分学对图形作如下分析．

a)导数．由 $f(x)=e^x$ 得 $f'(x)=e^x$，因而 $f''(x)=e^x$．

b)f 的临界点．由于对一切实数 x 都有 $f'(x)=e^x>0$，所以对一切实数导数都存在，且方程 $f'(x)=0$ 无解．从而没有临界点，因此也没有极大值和极小值． 295

c)递增性．由于对一切实数 x 都有 $f'(x)=e^x>0$，所以在整个实轴$(-\infty,\infty)$上函数 f 是递增的．

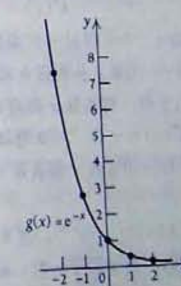
d)拐点．由于对一切实数 x 都有 $f''(x)=e^x>0$，所以方程 $f''(x)=0$ 无解，因此没有拐点．

e)凹性．由于对一切实数 x 都有 $f''(x)=e^x>0$，所以在整个实轴$(-\infty,\infty)$上函数 f' 是递增的，图形是上凹的． ■

例 10 作出 $g(x)=e^{-x}$ 的图形，利用微分学来分析图形．

解 首先用计算器求出几个函数值，描出诸点，然后作出草图如下．

x	$g(x)$
−2	7.389
−1	2.718
0	1
1	0.368
2	0.135



可以利用微分学对图形作如下分析．

a)导数．由 $g(x)=e^{-x}$ 得

$$g'(x)=(-1)e^{-x}=-e^{-x},$$

$$g''(x)=(-1)($$ [illegible]

2007/08/16

b) g 的临界点．由 $e^{-x}>0$ 得对一切实数 x 都有 $g'(x)=-e^{-x}<0$，所以对一切实数导数都存在，且方程 $g'(x)=0$ 无解．从而没有临界点，因此也没有极大值和极小值．

c)递减性．由于对一切实数 x 都有 $g'(x)=-e^{-x}<0$，所以在整个实轴 $(-\infty,\infty)$ 上函数 g 是递减的．

d)拐点．由于对一切实数 x 都有 $g''(x)=e^{-x}>0$，所以方程 $g''(x)=0$ 无解，因此没有拐点．

e)凹性．由于对一切实数 x 都有 $g''(x)=e^{-x}>0$，所以在整个实轴上函数 g' 是递增的，图形是上凹的． ■

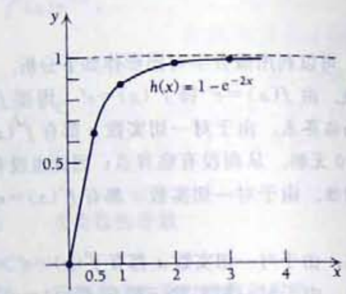
形如 $f(x)=1-e^{kx}(x\geqslant 0)$ 的函数也有重要的应用．

形如 $f(x)=1-e^{-2x}(x\geqslant 0)$ 的图形，利用微分学来分析图形．

296 **例 11** 作出 $h(x)=1-e^{-2x}(x\geqslant 0)$ 的图形，描出诸点，然后作出草图如下．

解 首先用计算器求出几个函数值，描出诸点，然后作出草图如下．

x	$h(x)$
0	0
1	0.865
2	0.982
3	0.998
4	0.999 7
5	0.999 95



可以利用微积分对图形作如下分析．

a)导数．由 $h(x)=1-e^{-2x}$ 得

$$h'(x)=(-2)(-1)e^{-2x}=2e^{-2x},$$

$$h''(x)=(-2)(2e^{-2x})=-4e^{-2x}.$$

b)临界点．由 $e^{-2x}>0$ 得对一切实数 x 都有 $h'(x)=2e^{-2x}>0$，所以对一切实数导数都存在，且方程 $h'(x)=0$ 无解．从而没有临界点．

c)递增性．由于对一切实数 x 都有 $h'(x)=2e^{-2x}>0$，所以在整个实轴上函数 h 是递增的．

d)拐点．由 $h''(x)=-4e^{-2x}<0$ 可知方程 $h''(x)=0$ 无解，因此没有拐点．

e)凹性．由于对一切实数 x 都有 $h''(x)=-4e^{-2x}<0$，所以在整个实轴上函数 h' 是递减的，图形是下凹的． ■

一般地，对于 $h(x)=1-e^{-kx}$，当 $k>0$ 和 $x\geqslant 0$ 时，因为 $h'(x)=ke^{-kx}$ 总是正的，所以 $h(x)$ 的图形是递增的．当 x 趋于 ∞ 时，$h(x)$ 趋于 1，即 $\lim_{x\to\infty}(1-e^{-kx})=1$.

警示！形如 a^x 的函数(例如，2^x，3^x 和 e^x)不同于形如 x^a 的函数(例如，x^2，x^3 和 $x^{\frac{1}{2}}$)．a^x

297 的变量在指数上，而 x^a 的变量在底上．a^x 的导数不是 xa^{x-1}．特别地，

$$\frac{d}{dx}e^x \neq xe^{x-1}, \quad 而是 \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

习题 4.1

作下列函数的图形．

1. $y=4^x$
2. $y=5^x$
3. $y=(0.4)^x$
4. $y=(0.2)^x$
5. $x=4^y$
6. $x=5^y$

求下列函数的导数．

7. $f(x)=e^{3x}$
8. $f(x)=e^{2x}$
9. $f(x)=5e^{-2x}$
10. $f(x)=4e^{-3x}$
11. $f(x)=3-e^{-x}$
12. $f(x)=2-e^{-x}$
13. $f(x)=-7e^x$
14. $f(x)=-4e^x$
15. $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$
16. $f(x)=\frac{1}{4}e^{4x}$
17. $f(x)=x^4e^x$
18. $f(x)=x^5e^x$
19. $f(x)=(x^2+3x-9)e^x$
20. $f(x)=(x^2-2x+2)e^x$
21. $f(x)=\frac{e^x}{x^4}$
22. $f(x)=\frac{e^x}{x^5}$
23. $f(x)=e^{-x^2+7x}$
24. $f(x)=e^{-x^2+8x}$
25. $f(x)=e^{-x^2/2}$
26. $f(x)=e^{x^2/2}$
27. $y=e^{\sqrt{x-7}}$
28. $y=e^{\sqrt{x-4}}$
29. $y=\sqrt{e^x-1}$
30. $y=\sqrt{e^x+1}$
31. $y=xe^{-2x}+e^{-x}+x^3$
32. $y=e^x+x^3-xe^x$
33. $y=1-e^{-x}$
34. $y=1-e^{-3x}$
35. $y=1-e^{-kx}$
36. $y=1-e^{-mx}$

作下列函数的图形，利用微积分来分析图形．

37. $f(x)=e^{2x}$
38. $f(x)=e^{(1/2)x}$
39. $f(x)=e^{-2x}$
40. $f(x)=e^{-(1/2)x}$
41. $f(x)=3-e^{-x}$，对 $x\geqslant 0$.
42. $f(x)=2(1-e^{-x})$，对 $x\geqslant 0$.

43～48．对于题 37～42，使用绘图器作出各个函数以及它们的一阶和二阶导数的图形．

49．求 $f(x)=e^x$ 的图形在点(0，1)处的切线．

50．求 $f(x)=2e^{-3x}$ 的图形在点(0，2)处的切线．

51 和 52．对于 49 和 50 题，用绘图器作出函数与切线的图形．

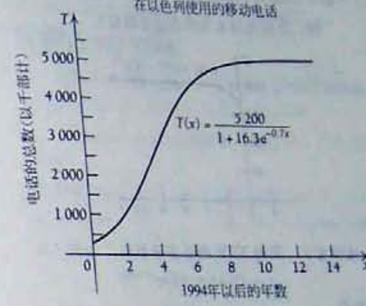
应用

商业与经济

移动电话．在以色列，使用移动电话的总数(以千部计)预计可近似地表示为函数

$$T(x)=\frac{5\,200}{1+16.3e^{-0.7x}},$$

其中 x 是 1994 年以后的年数．(资料来源：A. Tischler, R. Ventura, and J. Watters, "Cellular Telephones in the Israeli Market: The Demand, the Choice of Provider and Potential Revenues," *Applied Economics*, Vol. 33, 1479-1492(2001).)



在 53 和 54 题中采用上述资料．

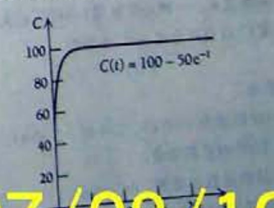
53. a)到 2005 年，在以色列，使用移动电话的总数是多少？2010 年呢？
b)求 $\lim_{x\to\infty}T(x)$．解释这个极限．

54. a)求 $T'(x)$，并解释其意义．
b)在 2005 年到 2006 年间，在以色列大约会增添多少部移动电话？

55. **边际成本**．公司的总成本(以百万美元计)为

$$C(t)=100-50e^{-t},$$

其中 t 是时间．
a)求边际成本 $C'(t)$.
b)求 $C'(0)$.
c)求 $C'(4)$.
*d)求 $\lim_{t\to\infty}C(t)$ 和 $\lim_{t\to\infty}C'(t)$．请考虑，随着时间的推移，公司的成本为什么趋于稳定？



2007/08/16

56. 边际成本. 公司的总成本(以百万美元计)为

$$C(t)=200-40e^{-t},$$

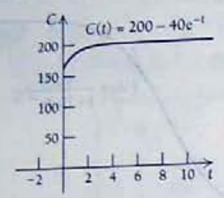
其中 t 是时间.

a)求边际成本 $C'(t)$.

b)求 $C'(0)$.

c)求 $C'(5)$.

*d)求 $\lim_{t\to\infty}C(t)$ 和 $\lim_{t\to\infty}C'(t)$. 请考虑, 随着时间的推移, 公司的成本为什么趋于稳定?



57. 边际需求. 某种 VCR 的需求函数由

$$x=D(p)=480e^{-0.003p}$$

给出.

a)当价格是 120 美元、180 美元、340 美元时分别将销售多少 VCR?

b)描绘 $x=D(p)(0\leqslant p\leqslant 400)$ 的草图.

c)求边际需求 $D'(p)$.

*d)解释导数的意义.

58. 边际供给. 在 57 题中, VCR 的供给函数由

$$x=S(p)=150e^{0.004p}$$

给出.

a)当价格是 120 美元、180 美元、340 美元时卖主分别能卖出多少 VCR?

b)描绘 $x=S(p)(0\leqslant p\leqslant 400)$ 的草图.

c)求边际供给 $S'(p)$.

*d)解释导数的意义.

生命科学与物理学

59. 药物浓度. 一种药物服用 t 小时后在人体内的浓度 C(以百万分之一计)由函数

$$C(t)=10t^2e^{-t}$$

给出.

a)分别求在 0 小时、1 小时、2 小时、3 小时、10 小时后的浓度.

b)描绘函数的草图, $0\leqslant t\leqslant 10$.

c)求浓度的变化率 $C'(t)$.

d)求浓度的最大值. 它出现在何时?

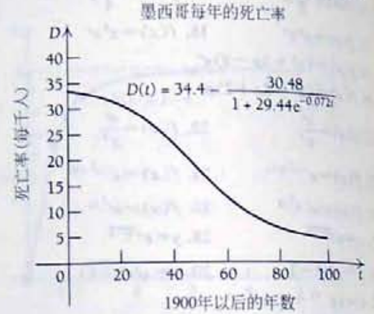
*e)解释导数的意义.

死亡率. 在墨西哥, 每千人每年的死亡率可用函数

$$D(t)=34.4-\frac{30.48}{1+29.44e^{-0.072t}}$$

来表示, 其中 t 是 1900 年以后的年数. (资料来源: B. J. L. Berry, L. S. Hall, R. Hernandez-Guerrero, and P. H. Martin, "México's Demographic Transition: Public Policy and Spatial Process," *Population and Environment*, Vol. 21, 363-383(2000).) 在 60 和 61 题中采用上述资料.

墨西哥每年的死亡率



60. a)依据这个模型, 2010 年墨西哥的死亡率是多少? 2050 年呢?

b)求 $\lim_{t\to\infty}D(t)$, 并解释其意义.

61. a)求 $D'(t)$, 并解释其意义.

b)在 2005 年到 2006 年之间, 墨西哥的死亡率下降了多少?

社会科学

62. 衰减记忆模型(Ebbinghaus learning model). 假定给你一项任务, 学习并且 100% 地记住一组知识. 人的本能表明, t 周后能记住所学知识的百分比是 P. 衰减记忆模型推断这个 P 由

$$P(t)=Q+(100\%-Q)e^{-kt}$$

给出, 其中 Q 是永远不会忘记的百分比, k 是一个常数, 它依赖于所要记忆的知识. 假设 $Q=40\%$, $k=0.7$.

a)分别求在 0 周、1 周、2 周、6 周、10 周后记住所学知识的百分比.

b)求 $\lim_{t\to\infty}P(t)$.

c)描绘 P 的草图.

d)求 P 对 t 的变化率 $P'(t)$.

*e)解释导数的意义.

综合题

求下列函数的导数.

63. $y=(e^{3x}+1)^5$

64. $y=(e^{x^2}-2)^4$

65. $y=\frac{e^{2t}-e^{7t}}{e^{4t}}$

66. $y=\sqrt[3]{e^{3t}+t}$

67. $y=\frac{e^x}{x^2+1}$

68. $y=\frac{e^x}{1-e^x}$

69. $f(x)=e^{\sqrt{x}}+\sqrt{e^x}$

70. $f(x)=\frac{1}{e^x}+e^{1/x}$

71. $f(x)=e^{x/2}\cdot\sqrt{x-1}$

72. $f(x)=\frac{xe^{-x}}{1+x^2}$

73. $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

74. $f(x)=e^{e^x}$

下面的每道题都是 e 的一个表示式. 求各函数值, 它们是 e 的近似值. 四舍五入到第 5 位小数.

75. $e=\lim_{t\to 0}f(t)$; $f(t)=(1+t)^{1/t}$

求 $f(1)$, $f(0.5)$, $f(0.2)$, $f(0.1)$ 和 $f(0.001)$.

76. $e=\lim_{t\to 1}g(t)$; $g(t)=t^{1/(t-1)}$

求 $g(0.5)$, $g(0.9)$, $g(0.99)$, $g(0.999)$ 和 $g(0.999\,8)$.

77. 求 $f(x)=x^2e^{-x}$ 在 $[0, 4]$ 上的最大值.

78. 求 $f(x)=xe^x$ 在 $[-2, 0]$ 上的最小值.

*79. 一个学生在试卷上出现如下错误:

$$\frac{d}{dx}e^x=xe^{x-1}.$$

解释这个错误, 如何改正它?

*80. 陈述 $f(x)=3^x$ 与 $g(x)=x^3$ 的图形的区别.

上机技术演练

描绘下列函数的图形, 并求出它们的相对极值.

81. $f(x)=x^2e^{-x}$

82. $f(x)=e^{-x^2}$

对于 83～86 题中的函数, 作出 f, f' 和 f'' 的图形.

83. $f(x)=e^x$

84. $f(x)=e^{-x}$

85. $f(x)=2e^{0.3x}$

86. $f(x)=1\,000e^{-0.08x}$

87. 描绘

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

的图形. 使用 TABLE 选项, 取很大的 x 值来验证 e 是这个函数的极限. 298～300

4.2 对数函数

要点

- 指数方程与对数方程间的转换.
- 解指数方程.
- 解涉及指数函数和对数函数的问题.
- 求涉及自然对数的函数的导数.

对数函数的图形

假设想要解方程

$$10^y=1\,000.$$

我们求 10 的一个方幂使之等于 1 000. 可以看出答案是 3. 数 3 称为"以 10 为底 1 000 的对数".

定义 对数(logarithm)定义为:

$$y=\log_a x \text{ 意指 } x=a^y, a>0, a\neq 1.$$

数 a 称为对数的底(logarithmic base).

数 $\log_a x$ 是一个数 y, 它使得 a 的 y 次幂得到 x. 数 $\log_{10}x$ 是一个数 y, 它满足 $x=10^y$. 因此, 对数可以看成是一个指数. 一个对数方程可以转换成一个指数方程, 反之亦然, 如下所示.

2007/08/16

对数方程	指数方程
$\log_a M=N$	$a^N=M$
$\log_{10}100=2$	$10^2=100$
$\log_{10}0.01=-2$	$10^{-2}=0.01$
$\log_{49}7=\frac{1}{2}$	$49^{1/2}=7$

为了作出对数方程的图形，可先作出与之等价的指数方程的图形.

例 1 作出 $y=\log_2 x$ 的图形.

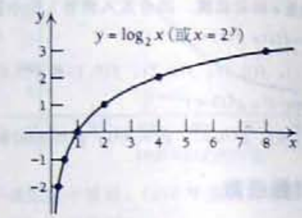
解 首先写出等价的指数方程

$$x=2^y.$$

选择一些 y 的值，求出对应的 2^y 的值，描出诸点. 记住 x 仍然是第一个坐标，用光滑曲线连接描出的点. ■

x 或 2^y	y
1	0
2	1
4	2
8	3
$\frac{1}{2}$	−1
$\frac{1}{4}$	−2

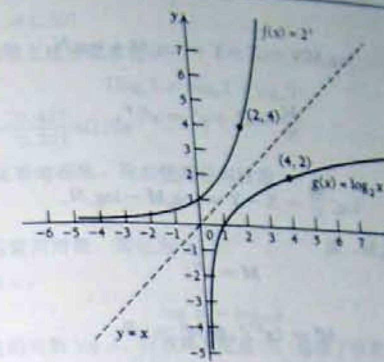
② 计算 x　① 选择 y



上机技术演练

探索 作出 $f(x)=2^x$ 的图形. 利用 TABLE 选项求图形上点的坐标. 如何用每个有序对帮助你画出 $g(x)=\log_2 x$ 的图形?

下面是用同一个坐标系所绘出的 $f(x)=2^x$ 和 $g(x)=\log_2 x$ 的图形. 沿直线 $y=x$ 反射 f 的图形便得到 g 的图形. 用这种方法得到两个图形称为是**互反的**.



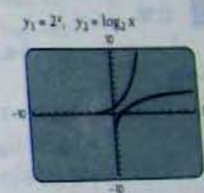
虽然在这里不能详细地论述互反，但是注意它们之间可以相互"还原"是很有意义的. 例如，

$$f(3)=2^3=8,\qquad \text{输入 3 得到输出 8}$$

$$g(8)=\log_2 8=3.\qquad \text{输入 8 得到输出 3}$$

上机技术演练

作对数函数的图形 为了作出 $y=\log_2 x$ 的图形，首先作出 $y=2^x$ 的图形. 然后利用 **DRAWINV** 选项画出 $y=\log_2 x$ 的图形. 一起画两个图形.



练习 作出下列函数的图形.

1. $y=\log_3 x$
2. $y=\log_5 x$
3. $f(x)=\log_e x$
4. $f(x)=\log_{10} x$

301～302

对数的基本性质

下面是对数的一些基本性质. 它们用指数的性质来证明.

定理 4 对数的性质

对任意正数 M，N 和 a，$a\neq 1$ 以及任意实数 k：

P1. $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

P2. $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

P3. $\log_a M^k=k\cdot\log_a M$

P4. $\log_a a=1$

P5. $\log_a a^k=k$

P6. $\log_a 1=0$

P1 和 P2 的证明 设 $X=\log_a M$，$Y=\log_a N$. 写成等价的指数形式为

$$M=a^X,N=a^Y.$$

根据指数的性质(见 1.1 节)有

$$MN=a^X\cdot a^Y=a^{X+Y}$$

2007/08/16

因此 $\log_a MN = X + Y = \log_a M + \log_a N.$

又 $\frac{M}{N} = a^X \div a^Y = a^{X-Y},$

因此 $\log_a \frac{M}{N} = X - Y = \log_a M - \log_a N.$

P3 的证明 设 $X=\log_a M$，则

$$M = a^X.$$

所以 $M^k = (a^X)^k$，或 $M^k = a^{Xk}.$

因而，$\log_a M^k = Xk = kX = k \cdot \log_a M.$

P4 的证明 由 $a^1=a$ 得到 $\log_a a=1$.

P5 的证明 由 $(a^k)=a^k$ 得到 $\log_a(a^k)=k$.

303 **P6 的证明** 由 $a^0=1$ 得到 $\log_a 1=0$.

现在举例说明这些性质.

例 2 已知

$$\log_a 2 = 0.301,\quad \log_a 3 = 0.477.$$

求下面每个值.

a) $\log_a 6$ $\quad \log_a 6 = \log_a(2\cdot 3)$

$= \log_a 2 + \log_a 3$ 根据 P1

$= 0.301 + 0.477 = 0.778$

b) $\log_a \frac{2}{3}$ $\quad \log_a \frac{2}{3} = \log_a 2 - \log_a 3$ 根据 P2

$= 0.301 - 0.477 = -0.176$

c) $\log_a 81$ $\quad \log_a 81 = \log_a 3^4$

$= 4\log_a 3$ 根据 P3

$= 4(0.477) = 1.908$

d) $\log_a \frac{1}{3}$ $\quad \log_a \frac{1}{3} = \log_a 1 - \log_a 3$ 根据 P2

$= 0 - 0.477$ 根据 P6

$= -0.477$

e) $\log_a \sqrt{a}$ $\quad \log_a \sqrt{a} = \log_a a^{1/2} = \frac{1}{2}$ 根据 P5

f) $\log_a 2a$ $\quad \log_a 2a = \log_a 2 + \log_a a$ 根据 P1

$= 0.301 + 1$ 根据 P4

$= 1.301$

g) $\log_a 5$ 无法利用上述性质求值.

$(\log_a 5 \neq \log_a 2 + \log_a 3)$

h) $\frac{\log_a 3}{\log_a 2}$ $\quad \frac{\log_a 3}{\log_a 2} = \frac{0.477}{0.301} \approx 1.58$

只是简单地相除，没有使用任何性质. ■

常用对数

数 $\log_{10} x$ 称为 x 的**常用对数**，简记为 $\log x$.

定义 对任意正数 x，

$$\log x = \log_{10} x.$$

于是，没有标出底的对数 $\log x$，应理解为底是 10. 请看下面常用对数与 10 的方幂的对照. 304

$1\,000 = 10^3$		$\log 1\,000 = 3$
$100 = 10^2$	由左边的方幂得到右边	$\log 100 = 2$
$10 = 10^1$	的常用对数.	$\log 10 = 1$
$1 = 10^0$		$\log 1 = 0$
$0.1 = 10^{-1}$		$\log 0.1 = -1$
$0.01 = 10^{-2}$		$\log 0.01 = -2$
$0.001 = 10^{-3}$		$\log 0.001 = -3$

上机技术演练

练习

1. 在同一坐标系中作出 $f(x)=10^x$，$y=x$ 和 $g(x)=\log_{10} x$ 的图形. 再求 $f(3)$，$f(0.699)$，$g(5)$和 $g(1\,000)$.

由于 $\log 100=2$ 和 $\log 1\,000=3$，有理由认为 $\log 500$ 在 2 和 3 之间. 像前面所做的那样，通过列表来逼近它. 但是，随着计算器的出现，很少再使用那种方法去求对数. 使用计算器上的 log 键，求出 $\log 500=2.699\,0$，四舍五入到第 4 位小数.

在计算器和计算机成为快速而有效的计算工具之前，常用对数被广泛用于某些类型的计算中. 实际上，计算促使了对数发展. 因为人们所使用的数的标准记法是基于十进制的，所以用以 10 为底的对数或常用对数来计算是合乎逻辑的. 如今，使用常用对数进行计算主要在于其历史意义；而以 e 为底的对数函数则具有划时代的重大意义.

自然对数

4.1 节讨论的数 e 近似等于 2.718 282，它在许多领域有着广泛的应用. 数 $\log_e x$ 称为 x 的**自然对数**，简记为 $\ln x$.

定义 对任意正数 x，

2007/08/16

$$\ln x = \log_e x.$$

下面，对于自然对数重述对数的基本性质.

定理 5

P1. $\ln MN = \ln M + \ln N$　　　P2. $\ln \dfrac{M}{N} = \ln M - \ln N$

P3. $\ln a^k = k \cdot \ln a$　　　P4. $\ln e = 1$

305 P5. $\ln e^k = k$　　　P6. $\ln 1 = 0$

现在举例来说明这些性质.

例 3 已知

$$\ln 2 = 0.6931,\quad \ln 3 = 1.0986,$$

求下面每个值.

a) $\ln 6$　$\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3$　　根据 P1

$= 0.6931 + 1.0986$

$= 1.7917$

b) $\ln 81$　$\ln 81 = \ln(3^4)$

$= 4 \ln 3$　　根据 P3

$= 4(1.0986) = 4.3944$

c) $\ln \dfrac{2}{3}$　$\ln \dfrac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3$　　根据 P2

$= 0.6931 - 1.0986 = -0.4055$

d) $\ln \dfrac{1}{3}$　$\ln \dfrac{1}{3} = \ln 1 - \ln 3$　　根据 P2

$= 0 - 1.0986$　　根据 P6

$= -1.0986$

e) $\ln 2e$　$\ln 2e = \ln 2 + \ln e$　　根据 P1

$= 0.6931 + 1$　　根据 P4

$= 1.6931$

f) $\ln \sqrt{e^3}$　$\ln \sqrt{e^3} = \ln e^{3/2}$

$= \dfrac{3}{2}$　　根据 P5 ■

利用计算器求自然对数

你应该有一个带有 ln 键的计算器. 使用这个键可以直接求出自然对数.

例 4 用计算器求下面的对数，四舍五入到第六位小数.

a) $\ln 5.24 = 1.656321$

b) $\ln 0.00001277 = -11.268412$ ■

指数方程

如果一个方程在指数上含有变量，则称方程为**指数**(exponential)方程. 可用对数来处理或求解指数方程.

例 5 求 $e^t = 40$ 中的 t.

解

$\ln e^t = \ln 40$　　两边取自然对数

$t = \ln 40$　　根据 P5

$t = 3.688879$ 🖩 306

$t \approx 3.7.$

应注意的是，这只是 t 的一个近似值，虽然时常使用等号. ■

例 6 求 $e^{-0.04t} = 0.05$ 中的 t.

解

$\ln e^{-0.04t} = \ln 0.05$　　两边取自然对数

$-0.04t = \ln 0.05$　　根据 P5

$t = \dfrac{\ln 0.05}{-0.04}$

$t = \dfrac{-2.995732}{-0.04}$ 🖩

$t \approx 75.$

为了节省篇幅，中间有一步已经把 $\ln 0.05$ 的值四舍五入成 -2.995732. 在使用计算器时，应该直接求

$$\frac{\ln 0.05}{-0.04},$$

如果没有四舍五入，比如得到

$$\frac{-2.995732274}{-0.04}.$$

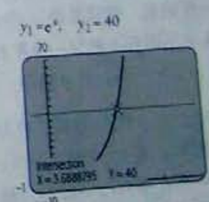
然后作除法，最后才四舍五入. 本书后面的答案就是用这种方法求得的. 请记住，表上和计算器上的数字位数会影响答案的精确度. 通常你的答案至少应有 3 位数字与书中答案相同. ■

上机技术演练

解指数方程 用绘图器解例 5 的方程 $e^t = 40$.

方法 1：INTERSECT 选项

把变量改为 x，然后考虑方程组 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = 40$. 为了看到曲线的弯曲度及可能的交点，在视窗 $[-1, 8, -10, 70]$ 下作出方程的图形.



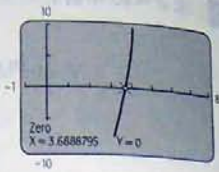
307 利用 INTESECT 选项求出交点，大约为 (3.7, 40). x 坐标 3.7 是原方程 $e^t = 40$ 的解.

2007/08/16

方法 2：ZERO 选项

把变量改为 x. 让方程的一边为 0，即化为 $e^x-40=0$. 在视窗[−1, 8, −10, 10]上作出 $y=e^x-40$ 的图形.

利用 **ZERO** 选项得到与 x 轴的交点(3.7, 0)，因此，3.7 是原方程的解.



练习 利用绘图器解下列方程.

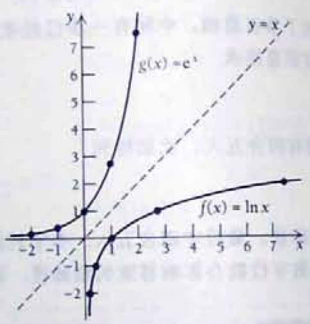
1. $e^t=1\ 000$
2. $e^{-x}=60$
3. $e^{-0.04t}=0.05$
4. $e^{0.23x}=41\ 378$
5. $15e^{0.2x}=34\ 785.13$

自然对数的图形

得到 $y=f(x)=\ln x$ 的图形的方法有两种. 一种方法是先写出它的等价方程 $x=e^y$. 然后选择一些 y 值，用计算器求出 e^y 的对应值. 然后描出诸点. 记住 x 仍是第一个坐标. 作出图形如下.

x 或 e^y	y
0.1	−2
0.4	−1
1.0	0
2.7	1
7.4	2
20.1	3

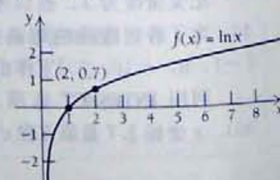
② 计算 x　① 选择 y



为了比较，这里也给出了 $g(x)=e^x$ 的图形. 这个图形在前面出现过. 重提一下，这两个函数互为反函数. 也就是说，$y=\ln x$ 或 $x=e^y$ 的图形是 $y=e^x$ 的图形关于直线 $y=x$ 的反射或镜像. 从 g 的图形上的任一有序对(a, b)可以得到 f 的图形上的有序对(b, a). 从图形上也看

308 到，$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，且 y 轴是一条垂直渐近线.

描绘 $y=\ln x$ 图形的第二种方法是利用计算器求出一些函数值. 例如，当 $x=2$ 时，$y=\ln 2\approx 0.693\ 1\approx 0.7$. 得到图形上的一个有序对(2, 0.7). 按此方法作出函数图形，如右图所示.



由图形可观察到下面的性质.

定理 6 $\ln x$ 仅对于正数 x 存在，定义域为$(0, \infty)$.

$\ln x<0$　当 $0<x<1$ 时.

$\ln x=0$　当 $x=1$ 时.

$\ln x>0$　当 $x>1$ 时.

值域是整个实轴$(-\infty, \infty)$.

上机技术演练

作对数函数的图形　为了作出 $y=\ln x$ 的图形，使用 [LN] 键，然后把函数输入成 Y1=ln (X).

自然对数函数的导数

现在来求

$$f(x)=\ln x \tag{1}$$

的导数. 首先写出与它等价的指数方程

$$e^{f(x)}=x.\qquad 根据对数的定义, \ln x=\log_e x=f(x), 因此\ e^{f(x)}=x. \tag{2}$$

方程两边求导数：

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)}=\frac{d}{dx}x$$

$$f'(x)\cdot e^{f(x)}=1 \qquad 根据链式法则$$

$$f'(x)\cdot x=1 \qquad 由(2)式, e^{f(x)}\ 用\ x\ 替换$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}.$$

于是得到下面定理.

定理 7 对任意正数 x，

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}.$$

定理 7 指出，对于函数 $f(x)=\ln x$，为了求在 x 处切线的斜率，只需取 x 的倒数. 因为 $\ln x$ 仅对正数 x 有定义，所以定理 7 仅对正数 x 成立.（对于负数 x，导数公式变为

$$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x},$$

但在本书中很少考虑这种情况.）

上机技术演练

探索　对于 $f(x)=\ln x$，使用视窗[0, 10, −3, 3]作出 f 和 f' 的图形. 作出两个函数的输入-输出表. 比较函数 f 和 f' 的 x 值与对应的 y 值，你观察到了什么？

2007/08/16

现在来求某些导数.

例 7

$$\frac{d}{dx}3\ln x=3\frac{d}{dx}\ln x=\frac{3}{x}.$$ ■

例 8

$$\frac{d}{dx}(x^2\ln x+5x)=x^2\cdot\frac{1}{x}+2x\cdot\ln x+5$$ 在 $x^2\ln x$ 上使用乘积法则

$$=x+2x\cdot\ln x+5$$ 化简

或 $x(1+2\ln x)+5.$ ■

例 9

$$\frac{d}{dx}\frac{\ln x}{x^3}=\frac{x^3\cdot(1/x)-(3x^2)(\ln x)}{x^6}$$ 根据商法则

$$=\frac{x^2-3x^2\ln x}{x^6}$$

$$=\frac{x^2(1-3\ln x)}{x^6}$$ 分解因式

$$=\frac{1-3\ln x}{x^4}.$$ 化简 ■

现在要对较复杂的函数求导数. 例如

$$h(x)=\ln(x^2-8x).$$

这是一个复合函数. 一般地, 有

309 ~ 310 $$h(x)=\ln f(x)=g[f(x)],\quad 其中\quad g(x)=\ln x.$$

这里 $g'(x)=1/x$. 于是, 根据链式法则(见 2.8 节)有

$$h'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x).$$

对于上面的情况, $f(x)=x^2-8x$, 从而 $f'(x)=2x-8$. 因此

$$h'(x)=\frac{1}{x^2-8x}\cdot(2x-8)=\frac{2x-8}{x^2-8x}.$$

利用链式法则可证明下面的法则, 这个法则使我们能求像上面那类函数的导数.

定理 8

$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

或

$$\frac{d}{dx}\ln u=\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{u}.$$

一个函数的自然对数的导数等于函数的导数除以函数.

下面给出记忆这个法则的方法.

$$h(x)=\ln(x^2-8x)$$ ①求括号内函数的导数

$$h'(x)=\frac{2x-8}{x^2-8x}$$ ②除以括号内的函数

例 10

$$\frac{d}{dx}\ln 3x=\frac{3}{3x}=\frac{1}{x}.$$

注意, 另有一种方法, 利用性质 1:

$$\ln 3x=\ln 3+\ln x;$$

于是

$$\frac{d}{dx}\ln 3x=\frac{d}{dx}\ln 3+\frac{d}{dx}\ln x=0+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$ ■

例 11

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2-5)=\frac{2x}{x^2-5}.$$ ■ 311

例 12

$$\frac{d}{dx}\ln(\ln x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}.$$ ■

例 13

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x^3+4}{x}\right)=\frac{d}{dx}[\ln(x^3+4)-\ln x]$$ 根据 P2,这样可避免使用商法则

$$=\frac{3x^2}{x^3+4}-\frac{1}{x}=\frac{3x^2}{x^3+4}\cdot\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3+4}{x^3+4}$$

$$=\frac{(3x^2)x-(x^3+4)}{x(x^3+4)}=\frac{3x^3-x^3-4}{x(x^3+4)}=\frac{2x^3-4}{x(x^3+4)}.$$ ■

上机技术演练

使用绘图器验证例 10~13 的结果. 计算

$$y=\ln\left(\frac{x^3-2}{x}\right)$$

的导数, 并用绘图器验证你的答案.

应用

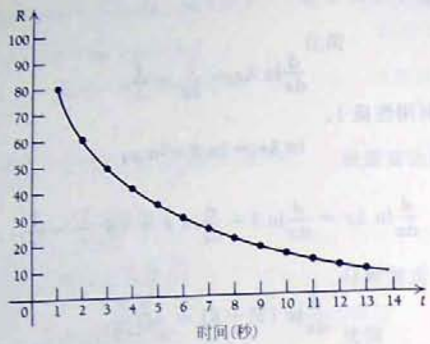
例 14 社会科学: 遗忘. 在心理学测试中, 给一些学生展示一组没有意义的字符, 例如, POK, RTZ, PDQ 等, 然后每隔一秒询问一次其是否还记得这些字符. 据此发现, 还能

2007/08/16

记住这些字符的学生所占的百分比 $R(t)$ 可用一个对数学习模型

$$R(t)=80-27\ln t,\quad t\geqslant 1$$

来表示. 严格地讲，函数是不连续的，但为了利用微积分，用光滑曲线“填满”这个图形，把 $R(t)$ 看成对任何 $t\geqslant 1$ 都有定义. 这样做并不是没有道理的，因为我们也可以求在 $t=3.47$ 秒后记得这些字符的学生的百分比，而不仅是求在 1，2，3，4 等整数秒之后的百分比.



a)经过 1 秒后仍然记得这些字符的学生的百分比是多少？

b)求 R 关于 t 的变化率 $R'(t)$.

c)求最大值和最小值(若它们存在).

解

a) $R(1)=80-27\cdot\ln 1=80-27\cdot 0=80\%$.

b) $R'(t)=\frac{-27}{t}=-\frac{27}{t}$.

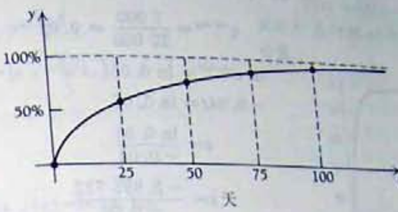
c)对于区间 $[1,\infty)$ 中的 t 值 $R'(t)$ 都存在. 注意，当 $t\geqslant 1$ 时，$-27/t<0$，所以不存在临界点，R 是递减的. 因此，在端点 1 处 R 有最大值，最大值是 $R(1)$ 或 80%；没有最小值. ■

上机技术演练

使用视窗 $[1,14,-1,100]$ 作出 $y=80-27\ln x$ 的图形. 沿图形跟踪，说明图形上有序对的每个坐标的意义.

例 15 商业：一个广告模型. 某公司为推销一种新产品在纽约某电台作广告宣传. 购买该产品者所占的“目标市场”的百分比通常是广告宣传持续时间的函数. 对于这一类产品，电台利用模型 $f(t)=1-e^{-0.04t}$ 来计算这个百分比，其中 t 是宣传的天数. 估计目标市场为 1 000 000 人，每件产品的价格是 0.50 美元，每天广告费为 1 000 美元. 求获得最高利润的广告宣传持续时间.

解 如果从图形来看，用模型 $f(t)=1-e^{-0.04t}$ 来表示购买该产品者占目标市场的百分比是合适的. 函数由 0(%) 递增到 1(100%). 广告宣传持续时间越长，购买该产品者占目标市场的百分比越大.



由时间 t 描述的总利润函数为

$$\text{利润}=\text{收入}-\text{成本}$$
$$P(t)=R(t)-C(t).$$

a)求 $R(t)$：

$$R(t)=(\text{单价})\cdot(\text{目标市场})\cdot(\text{购买者所占的百分比})$$
$$R(t)=0.5(1\,000\,000)(1-e^{-0.04t})=500\,000-500\,000e^{-0.04t}.$$

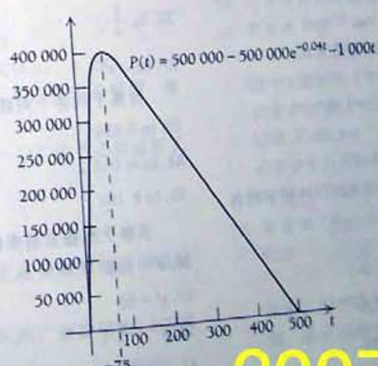
312～313

b)求 $C(t)$：

$$C(t)=(\text{每天的广告费})\cdot(\text{天数})$$
$$C(t)=1\,000t.$$

c)求 $P(t)$ 和它的导数：

$$P(t)=R(t)-C(t)$$
$$P(t)=500\,000-500\,000e^{-0.04t}-1\,000t$$
$$P'(t)=(-0.04)(-500\,000e^{-0.04t})-1\,000$$
$$P'(t)=20\,000e^{-0.04t}-1\,000.$$



2007/08/16

d)令一阶导数等于 0 并求解.

$$20\,000e^{-0.04t}-1\,000=0$$
$$20\,000e^{-0.04t}=1\,000$$
$$e^{-0.04t}=\frac{1\,000}{20\,000}=0.05$$
$$\ln e^{-0.04t}=\ln 0.05$$
$$-0.04t=\ln 0.05$$
$$t=\frac{\ln 0.05}{-0.04}$$
$$t=\frac{-2.995\,732}{-0.04}$$
$$t\approx 75.$$

e) 仅有一个临界点. 利用二阶导数确定是否有最大值:

$$P''(t)=-0.04(20\,000e^{-0.04t})=-800e^{-0.04t}.$$

因为指数函数是正数，$e^{-0.04t}>0$，所以对一切 t 都有 $-800e^{-0.04t}<0$. 在 $t=75$ 处 $P''(t)$小于0, 函数有最大值.

为了得到最大利润，广告宣传必须持续长达 75 天.

上机技术演练

绘出例 15 中函数 P 的图形，并验证当广告宣传持续长达 75 天左右时有最大利润.

习题 4.2

将下列各式写成与之等价的指数形式.

1. $\log_2 8=3$　　2. $\log_3 81=4$

3. $\log_8 2=\frac{1}{3}$　　4. $\log_{27} 3=\frac{1}{3}$

5. $\log_a K=J$　　6. $\log_a J=K$

7. $-\log_{10} h=p$　　8. $-\log_b V=w$

将下列各式写成与之等价的对数形式.

9. $e^M=b$　　10. $e^t=p$

11. $10^2=100$　　12. $10^3=1\,000$

13. $10^{-1}=0.1$　　14. $10^{-2}=0.01$

15. $M^p=V$　　16. $Q^n=T$

已知 $\log_b 3=1.099$，$\log_b 5=1.609$，计算下列各个对数值.

17. $\log_b 15$　　18. $\log_b \frac{3}{5}$

19. $\log_b \frac{1}{5}$　　20. $\log_b \sqrt{b^3}$

21. $\log_b 5b$　　22. $\log_b 75$

已知 $\ln 4=1.386\,3$，$\ln 5=1.609\,4$，计算下列各个对数值. 不用计算器.

23. $\ln 20$　　24. $\ln \frac{5}{4}$

25. $\ln \frac{1}{4}$　　26. $\ln 4e$

27. $\ln \sqrt{e^8}$　　28. $\ln 100$

计算下列各个对数值，四舍五入到第六位小数.

29. $\ln 5\,894$　　30. $\ln 99\,999$

31. $\ln 0.018\,2$　　32. $\ln 0.000\,87$

33. $\ln 8\,100$　　34. $\ln 0.011$

求解下列各方程中的 t.

35. $e^t=100$　　36. $e^t=1\,000$

37. $e^t=60$　　38. $e^t=90$

39. $e^{-t}=0.1$　　40. $e^{-t}=0.01$

41. $e^{-0.02t}=0.06$　　42. $e^{0.07t}=2$

求下列各函数的导数.

43. $y=-6\ln x$　　44. $y=-4\ln x$

45. $y=x^4\ln x-\frac{1}{2}x^2$　　46. $y=x^5\ln x-\frac{1}{4}x^4$

47. $y=\frac{\ln x}{x^4}$　　48. $y=\frac{\ln x}{x^5}$

49. $y=\ln \frac{x}{4}$ (提示：$\ln \frac{x}{4}=\ln x-\ln 4$.)

50. $y=\ln \frac{x}{2}$

51. $y=\ln(3x^2+2x-1)$

52. $y=\ln(7x^2+5x+2)$

53. $f(x)=\ln(\ln 4x)$　　54. $f(x)=\ln(\ln 3x)$

55. $f(x)=\ln\left(\frac{x^2-7}{x}\right)$　　56. $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+5}{x}\right)$

57. $f(x)=e^x\ln x$　　58. $f(x)=e^{2x}\ln x$

59. $f(x)=\ln(e^x+1)$　　60. $f(x)=\ln(e^x-2)$

61. $f(x)=(\ln x)^2$
(提示：利用推广的乘幂法则.)

62. $f(x)=(\ln x)^3$

应用

商业与经济

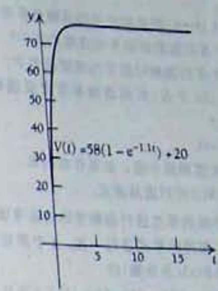
63. 广告. 一个广告效应模型为
$$N(a)=1\,000+200\ln a,\quad a\geqslant 1,$$
其中 $N(a)$是销售数量，a 是广告的总费用，单位为千美元.
a)在花费了 1 000 美元($a=1$)广告费之后销售了多少件产品?
b)求 $N'(a)$和 $N'(10)$.
c)求最大值和最小值，如果存在的话.
*d)求 $N'(a)$. 讨论$\lim\limits_{a\to\infty}N'(a)$. 在广告上花费越来越多的钱值得吗?

64. 广告. 一个广告效应模型为
$$N(a)=2\,000+500\ln a,\quad a\geqslant 1,$$
其中 $N(a)$是销售数量，a 是广告的总费用，单位为千美元.
a)在花费了 1 000 美元($a=1$)广告费之后销售了多少件产品?
b)求 $N'(a)$和 $N'(10)$.
c)求最大值和最小值，如果存在的话.
*d)求$\lim\limits_{a\to\infty}N'(a)$. 在广告上花费越来越多的钱值得吗?

65. 一个广告模型. 已知每天的广告费用为2 000美元，求解例 15.

66. 一个广告模型. 已知每天的广告费用为4 000美元，求解例 15.

67. 股值的增长. 一种股票的价值 V 的模型为
$$V(t)=58(1-e^{-1.1t})+20(\text{美元}),$$
其中 V 是时间 t(单位：月)之后这种股票的价值.



a)求 $V(1)$和 $V(12)$.
b)求 $V'(t)$.
c)多少个月之后股票的价值是 75 美元?
*d)求$\lim\limits_{t\to\infty}V(t)$. 讨论股票的长期价值. 这种价值走向有代表性吗?

68. 边际收入. 某产品的需求函数为
$$x=D(p)=800e^{-0.125p}.$$
前面曾讲过，总收入 $R(p)=pD(p)$.
a)求 $R(p)$.
b)求边际收入 $R'(p)$.
c)单价 p 是多少时收入取最大值?

生命科学与物理学

69. 一种新药的可接受度. 一种新药被医生接受的百分比 P 是
$$P(t)=100(1-e^{-0.2t}),$$
其中 t 是时间，单位为月.
a)求 $P(1)$和 $P(6)$.
b)求 $P'(t)$.
c)多少个月后这种药才能被 90%的医生接受?
*d)求$\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$并讨论其意义.

70. 雷诺数(Reynold Number). 许多动物的雷诺数由
$$R=A\ln r-Br$$
给出，其中 A 和 B 是正常数，r 是主动脉的半径. 求 R 的最大值.

2007/08/16

社会科学

71. *遗忘.* 学院的学生进行植物学的结业考试. 每隔一个月以相同的形式进行一次. t 个月后考试的平均成绩 $S(t)$（百分制）由

$$S(t) = 68 - 20\ln(t+1),\quad t \geqslant 0$$

确定.

a)首次（$t=0$）测验时的平均成绩是多少？

b)4 个月后测验时的平均成绩是多少？

c)24 个月后测验时的平均成绩是多少？

d)2 年（24 个月）后的成绩是首次成绩的百分之多少？

e)求 $S'(t)$.

f)求最大值和最小值，如果存在的话.

*g)求 $\lim_{t\to\infty} S(t)$ 并讨论其意义.

72. *遗忘.* 学院的学生进行动物学的结业考试. 每隔一个月以相同的形式进行一次. t 个月后考试的平均成绩 $S(t)$（百分制）由

$$S(t) = 78 - 15\ln(t+1),\quad t \geqslant 0$$

确定.

a)首次（$t=0$）测验时的平均成绩是多少？

b)4 个月后测验时的平均成绩是多少？

c)24 个月后测验时的平均成绩是多少？

d)2 年（24 个月）后的成绩是首次成绩的百分之多少？

e)求 $S'(t)$.

f)求最大值和最小值，如果存在的话.

*g)求 $\lim_{t\to\infty} S(t)$ 并讨论其意义.

73. *步行速度.* Bornstein 的研究发现，生活在总人口为 p（以千人计）的城市中的人们其步行速度 v 由

$$v(p) = 0.37\ln p + 0.05$$

给出，其中 v 的单位是英尺/秒.（资料来源：*International Journal of Psychology*.）

a)西雅图的人口是 531 000. 生活在西雅图的人们平均步行速度是多少？[提示：求 $v(531)$.]

b)纽约的人口是 7 900 000. 生活在纽约的人们平均步行速度是多少？

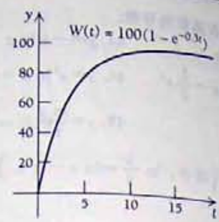
c)求 $v'(p)$.

*d)解释在(c)中求出的 $v'(p)$.

74. *赫尔学习模型*（The Hullian learning model）. 一个打字员学习打字，t 周后每分钟打的单词数 W 由

$$W(t) = 100(1 - e^{-0.3t})$$

给出.



a)求 $W(1)$ 和 $W(8)$.

b)求 $W'(t)$.

c)多少周后打字的速度是每分钟 95 个单词？

*d)求 $\lim_{t\to\infty} W(t)$ 并讨论其意义.

综合题

求下列函数的导数.

75. $y=(\ln x)^{-4}$　　76. $y=(\ln x)^n$

77. $f(t)=\ln(t^3+1)^5$　　78. $f(t)=\ln(t^2+t)^3$

79. $f(x)=[\ln(x+5)]^4$

80. $f(x)=\ln[\ln(\ln 3x)]$

81. $f(t)=\ln[(t^3+3)(t^2-1)]$

82. $f(t)=\ln\dfrac{1-t}{1+t}$　　83. $y=\ln\dfrac{x^5}{(8x+5)^2}$

84. $y=\ln\sqrt{5+x^2}$　　85. $f(t)=\dfrac{\ln t^2}{t^2}$

86. $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5\left(\ln x-\dfrac{1}{5}\right)$

87. $y=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\dfrac{1}{n+1}\right)$

88. $y=\dfrac{x\ln x-x}{x^2+1}$　　89. $y=\ln(t+\sqrt{1+t^2})$

90. $f(x)=\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$　　91. $f(x)=\ln[\ln x]^3$

92. $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+(\ln x)^2}$　　93. 求 $\lim_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}$.

求下列各式中的 t.

94. $P=P_0e^{-kt}$　　95. $P=P_0e^{kt}$

验证下列各式.

96. $\log x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}\approx 0.434\,3\ln x$

97. $\ln x=\dfrac{\log x}{\log e}\approx 2.302\,6\log x$

*98. 说明如何用 $y=\ln x$ 的图形作出 $y=e^x$ 的图形.

*99. 研究

$$\frac{d}{dx}\ln 4x=\frac{1}{x}$$

的正确性. 说明它在图形上的意义.

上机技术演练

100. e^π 与 π^e 哪个大？

101. 求 $\sqrt[e]{e}$. 将它与另一种类型的表达式 $\sqrt[x]{x}\,(x>0)$ 比较，能得出什么结论？

利用输入-输出表求下列极限.

102. $\lim_{x\to 1}\ln x$　　103. $\lim_{x\to\infty}\ln x$

描绘下列函数 f 及其导数 f' 的图形.

104. $f(x)=\ln x$　　105. $f(x)=x\ln x$

106. $f(x)=x^2\ln x$　　107. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

求下列函数的最大值.

108. $f(x)=x\ln x$

109. $f(x)=x^2\ln x$

4.3 应用：无约束增长模型，$dP/dt=kP$

要点

- 求满足 $dP/dt=kP$ 的函数.
- 增长速度与倍增时间之间的转换.
- 解含有指数增长的应用问题.

314 ～ 317

指数增长

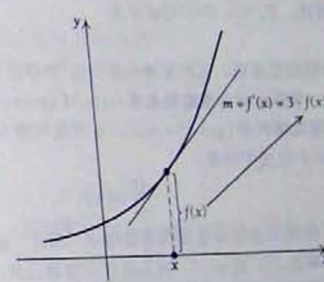
考虑函数

$$f(x) = 2e^{3x}.$$

求导得

$$f'(x) = 3\cdot 2e^{3x} = 3\cdot f(x).$$

从图形来看，这说明导数或切线斜率是常数 3 乘该函数值.



指数函数 $f(x)=ce^{kx}$ 是一个其导数等于常数乘函数自身的唯一函数.

定理 9　函数 $y=f(x)$ 满足方程

$$\frac{dy}{dx}=ky\qquad [f'(x)=k\cdot f(x)]$$

当且仅当

$$y=ce^{kx}\qquad [f(x)=ce^{kx}],$$

其中 c 是常数.

无论变量是什么，你都应能写出满足被称之为微分方程（differential equation）的函数.

例 1　求满足方程

$$\frac{dA}{dt}=kA$$

的函数.

解　这个函数是 $A=ce^{kt}$，或 $A(t)=ce^{kt}$. ■

例 2　求满足方程

$$\frac{dP}{dt}=kP$$

的函数.

解　这个函数是 $P=ce^{kt}$，或 $P(t)=ce^{kt}$. ■



2010 年世界人口是多少？

……例如 $x+5=11$ 的解是数……简单的代数方程的解是一个数，而微分方程的解是一个函数.

2007/08/16

318 3. 而微分方程 $dP/dt=kP$ 的解是函数 $P(t)=ce^{kt}$.

例 3 求满足方程

$$f'(Q)=k\cdot f(Q)$$

的函数.

解 这个函数是 $f(Q)=ce^{kQ}$. ■

方程

$$\frac{dP}{dt}=kP, k>0 \quad [P'(t)=k\cdot P(t),\quad k>0]$$

是无约束种群增长的基本模型. 无论是人口增长、细菌繁殖，还是永续复利投资都可用这种模型来描述. 忽略特殊的约束和促进因素，种群正常的繁衍速度与种群的大小成正比，而这正是方程 $dP/dt=kP$ 所表达的意思. 这个方程的解是

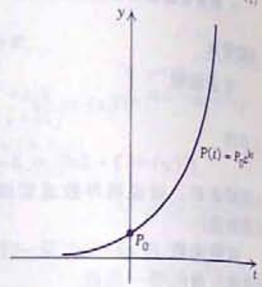
$$P(t)=ce^{kt}, \tag{1}$$

其中 t 是时间. 当 $t=0$ 时为种群的初始值 $P(0)$，用 P_0 表示. 利用 P_0，可把方程(1)重写成

$$P_0=P(0)=ce^{k\cdot 0}=ce^0=c\cdot 1=c.$$

因此，$P_0=c$，$P(t)$ 可表示为

$$P(t)=P_0e^{kt}.$$



它的图形说明，无约束增长将产生"种群激增".

常数 k 称为**指数增长率**(rate of exponential growth)，或简称为**增长率**(growth rate). k 不是种群大小的变化率，种群大小的变化率是

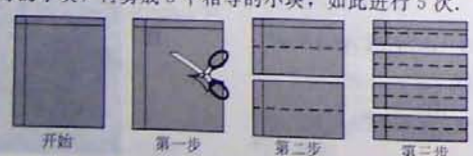
$$\frac{dP}{dt}=kP.$$

为了得到其变化率必须用常数乘 P. 因此，这两个"比率"是不同的. 像银行支付利率一样，如果利率是 7% 或 0.07，并不是说你在银行的存款余额 P 每年以 0.07 美元的比率在增长，而是每年以 $0.07P$ 美元的比率在增长. 因此我们以每年 7% 而不是 0.07 美元表示利率，还可以说

319 利率为每年每美元 0.07 美元. 在永续复利情况下，利率是一个真正的指数增长比率.

上机技术演练

探索练习：增长 用一张 $8\frac{1}{2}$ 英寸×11 英寸的纸，剪成 2 个相等的小块，然后剪成 4 个相等的小块，再剪成 8 个相等的小块，如此进行 5 次.



a)把全部纸片堆到一起，测量它的厚度.

b)一张纸的标准厚度是 0.004 英寸. 完成所给的表，并验证(a)中的结果.

	t	$0.004\cdot 2^t$
开始	0	$0.004\cdot 2^0$ 或 0.004
第一步	1	$0.004\cdot 2^1$ 或 0.008
第二步	2	$0.004\cdot 2^2$ 或 0.016
第三步	3	
第四步	4	
第五步	5	

c)作出函数 $f(t)=0.004(2)^t$ 的图形.

d)计算进行 25 步后纸的厚度(英里).

例 4 商业：永续复利. 假设投入资金 P_0 到储蓄中，年永续复利率为 7%，即结存 P 的增长率为

$$\frac{dP}{dt}=0.07P.$$

a)根据所给出的 P_0 和 0.07，求满足这个方程的函数.

b)假设投资 100 美元，1 年后结存是多少?

c)多长时间之后所投资的 100 美元能翻一番?

解

a) $P(t)=P_0e^{0.07t}$.

b) $P(1)=100e^{0.07(1)}=100e^{0.07}=100(1.072\,508)\approx 107.25$(美元).

c)求时间 T 使得 $P(T)=200$ 美元. 数 T 称为**倍增时间**(doubling time). 为了求 T，解方程

$$200=100e^{0.07\cdot T}$$
$$2=e^{0.07T}.$$

利用自然对数解此方程：

$$\ln 2=\ln e^{0.07T}$$
$$\ln 2=0.07T \qquad 根据 P5: \ln e^k=k$$
$$\frac{\ln 2}{0.07}=T$$
$$\frac{0.693\,147}{0.07}=T$$
$$9.9\approx T.$$

320 于是，9.9 年后 100 美元才能翻一番. ■



在理想情况下，这个兔子种群[illegible]的增长率是 11.7%，这个兔子种群[illegible]

导出公式

$$P(t)=P_0e^{kt}$$

的另一种途径是首先考虑

2007/08/16

$$A = P\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$$

和永续复利. 设 $P=P_0$ 和 $i=k$，得到

$$A = P_0\left(1+\frac{k}{n}\right)^{nt}.$$

我们关心的是，当 n 无限增大时，即 n 趋于∞时会出现什么结果. 为了确定这个极限，首先令

$$\frac{k}{n}=\frac{1}{q}.$$

于是

$$qk=n,\quad \text{或}\quad q=\frac{n}{k}.$$

因为 k 是一个正常数，上式说明当 n 无限增大时 q 也无限增大. 为了求出关于永续复利的公式，计算下面的极限：

$$P(t)=\lim_{n\to\infty}\left[P_0\left(1+\frac{k}{n}\right)^{nt}\right]$$ 让复利周期数趋于无穷

$$=P_0\lim_{q\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{q}\right)^{qkt}\right]$$ 常数与函数之积的极限等于常数与函数的极限之积也可以用 $1/q$ 代换 k/n，qk 代换 n. 因为 $n\to\infty$，所以 $q\to\infty$

$$=P_0\left[\lim_{q\to\infty}\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q}\right]^{kt}$$ 方幂的极限等于极限的方幂：2.2 节中 L2 的公式

$$=P_0[e]^{kt}.$$ 定理 1

通过解下列方程，得到一个涉及增长率 k 和倍增时间 T 的一般表达式：

$$2P_0=P_0e^{kT}$$

$$2=e^{kT}$$ 除以 P_0

$$\ln 2=\ln e^{kT}$$

$$\ln 2=kT.$$

321

定理 10 增长率 k 与倍增时间 T 的关系为

$$kT=\ln 2=0.693\,147,$$

或

$$k=\frac{\ln 2}{T}=\frac{0.693\,147}{T},$$

$$T=\frac{\ln 2}{k}=\frac{0.693\,147}{k}.$$

注意 T 与 k 间的关系不依赖于 P_0.

例 5 商业：因特网的使用. 世界上因特网的使用正在按指数率增长. 因特网的通信量每100天翻一番，其指数增长率是多少？

解 由定理 10 得

$$k=\frac{\ln 2}{T}=\frac{0.693\,147}{100}\approx 0.006\,931\approx 0.69\%(\text{每天}).$$

在绘图器上作验算，直接把 k 按 $\frac{\ln 2}{100}$ 输入即可，无需先求对数值

指数增长率近似等于 0.69%(每天). ■

70 规则

所谓 **70 规则**是投资领域常用的一个规则，该规则以倍增时间 T 与利率 k 之间的关系为基础. 为了估计经多长时间你的本金将按变动的报酬率翻一番，只需用报酬率除 70. 为了看清这是如何操作的，现设利率 $k=r\%$，则

$$T=\frac{\ln 2}{k}=\frac{0.693\,147}{r\%}=\frac{0.693\,147}{r\times 0.01}\cdot\frac{100}{100}=\frac{69.3\,147}{r}\approx\frac{70}{r}.$$



例 6 生命科学：世界人口的增长. 1998 年世界人口是60亿，到 2000 年大约是 60.4 亿. 已经预测到世界人口正以每年 0.016 或 1.6% 的比率呈指数增长.（这个预测是怎样确定的？其答案在下面的上机技术演练所建立的模型中.）于是，

$$\frac{dP}{dt}=0.016P,$$

其中 t 是时间，单位是 2000 年以后的年数. 为了简化计算，假设 2000 年时的人口就是 60.4 亿. 322

a) 假设 $P_0=6.040\,0$，$k=0.016$，求满足方程的函数.

b) 预测 2020 年($t=20$)的世界人口数.

c) 多少年之后人口是 2000 年的两倍.

解

a) $P(t)=6.040\,0e^{0.016t}$.

b) $P(20)=6.040\,0e^{0.016(20)}=6.040\,0e^{0.32}\approx 83.179$(亿).

c) $T=\frac{\ln 2}{k}=\frac{\ln 2}{0.016}=43.3$(年).

于是按照这个模型，到 2043 年人口将是 2000 年的两倍.（难怪生态学者发出了警告！）■

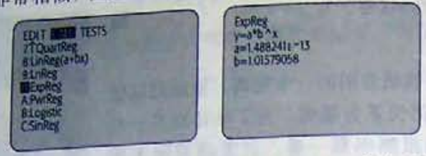
上机技术演练

指数回归：建立世界人口的增长模型 下面的表给出有关世界人口增长的数据.（说明这些数据的图形连同所估计的 2020 年的人口数量出现在 4.1 节.）

年	世界人口(单位：10亿)
1927	2
1960	3
1974	4
1987	5
1998	[illegible]

2007/08/16

如何估计 2020 年的数据？现在用 1927 年到 1998 年的数据求一个指数模型. 图形显示出，快速增长的人口可用一个指数函数来建模. 我们执行回归程序，与 1.1 节中所做的非常相似，但这里选择 ExpReg 而不是 LinReg.



注意，这给出的是一个形如 $y=a\cdot b^x$ 的指数模型，其底不是数 e. 用换底公式 $b^x=e^{x(\ln b)}$ 可把它换成以 e 为底的指数函数，但我们略去其证明.

指数回归可给出模型

$$y=(1.488\,241\cdot 10^{-13})(1.015\,790\,58)^x. \tag{1}$$

利用 $b^x=e^{x(\ln b)}$，得到

$$b^x=(1.015\,790\,58)^x=e^{x(\ln b)}=e^{x(\ln 1.015\,790\,58)}$$
$$\approx e^{x(0.015\,667\,205\,9)}=e^{0.015\,667\,205\,9x}.$$

把式(1)变为

$$y=(1.488\,241\cdot 10^{-13})e^{0.015\,667\,205\,9x}. \tag{2}$$

这种形式的优点在于可看到增长率. 此处世界人口的增长率是 0.016，即 1.6%. 为了求出 2000 年的世界人口，可在式(1)或式(2)中用 2000 替换 x. 现在用式(2)得到

$$y=(1.488\,241\cdot 10^{-13})e^{0.015\,667\,205\,9(2000)}\approx 6.040\,0(10\text{亿}).$$

练习 利用式(1)或式(2)预测下列各年的世界人口.

323 1. 2005　　2. 2010　　3. 2020　　4. 2050

商业：预算学院学费. 对于练习 5 和 6，使用下表列出的预算学院学费的数据.

学年	预算一所州立大学的学费（美元）	学年	预算一所州立大学的学费（美元）
1989～1990	6 172	1995～1996	8 756
1990～1991	6 543	1996～1997	9 281
1991～1992	6 935	1997～1998	9 838
1992～1993	7 351	1998～1999	10 424
1993～1994	7 792	1999～2000	11 054
1994～1995	8 260		

资料来源：College Board，Senate Labor Committee

5. 使用 **REGRESSION** 选项求一个指数函数 $y=a\cdot b^x$ 与所给数据拟合. 将函数变换成以 e 为底的指数函数. 确定指数增长率. 计算过程中用 $x=0$ 表示 1989～1990 学年.

6. 使用练习 5 所求出的一个指数函数预测学校在 2001，2015 和 2040 学年的费用.

在上面的上机技术演练中看到，使用所谓的回归程序可创建一个指数模型. 如果不采用回归，也有另外的方法创建这样的模型. 选择两个有代表性的已知数据点，用其确定 $P(t)=P_0e^{kt}$ 中的 P_0 和 k.

为其他现象建模



例 7 生命科学：饮酒量与事故风险率. 大量的研究所提供的数据表明，汽车司机发生事故的风险率 R(百分比)与其血液中的酒精浓度 b(百分比)有关. 使用两个有代表性的点(0，1%)和(0.14，20%)可用一个指数函数来近似这组数据. 假设风险率 R 的变化率与血液酒精浓度 b 的关系为

$$\frac{dR}{db}=kR.$$

a)设 $R_0=1\%$，求满足方程的函数.

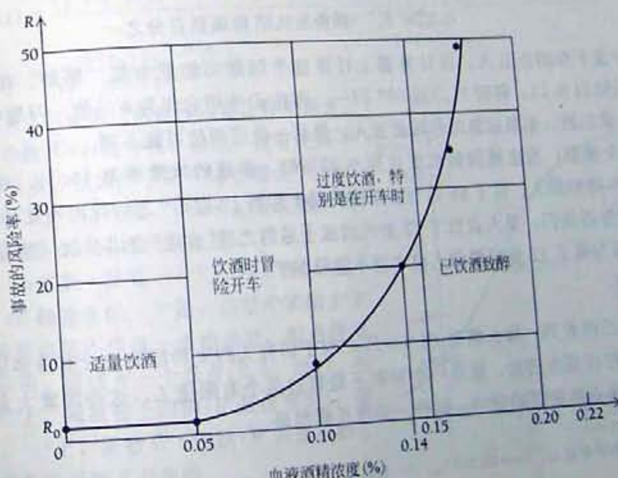
b)利用数据点 $R(0.14)=20$ 求 k.

c)用求出的 k 写出 $R(b)$.

d)当血液酒精浓度是多少时发生事故的风险率为 100%？四舍五入后精确到百分之一. 324

关于酒精的故事. 实际上，人体内血液的酒精浓度(BAC)是可测的. 除了时间之外，消除酒精对人的中枢神经系统的影响并无良方. 依靠人体的代谢来恢复是需要时间的. 一杯咖啡、一阵风雨或新鲜空气都不能立竿见影.

当然，有许多可变因素，例如，人的体重、一定时间内的饮酒量与进食量等都是造成 BAC 的水平不同的原因. 但是，诡称某人的"酒量"比别人要大，这是一个危险的借口，特别是开着车的时候. 与别人相比，有的人看似没有醉意，但是汽车不以为然，它是要发作的.



解

a)由于 R 和 b 都是百分比，为简化计算，可省略%．因为 $R_0=1$，所以解是

$$R(b)=e^{kb},$$

其中已用到了数据点(0，1)．

b)用第二个点(0.14，20)计算数 k．解方程

$$R(b)=e^{kb}, \quad 即 \quad 20=e^{k(0.14)}.$$

取自然对数得

$$\ln 20=\ln e^{0.14k}$$

$$\ln 20=0.14k$$

$$\frac{\ln 20}{0.14}=k$$

$$\frac{2.995\,732}{0.14}=k$$

$$21.4\approx k. \qquad 四舍五入后精确到十分之一$$

c) $R(b)=e^{21.4b}$.

d)用 100 代换 $R(b)$，解关于 b 的方程：

$$100=e^{21.4b}$$

$$\ln 100=\ln e^{21.4b}$$

$$\ln 100=21.4b$$

325 $$\frac{\ln 100}{21.4}=b$$

$$\frac{4.605\,170}{21.4}=b$$

$$0.22\approx b. \qquad 四舍五入后精确到百分之一$$

如果中途不作四舍五入，在计算器上计算这个问题可能更方便．例如，在 b)中，求出 ln 20，然后除以 0.14，得到 21.398 087 67…．再在 d)中用它作为 k 的值．习题中的答案都是按这种方法求出的．如果运算时作四舍五入，最后一位或两位可能不同．

按照这个模型，当血液酒精浓度达到 0.22%时，事故的风险率是 100%．在图表中可看出，对于 160 磅的男人，饮了 86 标准酒精度的威士忌酒 12 盎司[1]之后将出现此种情况．“理论上讲”，模型告诉我们，某人在饮了 12 盎司的威士忌酒之后“肯定”会出事故．实际上，也可能不是这样，因为喝了 12 盎司酒的人根本就不能开车了．■

有限增长模型

在这一节已经看到，增长模型 $P(t)=P_0e^{kt}$ 对于研究无约束种群的增长有许多应用．然而，在实际中可能存在某些因素，使得一个种群不能超过某个有限值 L，这些因素大多是受食物、生存空间或其他自然资源的制约．这样一类增长模型是

[1] 盎司的单位符号是 oz，1oz=28.349 5g．——编辑注

$$P(t)=\frac{L}{1+be^{-kt}},$$

称之为逻辑斯谛方程(logistic equation)．

例 8 商业：票房收入．在一段时间内，电影《泰坦尼克号》是有史以来最具票房价值的影片之一．从 1997 年 12 月开始，直到 1998 年 8 月制成录像带销售，它一直在电影院放映．在整个美国，它的总营业收入 R(百万美元)与时间 t(周)的关系可表示为



$$R(t)=\frac{596.423}{1+4.974e^{-0.181\,4t}}.$$

(资料来源：Exhibitor Relations Co.，Inc.)

a)求 1 周，2 周，4 周，5 周，8 周，26 周后的总收入．

b)求变化率 $R'(t)$．

c)作出函数的草图．

解

a)用计算器求函数值，结果列在下边的表中．

t	$R(t)$	t	$R(t)$
1	115.8	5	198.3
2	133.7	8	275.4
4	175.0	26	571.0

326

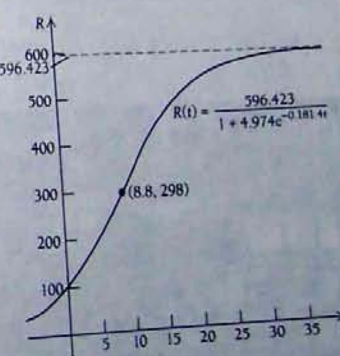
b)利用商法则求变化率 $R'(t)$ 如下：

$$R'(t)=\frac{(1+4.974e^{-0.181\,4t})\cdot 0-[(-0.181\,4)(4.974)e^{-0.181\,4t}]596.423}{(1+4.974e^{-0.181\,4t})^2}$$

$$\approx\frac{538.14e^{-0.181\,4t}}{(1+4.974e^{-0.181\,4t})^2}.$$

c)现在用 3.2 节中给出的曲线描绘法作出图形．对一切实数 t 导数 $R'(t)$ 都存在．因此，没有使其导数不存在的临界点．仅当分子是 0 时方程 $R'(t)=0$ 才成立．但是，对一切实数 t，分子总是正数．所以，函数没有临界点，从而没有极值．

因为对一切实数 t 都有 $e^{-0.181\,4t}>0$，所以对一切实数 t，$R'(t)$ 都是正的．于是，在整个实轴上 P 是递增的．虽然这里不作进一步的推导，但是使用二阶导数可证明，曲线有一个拐点(8.8，298)．在区间(0，8.8)上，函数是上凹的(R' 是递增的)，而在区间(8.8，∞)上，函数是下凹的(R' 是递减的)．其图形是右面所显示的 S 型曲线．



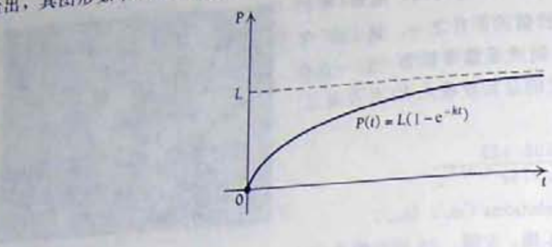
■

2007/08/16

另一类有限增长模型由函数

$$P(t) = L(1 - e^{kt})$$

给出，其图形如下. 这个函数在整个区间$[0, \infty)$上也是递增的.



327

习题 4.3

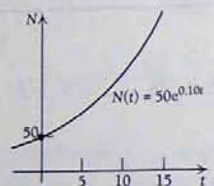
1. 求满足方程 $dQ/dt = kQ$ 的指数函数.
2. 求满足方程 $dR/dt = kR$ 的指数函数.

应用

商业与经济

3. **特许经营的发展.** 国家汉堡包公司的特许经营店遍及全国. 营销经理估计，特许经营店的数目 N 将以每年 10% 的速度增加，也就是说，

$$\frac{dN}{dt} = 0.10N.$$



a)求满足方程的函数. 假设在 $t=0$ 时特许经营店的数目是 50.



b)在 20 年中将会有多少特许经营店?

c)经过多长时间初始的 50 个特许经营店扩充到两倍?

4. **特许经营的发展.** Unltd. 国家比萨饼公司的特许经营店遍及全国. 首席执行官估计，特许经营店的数目 N 将以每年 15% 的速度增加，也就是说，

$$\frac{dN}{dt} = 0.15N.$$

a)求满足方程的函数. 假设在 $t=0$ 时特许经营店的数目是 40.

b)在 20 年中将会有多少特许经营店?

c)经过多长时间初始的 40 个特许经营店扩充到两倍?

5. **复利.** 假设投入资金 P_0 到储蓄中，每年的永续复利为 6.5%. 因此，结存 P 的增长率为

$$\frac{dP}{dt} = 0.065P.$$

a)求满足方程的函数，通过 P_0 和 0.065 表示.

b)假设投资 1 000 美元，1 年后的结存是多少? 2 年之后呢?

c)1 000 美元的投资何时能翻一番?

6. **复利.** 假设投入资金 P_0 到储蓄中，每年的永续复利为 8%. 因此，结存 P 的增长率为

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P.$$

a)求满足方程的函数，通过 P_0 和 0.08 表示.

b)假设投资 20 000 美元，1 年后的结存是多少? 2 年之后呢?

c)20 000 美元的投资何时能翻一番?

7. **年利率.** 一个银行广告宣称，它实行的是永续复利，10 年后你的本金将翻一番. 试问它的年利率是多少?

8. **年利率.** 一个银行广告宣称，它实行的是永续复利，12 年后你的本金将翻一番. 试问它的年利率是多少?

9. **石油需求.** 美国石油需求的增长率是每年 10%，试问何时需求量是 2000 年的两倍?

10. **煤的需求.** 世界上煤的需求增长率是每年 4%，试问何时需求量是 2004 年的两倍?

永续复利. 完成下面的 11～14 题.

	$t=0$ 时的初始投资 P_0(美元)	利率 k	倍增时间 T(年)	5 年后的总额(美元)
11.	75 000	6.2%		
12.	5 000			7 130.90
13.		8.4%		11 414.71
14.			11	17 539.32

15. **一幅梵高油画的价值.** 下面是梵高油画"鸢尾花"，1947 年报价是 84 000 美元，但是到了 1987 年重新报价就是 53 900 000 美元了. 假设它遵循指数模型.

a)求 k 的值($V_0 = 84\ 000$)，写出这个函数.

b)估计 1997 年该油画的价值.

c)该油画价值的倍增时间是多少?

d)从 1947 年算起多少年后该油画的价值是 10 亿美元?



梵高油画"鸢尾花"，28×32 英寸

16. **联邦预算.** 1950 年，美国联邦预算是 394 亿美元. 2000 年，联邦预算是 20 252 亿美元. 假设美国联邦预算的增长遵循指数模型，且把 1950 年作为初始时间($t=0$). (资料来源：U.S. Office of Management and Budget.)

a)求 k 的值($P_0 = 394$)，并写出这个函数.

b)估计 2010 年美国联邦预算将会是多少?

c)美国联邦预算何时达到 100 000 亿美元?

17. **人均国民收入.** 1960 年，美国人均国民收入是 2 283 美元. 2000 年是 30 069 美元. 假设美国人均国民收入的增长遵循指数模型，且把 1960 年作为初始时间($t=0$). (资料来源：U.S. Bureau of Economic Analysis.)

a)求 k 的值($P_0 = 2\ 283$)，写出这个函数.

b)估计 2020 年美国人均国民收入将会是多少?

c)美国人均国民收入何时达到 60 000 美元?

d)美国人均国民收入的倍增时间是多少?

18. **消费物价指数.** 消费物价指数好比是各个不同年度的商品和服务的价格，这里用 1967 年作为基数($t=0$). 相同的商品和服务在 1967 年的价格是 100 美元，而在 1977 年其价格是 184.50 美元. 假设其增长遵循指数模型.

a)求 k 的值($P_0 = 100$)，写出这个函数.

b)估计 2005 年同样的商品和服务的价格是多少?

c)多少年以后同样的商品和服务的价格是 1967 年的两倍?

19. **碎纸机的销售.** 下面块状图中的数据显示的是碎纸机近几年的销售量.



a)使用 **REGRESSION** 选项求一个指数函数 $y = a \cdot b^t$ 与所给的数据拟合. 然后变换成以 e 为底的指数函数，其中 t 是 1990 年之后的年数，确定指数增长率. (见本节最后的上机技术演练.)

2007/08/16

b)估计 2004 年和 2010 年碎纸机的销售量.

c)多长时间之后销售达 200 百万?

d)碎纸机销售量的倍增时间是多少?

20. **碎纸机的销售.** 参考习题 19 的数据.

a)为了求一个指数函数与所给的数据拟合,假设 $P_0=100\ 000$,t 是 1990 年之后的年数,使用点 (7, 1 600 000)求 k,并写出函数.

b)估计 2004 年和 2010 年碎纸机的销售数量.

c)多少年后销售达 200 百万?

d)碎纸机销售量的倍增时间是多少?

*e)比较习题 19 和 20 的答案,确定哪一个指数函数比较好,并说明理由.

21. **曼哈顿岛的价值.** 荷兰西印度公司的 Peter Minuit 1626 年以 24 美元购买了印第安人的曼哈顿岛. 假设指数的通货膨胀率是 8%,到 2010 年曼哈顿的价值是多少?

22. **总收益.** Intel 公司(一个计算机芯片制造商)1986 年的总收入是 12.65 亿美元,1994 年的总收入是 115.21 亿美元. 假设它的收入遵循指数模型,求增长率 k,并写出函数. 估计 2006 年的总收入.

23. **棒球大联赛球员的平均薪金.** 1970 年,棒球大联赛球员的平均薪金是 29 303 美元. 2002 年,平均薪金是 2 383 235 美元. 假设其按指数增长,增长率是多少? 2008 年的平均薪金将是多少? 2015 年呢?

24. **一张一类邮票的价格.** 1962 年一张一类的邮票价格是 4 美分. 1999 年是 33 美分. 这是按指数增长的. 增长率是多少? 2004 年一类邮票的价格是多少? 2010 年呢?

25. **广告效应.** 某公司在一个城市宣传一种新产品. 他们在电视上做产品广告,发现广告播出 t 次后去购买该产品的人所占百分比满足函数

$$P(t)=\frac{100\%}{1+49e^{-0.13t}}.$$

a)没有做广告($t=0$)时购买该产品的人所占百分比是多少?

b)广告播放 5 次,10 次,20 次,30 次,50 次,60 次后购买该产品的人所占百分比分别是多少?

c)求变化率 $P'(t)$.

d)描绘函数的图形.

26. **一块 Hershey(名牌巧克力)的价格.** 1962 年一块 Hershey 的价格是 0.05 美元,此后以 9.7% 的指数增长率增长.

a) 到 2006 年一块 Hershey 的价格是多少? 2011 年呢?

*b)该价格符合实际情况吗? 请说明.

生命科学与物理学

人口的增长. 完成 27~32 题.

	人口	每年增长率 k	倍增时间 T(年)
27.	墨西哥	3.5%	
28.	欧洲		69.31
29.	石油储备量		6.931
30.	煤储备量		17.3
31.	阿拉斯加州	2.794%	
32.	中美洲		19.8

33. **人口增长.** 美国人口在 2000 年是 281 百万. 那时,估计人口 P 以每年 0.9% 的指数增长率增长,即

$$\frac{dP}{dt}=0.009P,$$

其中 t 是时间,单位是年.(资料来源:U.S.Census Bureau.)

a)假定 $P_0=281$,$k=0.009$,求满足方程的函数.

b)估计 2015 年美国的人口数量.

c)需要多少年人口可达到 2000 年的两倍?

34. **人口增长.** 法国人口在 2001 年 7 月是 60 百万. 那时,估计人口 P 以每年 0.37%的指数增长率增长,即

$$\frac{dP}{dt}=0.003\ 7P,$$

其中 t 是时间,单位是年.(资料来源:CIA-The World Factbook.)

a)假设 $P_0=60$,$k=0.003\ 7$,求满足方程的函数.

b)估计 2010 年法国的人口数量.

c)需要多少年人口可达到 2000 年的两倍?

35. **血液酒精浓度.** 参考例 7 (酒精吸入量). 血液酒精浓度是多少时事故的风险率达到 80%?

36. **血液酒精浓度.** 参考例 7. 血液酒精浓度是多少时事故的风险率达 90%?

37. **美国两百周年的人口增长.** 1776 年的美国人口大约是 2 508 000. 在它两百周年纪念时,人口大约是 216 000 000.

a)假设人口增长呈指数模型,在这两百年中美国人口的增长率是多少?

*b)指数增长的假设合理吗? 请予解释.

38. **有限人口增长.** 一艘载有 1 000 名乘客的船舶失事被困在一个小岛上,乘客在岛上孤立无援. 岛上的自然资源使得人口增长限制在极限值 5 780 人,人口数量正越来越接近这个数字,但从未达到这个数字. 在 t 年后岛上人口数量由逻辑斯谛方程

$$P(t)=\frac{5\ 780}{1+4.78e^{-0.4t}}$$

给出.

a)分别求在 0 年,1 年,2 年,5 年,10 年,20 年的人口数量.

b)求变化率 $P'(t)$.

c)描绘函数的图形.



这个岛可能已经达到其人口增长的极限

39. **有限种群增长.** 一个湖中放养了 400 条新品种的鱼. 湖的大小、可获得的食物和其他鱼的数量使得这种鱼在湖中的增长数量限制在极限值 2 500 条.(见 38 题.)t 月之后湖中鱼的总量为

$$P(t)=\frac{2\ 500}{1+5.25e^{-0.32t}}.$$

a)分别求在 0 个月,1 个月,5 个月,10 个月,15 个月,20 个月鱼的数量.

b)求变化率 $P'(t)$.

c)描绘函数的图形.

社会科学

40. **赫尔学习模型.** 赫尔学习模型指出,经过 t 次学习训练之后能够掌握某项任务的概率 p 为

$$p(t)=1-e^{-kt},$$

其中 k 是依赖于所学任务的常数. 假设工厂在一条装配线上引进一项新的作业. 对于该项特定的作业,常数 $k=0.28$.

a)经过 1 次学习训练,2 次学习训练,5 次学习训练,11 次学习训练,16 次学习训练,20 次学习训练后学会这项作业的概率各是多少?

b)求变化率 $p'(t)$.

c)描绘函数的图形.

41. **信息的扩散.** 制药公司投入巨资测试一种新药. 该药物被联邦药物管理机构批准后,完全被医生接受并把它用于临床治疗仍需一段时间. 随着时间 t(单位:月)的推移使用此药的医生所占百分比趋于极限值 100%或 1. 假设一个新的治癌药物 t 个月后用于治疗的医生所占百分比 P 为

$$P(t)=100\%(1-e^{-0.4t}).$$

a)在 0 个月,1 个月,2 个月,3 个月,5 个月,12 个月,16 个月之后使用此药的医生所占百分比各是多少?

b)求变化率 $P'(t)$.

c)描绘函数的图形.

42. **谣言的传播.** 谣言"研究数学的人是你能信赖的人"在一所校园内传播开来. 在 t 天后听到这个谣言的学生数目 N 由下表给出.

时间 t(天)	听到谣言的人数	时间 t(天)	听到谣言的人数
1	1	7	24
2	2	8	26
3	4	9	28
4	7	10	28
5	12	11	29
6	18	12	30

a)使用绘图器上的 **REGRESSION** 选项,求一个逻辑斯谛方程

$$N(t)=\frac{c}{1+ae^{-bt}}$$

与表中数据拟合.

b)[illegible]

2007/08/16

预言?

c)作出函数图形.

d)求变化率 $N'(t)$.

★e)求 $\lim\limits_{t\to\infty}N'(t)$ 并解释它的意义.

综合题

商业：实际年收益. 假设投资 100 美元，每年的永续复利为 7%. 由例 4 可知，一年后的结存是 107.25 美元. 这与以 7.25% 的利率投资 100 美元，一年计复利一次(单利)的效果是相同的. 7.25% 称为实际年收益(effective annual yield). 一般地，如果以 k% 的永续复利投资 P_0，则实际年收益是满足 $P_0(1+i)=P_0e^k$ 的数 i. 因此 $1+i=e^k$，或

$$\text{实际年收益} = i = e^k - 1.$$

43. 一笔投资资金，每年的永续复利为 7.3%，试问实际年收益是多少?

44. 一笔投资资金，每年的永续复利为 8%，试问实际年收益是多少?

45. 在永续复利条件下，实际年收益是 9.42%，试问利率是多少?

46. 在永续复利条件下，实际年收益是 6.61%，试问利率是多少?

328 ~ 332

47. 求增长率 k 与增至三倍的时间(tripling time) T_3 之间关系的表达式.

48. 求增长率 k 与增至四倍的时间(quadrupling time) T_4 之间关系的表达式.

49. 采集你所在城市的人口增长数据，估计 2004 年和 2010 年人口数量.

50. 数量 Q_1 按指数增长其倍增时间是 1 年，数量 Q_2 按指数增长其倍增时间是 2 年. 如果 Q_1 和 Q_2 的初始值相同，多长时间后 Q_1 是 Q_2 的两倍?

51. 每天增长率 100% 对应于每小时的指数增长率是多少?

52. 试证：一个指数增长种群的任何两个测量值都可确定 k. 即证明，如果在 t_1 有值 y_1，在 t_2 有值 y_2，则

$$k=\frac{\ln(y_2/y_1)}{t_2-t_1}.$$

★53. 完成下表，该表说明增长率 k 与倍增时间 T 之间的关系.

增长率 k (每年的百分比)	1%	2%			14%
倍增时间 T (年)			15	10	

作出 $T=\ln 2/k$ 的图形. 这是一个线性关系吗? 请给予说明.

★54. 说明指数函数与逻辑斯谛函数图形的区别.

★55. 向同学解释 70 规则.

4.4 应用：衰减

要点

- 求满足 $dP/dt=-kP$ 的函数.
- 衰减速度与半衰期之间的转换.
- 解涉及指数衰减的应用问题.

在种群增长方程 $dP/dt=kP$ 中，常数 k 实际上可表示成

$$k=(\text{出生率})-(\text{死亡率}).$$

于是，只有当出生率大于死亡率时，种群才会"增长". 当出生率小于死亡率时，k 是负数，种群将会减少或衰退，减少的速度与种群的数量成比例. 为了计算上的便利，用 $-k$ 表示负值，此处 $k>0$. 方程

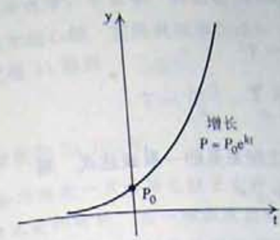
$$\frac{dP}{dt}=-kP,\quad k>0$$

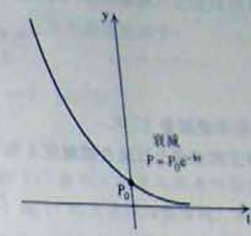
表明 P 是时间的递减函数，它的解为

$$P(t)=P_0e^{-kt},$$

这说明 P 是按指数递减的，称其为**指数衰减**(exponential decay). 此处 P_0 仍然是 $t=0$ 时 P

的值.





上机技术演练

探索 在同一个坐标系中作出 $y_1=e^{2x}$ 和 $y_2=e^{-2x}$ 的图形，并加以比较.

在同一个坐标系中作出 $y_1=100e^{-0.06x}$ 和 $y_2=100e^{0.08x}$ 的图形，并加以比较.

放射性衰减

放射性元素按指数衰减，即它的分裂速度与其当时的总量成比例.

例 1 生命科学：衰减. 锶 90 的衰减率是每年 2.8%，因此总量 N 的变化率为

$$\frac{dN}{dt}=-0.028N.$$

a)设 $t=0$ 时的总量为 N_0，求满足方程的函数.

b)假设 $t=0$ 时有 1 000 克锶 90，经 100 年衰减后还剩下多少?

c)1 000 克的锶 90 经过多长时间衰减后还剩下一半?

333

解

a)$N(t)=N_0e^{-0.028t}$.

b)$N(100)=1\,000e^{-0.028(100)}=1\,000e^{-2.8}=1\,000(0.060\,810)\approx 60.8(g)$

c)这是在问，"满足 $N(T)=500$ 的 T 是多少?"这样的数 T 称为**半衰期**(half-life). 为了求 T，解方程

$$500=1\,000e^{-0.028T}$$

$$\frac{1}{2}=e^{-0.028T}$$

$$\ln\frac{1}{2}=\ln e^{-0.028T}$$

$$\ln 1-\ln 2=-0.028T$$

$$0-\ln 2=-0.028T$$

$$\frac{-\ln 2}{-0.028}=T$$

2007/08/16

$$\frac{\ln 2}{0.028} = T$$

$$\frac{0.693\ 147}{0.028} = T$$

$$25 \approx T.$$

于是，锶 90 的半衰期是 25 年. ■

可通过解方程来求出反映衰减速度 k 和半衰期之间关系的一般表达式. 解

$$\frac{1}{2}P_0 = P_0 e^{-kT}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-kT}$$

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{-kT}$$

$$\ln 1 - \ln 2 = -kT$$

$$0 - \ln 2 = -kT$$

$$-\ln 2 = -kT$$

$$\ln 2 = kT.$$

由此得到下述定理.

定理 11 衰减率 k 与半衰期 T 的关系为

$$kT = \ln 2 = 0.693\ 147,$$

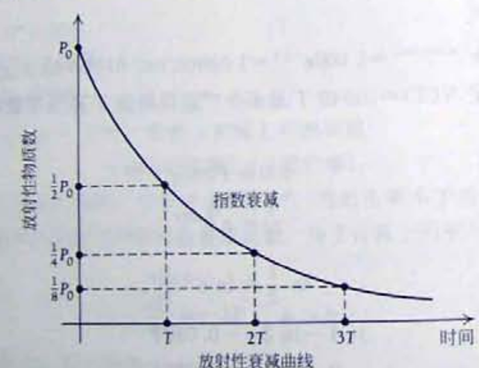
或

334

$$k = \frac{\ln 2}{T}, \quad T = \frac{\ln 2}{k}.$$

由定理可知，半衰期 T 仅依赖衰减率 k. 特别是它与放射性物质的初始数量无关.

下面的放射性衰减曲线展示了半衰期效应.



放射性衰减曲线

值得注意的是，当 t 增大时，指数函数逼近于 0 但永远也达不到 0. 因此，从理论上讲，放射性物质不会完全衰退.

例 2 生命科学：半衰期. 钚是核反应堆的一种普通的产品和原料，它是那些反对建造核反应堆的人最为担心的. 它的衰减率是每年 0.003%. 它的半衰期是多少?

解 由定理 11 得到

$$T = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0.693\ 147}{0.000\ 03} \approx 23\ 100(\text{年}).$$

于是钚的半衰期是 23 100 年. ■

科学家如何确定一只动物已经衰变掉 30% 的碳 14? 假设大气中与活着的植物和动物中的碳 14 的百分比是相同的. 当一植物或动物死去后，碳 14 的总量按指数衰减. 科学家燃烧动物的骨头，使用盖革(Geiger)计数器确定烟尘的百分比，即碳 14 的百分比. 这个数也就是大气中百分比的改变量，它说明了碳 14 已经衰变掉了多少.

碳 14 碳定年代法的处理方法源自 1952 年美国化学家 Willard F. Libby. 已经知道，活着的植物的放射现象是每克每分钟 16 次衰变. 因为碳 14 的半衰期是 5 750 年，所以一个每克每分钟有 8 次衰变活动的死了的植物还有 5 750 年的衰变期，一个每克每分钟有 4 次衰变活动的死了的植物还有 11 500 年的衰变期，如此等等. 碳 14 碳定年代法可用来测定有机物由 30 000 年至40 000年的衰变期. 超过这个衰变期，放射现象的测量就太困难了，必须采用其他的方法.

例 3 生命科学：碳定年代法(Carbon Dating). 放射性元素碳 14 的半衰期是 5 750 年. 残留在植物和动物中的碳 14 的百分比可用来确定它们的年代. 考古学家发现一个死海古卷(Dead Sea Scrolls)的亚麻布包装已经衰变掉了 22.3%的碳 14. 这个亚麻布的包装有多久了?

解

a)求衰减率 k:

$$k = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0.693\ 147}{5\ 750} \approx 0.000\ 120\ 5, \quad \text{或每年 } 0.012\ 05\%.$$

b)解初始值为 N_0，t 年后残留为 $N(t)$ 的指数方程:

$$N(t) = N_0 e^{-0.000\ 120\ 5t}.$$

335

(注意：这个方程对以后任何碳定年代问题都可使用.)

c)如果死海古卷的碳 14 由最初的 P_0 衰变掉了 22.3%，则现在的碳 14 是 77.7%(P_0). 为了求古卷的年代 t，解 t 的方程:

$$77.7\%\ N_0 = N_0 e^{-0.000\ 120\ 5t}$$

$$0.777 = e^{-0.000\ 120\ 5t}$$

$$\ln 0.777 = \ln e^{-0.000\ 120\ 5t}$$

$$\ln 0.777 = -0.000\ 120\ 5t$$

$$-0.252\ 314\ 9 = -0.000\ 120\ 5t$$

$$\frac{0.252\ 314\ 9}{0.000\ 120\ 5} = t$$

$$2\ 094 \approx t.$$

于是，死海古卷的亚麻布包装大约已有 2 094 年之久. ■

2007/08/16



1947年，一位贝多因的青年人为寻找一只迷路的山羊，攀登到死海岸边 Jericho 附近的 Kirbet Qumran 地区的一个洞穴，在洞穴里发现一大批陶器罐，里面珍藏大量古代手抄本．这里展示的就是所谓的死海古卷碎片．到目前为止，已发现600部左右手抄本碎片，其中一部分涉及犹太人的圣经．官方估计它们出自公元70年之前，写成最古老的圣经手抄本历时1 000多年．

商业应用：现值

金融机构的人士经常咨询如何求解与下述例子类似的问题．

例 4 商业：现值．小孩出生之后，父母拿出 P_0 美元作为初始投资，希望到孩子20岁生日时增长到10 000美元．如果投资按8%永续复利，计算初始投资应该是多少？

解 利用方程 $P=P_0e^{kt}$，求 P_0．现在的方程是

$$10\ 000 = P_0e^{0.08\cdot 20},$$

即

$$10\ 000 = P_0e^{1.6}.$$

由此得到

$$\frac{10\ 000}{e^{1.6}} = P_0,$$

即

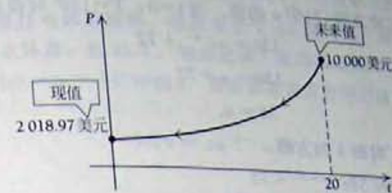
$$10\ 000e^{-1.6} = P_0.$$

使用计算器计算得

$$P_0 = 10\ 000e^{-1.6} = 10\ 000(0.201\ 897) = 2\ 018.97(\text{美元}).$$ ■

336 于是，父母现在必须存储 2 018.97 美元，到孩子 20 岁生日时才能增长到 10 000 美元．

经济学家把 2 018.97 美元称为按 8%永续复利计算 20 年到期的 10 000 美元的**现值**(present value)．计算现值的过程称为**贴现**(discounting)．这个问题的另一种表达方式是，"按 8%永续复利计算，现在必须投资多少美元才能在 20 年后结存 10 000 美元?" 答案是 2 018.97 美元，这就是 10 000 美元的现值．



计算现值可以理解成从未来值返回到现值的指数衰减．

一般地，t 年后金额 P 的现值 P_0，可通过解下列关于 P_0 的方程得到：

$$P_0e^{kt} = P,$$

$$P_0 = \frac{P}{e^{kt}} = Pe^{-kt}.$$

定理 12 按利率 k 的永续复利计算，t 年后的结存 P 的**现值** P_0 为

$$P_0 = Pe^{-kt}.$$

牛顿冷却定律

考虑下面的问题．一杯 200°[⊖] 的热汤，放在室温 70°的屋内，经过 t 分钟汤依据一个数学模型或方程被冷却，这个模型称为**牛顿冷却定律**．

> **牛顿冷却定律**
>
> 冷却物的温度 T 的变化率与差 $T-C$ 成比例，此处 C 是周围介质的恒定温度．因此，
>
> $$\frac{dT}{dt} = -k(T-C). \quad (1)$$
>
> 满足方程 (1) 的函数是
>
> $$T = T(t) = ae^{-kt} + C. \quad (2)$$ 337

求导可检验这个结果：

$$\frac{dT}{dt} = -kae^{-kt} = -k(ae^{-kt})$$
$$= -k(T-C). \qquad T = ae^{-kt}+C \quad \text{或} \quad T-C = ae^{-kt}$$

例 5 生命科学：咖啡加热．McDivett 的馅饼店铺是一个全国性的餐饮公司．该公司知道刚泡煮的咖啡温度是 130°．他们自然关心，如果一个顾客把热的咖啡撒到自己身上，可能招致诉讼．餐厅的室内温度通常是 72°．4.3 分钟后咖啡的温度降到 120°．公司规定，为顾客提供温度是 105°的咖啡较安全．一杯咖啡冷却到 105°需要多长时间？

⊖ 本书中的温度都指的是华氏温度．——译者注

2007/08/16

解

a)首先求牛顿冷却定律方程(2)中 a 的值．当 $t=0$，$T=130°$ 时得到

$$130=ae^{-k\cdot 0}+72$$
$$130=a+72$$
$$58=a.$$

然后，解 $t=4.3$，$T=120°$时的 k 的方程：

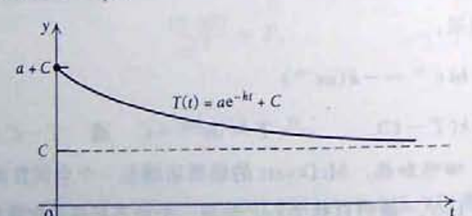
$$120=58e^{-k(4.3)}+72$$
$$48=58e^{-4.3k}$$
$$\frac{48}{58}=e^{-4.3k}$$
$$\ln\frac{48}{58}=\ln e^{-4.3k}$$
$$-4.3k=-0.189\ 242\ 0 \qquad \text{48 除以 58 并取自然对数}$$
$$k\approx 0.044.$$

b)为了知道使咖啡冷却到 $105°$需要多长时间，解关于 t 的方程：

$$105=58e^{-0.044t}+72$$
$$33=58e^{-0.044t}$$
$$\frac{33}{58}=e^{-0.044t}$$
$$\ln\frac{33}{58}=\ln e^{-0.044t}$$
$$-0.563\ 935\ 4=-0.044t$$
$$t\approx 12.8(\text{分}).$$

338 因此，咖啡冷却约 13 分钟后再提供给顾客较为“安全”．■

$T(t)=ae^{-kt}+C$ 的图形说明$\lim_{t\to\infty}T(t)=C$．物体的温度朝着周围介质的温度递减．



从数学上讲，这个模型表明，温度永远达不到 C，但实际上最终会达到 C．至少是冷却物体的温度非常接近周围介质的温度，以至于仪器都不能测量出它们的差异．现在来看牛顿冷却定律在破案中的应用．

例 6　生命科学：谋杀案是何时发生的？警察发现了一位微积分教授的尸体．为了破案急需确定谋杀的时间．警察打电话给法医，法医在正午 12 点到达．她立刻测得尸体的体温是 $94.6°$．1 小时后再测一次体温，是 $93.4°$．她也记录下室内温度是 $70°$．谋杀案是何时发生的？

解　首先求方程 $T(t)=ae^{-kt}+C$ 中的 a．假设谋杀案发生时尸体的体温是正常，则当 $t=0$ 时 $T=98.6°$．于是，

$$98.6=ae^{-k\cdot 0}+70,$$

由此得到

$$a=28.6.$$

因此，T 由 $T(t)=28.6e^{-kt}+70$ 确定．

为了求出谋杀案发生后已经过去的小时数 N，首先要确定 k．由法医测出的两个体温数得到

$$94.6=28.6e^{-kN}+70,\quad \text{或}\quad 24.6=28.6e^{-kN};\qquad (3)$$
$$93.4=28.6e^{-k(N+1)}+70,\quad \text{或}\quad 23.4=28.6e^{-k(N+1)}\qquad (4)$$

用式(4)除式(3)得

$$\frac{24.6}{23.4}=\frac{28.6e^{-kN}}{28.6e^{-k(N+1)}}=e^{-kN+k(N+1)}=e^{-kN+kN+k}=e^{k}.$$

解这个方程求 k：

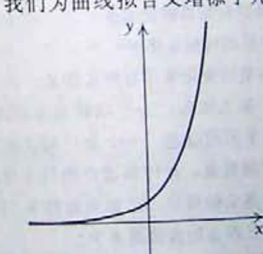
$$\ln\frac{24.6}{23.4}=\ln e^{k}\qquad \text{两边取自然对数}$$
$$0.05\approx k. \qquad 339$$

代入(3)式，解 N：

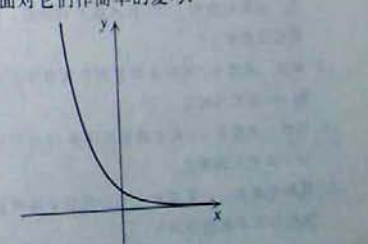
$$24.6=28.6e^{-0.05N}$$
$$\frac{24.6}{28.6}=e^{-0.05N}$$
$$\ln\frac{24.6}{28.6}=\ln e^{-0.05N}$$
$$-0.150\ 660=-0.05N$$
$$3\approx N.$$

由于法医在正午 12 点到达，所以谋杀案大约发生在上午 9 点左右．■

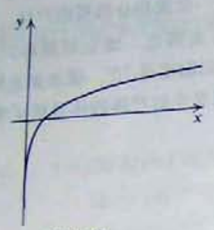
总之，我们为曲线拟合又增添了几个备选函数．下面对它们作简单的复习．



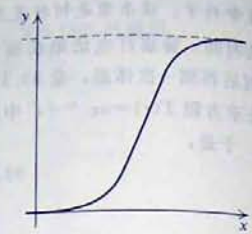
指数函数：
$f(x)=ab^{x}$，或 ae^{kx}
$a, b>0, k>0$



指数函数：
$f(x)=ab^{-x}$，或 ae^{-kx}
$a, b>0, k>0$



对数函数:
$f(x)=a+b\ln x$



逻辑斯谛函数:
$f(x)=\frac{a}{1+be^{-kx}}$

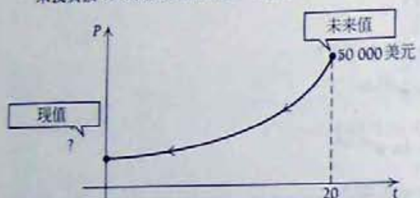
现在，当分析一组数据时，为了求曲线拟合，既可以考虑这些函数模型，也可以考虑线性函数、二次函数、多项式函数和有理函数.

习题 4.4

应用

商业与经济

1. 现值. 小孩出生之后，父母拿出 P_0 美元作为初始投资，希望到孩子 20 岁生日时增长到 50 000 美元. 如果投资按 6%的永续复利计算，初始投资应该是多少?



2. 现值. 小孩出生之后，父母拿出 P_0 美元作为初始投资，希望到孩子 20 岁生日时增长到 40 000 美元. 如果投资按 7.2%的永续复利计算，初始投资应该是多少?

3. 现值. 求按 6.4%的永续复利存满 8 年后结存为 60 000美元的现值.

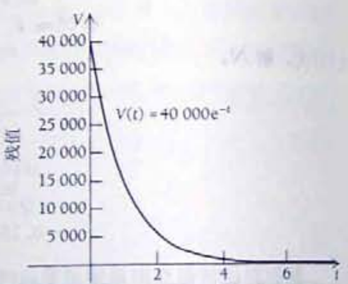
4. 现值. 求按 8.2%的永续复利存满 16 年后结存为 50 000 美元的现值.

5 供给与需求. 一家音响公司出售的立体声音响的供给与需求函数分别为

$$x=S(p)=\ln p,\quad x=D(p)=\ln\frac{163\ 000}{p},$$

其中 $S(p)$ 是公司愿意以价格 p 出售的立体声音响的数量，$D(p)$ 是民众愿意以价格 p 购买该音响的数量. 求平衡点(参见 1.5 节).

6. 残值. 某企业评估，一台机器 t 年后的残值 V 为 $V(t)=40\ 000e^{-t}$(美元).



a)机器的初始价格是多少?

b)2 年后的残值是多少?

*c)求残值的变化率并解释其意义.

7. 现值. 某人得知，一个信托基金在 13 年后将有 80 000美元的收益. 一个会计师正在为这个客户准备财物报表，在计算客户的资本净值时需要知道信托基金的现值. 已知利息按 8.3%永续复利. 试问信托基金的现值是多少?

8. 消费物价指数. 消费物价指数好比是不同年度的商品价格和服务的价格. 这里用 1967 年作为基数. 相同的商品和服务在 1967 年的价格是 100 美元，而在 1940 年其价格是 42 美元. 假设模型是指数衰减模型.

a)求 k 的值，并写出方程. 四舍五入到百分之一.

b)计算相同的商品和服务在 1900 年的价格.

9. 残值. 公司按年度周期跟踪一种特殊的复印机的残值. 下表中列出了购买 t 年后复印机的价值.

时间 t(年)	残值(美元)
0	34 000
1	22 791
2	15 277
3	10 241
4	6 865
5	4 600
6	3 084

资料来源：International Data Corporation

a)使用绘图器中的 **REGRESSION** 选项求一个指数函数 $y=a\cdot b^x$ 与表中数据拟合. 然后将公式换成 $V(t)=V_0e^{-kt}$，其中 V_0 是复印机购买时的价值，t 是从购买日期到现在的年限. (参见 4.3 节中"70 规则"小节最后的上机技术演练.)

b)计算 7 年后和 10 年后复印机的残值.

c)多少年后残值是 1 000 美元?

d)多少年后复印机的价值是原价值的一半?

*e)求残值的变化率并解释其意义.

销售模型. 对于下列各个散射图，确定下面哪个函数(如果有的话)能够作为其数据的模型.

a)二次函数：$f(x)=ax^2+bx+c$

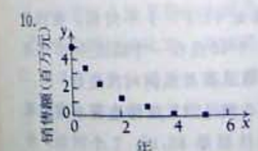
b)多项式函数，但不是二次函数

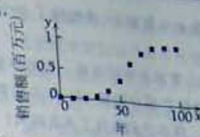
c)指数函数：$f(x)=ae^{kx}$，$k>0$

d)指数函数：$f(x)=ae^{-kx}$，$k>0$

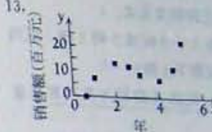
e)对数函数：$f(x)=a+b\ln x$

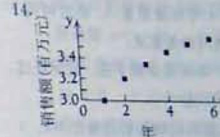
f)逻辑斯谛函数：$f(x)=\frac{a}{1+be^{-kx}}$

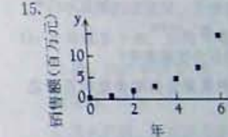
10.


11.


12.


13.


14.


15.


生命科学与物理学

放射性衰减. 对 16~21 题完成下列填空.

	放射性物质	衰减率 k	半衰期 T
16.	钋		3 分
17.	铅		22 年
18.	碘-131	9.6%(每天)	
19.	锶-90		25 年
20.	铀-238		4 560 年
21.	钚		23 105 年

22. 半衰期. 初始质量为 1 000 克的铅，经过 100 年后还剩多少? k 的值参看 17 题.

23. 半衰期. 初始质量为 1 000 克的钋，经过 20 分钟后还剩多少? k 的值参看 16 题.

24. 一只象牙的碳 14 放射掉了 40%，它已有多少年了?

2007/08/16

25. 碳定年代法．一块木头的碳 14 放射掉了 90%，它已有多少年了？

26. 癌症的治疗．碘 125 常用来治疗癌症．它的半衰期是 60.1 天．假设储存器中的碘 125 样本的数量已经减少了 25%．样本已经存放了多长时间？

27. 碳定年代法．一件中国工艺品的碳 14 放射掉了 60%，它已有多长的历史了？

28. 在一个化学反应中，物质 A 按照与其现有质量成比例的速度分解．

a)写出物质的质量 A 与初始质量 A_0 经过时间 t 后所余下的质量之间的关系式．

b)已知 10 磅的 A 经 3.3 小时减少到 5 磅．试问经过多长时间后仅剩下 1 磅？

29. 在一个化学反应中，物质 A 按照与其现有质量成比例的速度分解．

a)写出物质的质量 A 与初始质量 A_0 经过时间 t 后所余下的质量之间的关系式．

b)已知 8 克的 A 经 3 小时减少到 4 克．试问经过多长时间后仅剩下 1 克？

30. 重量的衰减．一只饥饿的动物初始重量是 W_0．t 日后重量 W 为

$$W = W_0 e^{-0.009t}.$$

a)每天其重量衰减的百分比是多少？

b)30 天后它所剩下的重量是初始重量的百分之多少？

31. 重量的衰减．一只饥饿的动物初始重量是 W_0．t 日后重量 W 为

$$W = W_0 e^{-0.008t}.$$

a)每天其重量衰减的百分比是多少？

b)30 天后它所剩下的重量是初始重量的百分之多少？

Beer-Lambert 定律

光束进入像水或烟雾这样的介质，其初始亮度为 I_0．它的亮度随介质的密度（或浓度）而减弱．在密度（或浓度）为 x 单位处的亮度由

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

给出．常数 μ 称为吸收系数，它随介质而改变．

32. 光线穿过烟雾．污染大气的悬浮微粒的浓度会减弱太阳光线．在一个烟雾迷漫的区域中，$\mu = 0.01$，x 是测量出的每立方米中微粒浓度的微克数．阳光初始亮度的百分比 I_0 是多少时才能穿过每立方米 100 微克浓度的烟雾？

33. 光线穿过海水的吸收系数 $\mu = 1.4$．x 是被测得的深度，单位为米．

a)在海水深度为 1 米、2 米、3 米处光线亮度是初始亮度 I_0 的百分之多少？

b)植物在 10 米之下不能够生存．在 10 米深处光线亮度是初始亮度 I_0 的百分之多少？



34. 冷却．温度为 100°的液体放在 40°的冷库中，5 分钟后被冷却到 90°．

a)求牛顿冷却定律中常数 a 的值．

b)求常数 k 的值．四舍五入到百分之一．

c)10 分钟后温度是多少？

d)经过多长时间液体将冷却到 41°？

*e)求温度的变化率，并解释其意义．

35. 冷却．温度为 100°的液体放在 75°的室内，10 分钟后被冷却到 90°．

a)求牛顿冷却定律中常数 a 的值．

b)求常数 k 的值．四舍五入到百分之一．

c)20 分钟后温度是多少？

d)经过多长时间液体将冷却到 80°？

*e)求温度的变化率，并解释其意义．

36. 冷却的尸体．法医在凌晨 2 点到达谋杀案现场．他测得尸体的体温是 61.6°．1 小时后，再测量尸体体温是 57.2°，尸体是在一个温度为 10°的肉类冰库中发现的．谋杀案是在何时发生的？

37. 冷却的尸体．法医在晚上 11 点到达谋杀案的现场．他测得尸体的体温是 85.9°，1 小时后，再测量尸体体温是 83.4°．尸体是在一个温度为 60°的屋内发现的．谋杀案是在何时发生的？

38. 俄罗斯人口递减．俄罗斯人口由 1995 年的 150 百万减少到 2002 年的 144 百万．假设人口正在依照指数衰减模型减少．（资料来源：CIA—The World Factbook.）

a)求 k 的值，并写出方程．

b)计算 2010 年俄罗斯的人口数．

c)何时俄罗斯的人口减少到 100 百万？

39. 乌克兰人口递减．乌克兰人口由 1995 年的 51.9 百万减少到 2001 年的 48.8 百万．假设人口正在依照指数衰减模型减少．（资料来源：CIA—The World Factbook.）

a)求 k 的值，并写出方程．

b)计算 2015 年乌克兰的人口数．

c)按照这个模型，乌克兰的人口何时只剩下 1 人？

40. 气压．高度为 a 处的气压 P 为

$$P = P_0 e^{-0.00003a},$$

其中 P_0 是海平面处的气压．假设 P_0=14.7 磅/英寸^2．

a)求 1 000 英尺高处的气压．

b)求 20 000 英尺高处的气压．

c)在多高处的气压是 14.7 磅/英寸^2？

*d)求气压的变化率，并解释其意义．

41. 人造卫星的电源．人造卫星的电源是由放射性同位素提供的．电源输出 P(瓦特)的递减率与放射性同位素即时的数量成比例．P 由

$$P = 50e^{-0.004t}$$

确定，其中 t 是时间，单位是天．

a)375 天后还有多少电源可提供？

b)电源的半衰期是多少？

c)当电源少于 10 瓦特时人造卫星的设备不能运转．多长时间后卫星将停止运行？

d)初始时人造卫星的电源是多少？

*e)求电源的变化率，并解释其意义．

42. 碳定年代法．最近，在挖掘新墨西哥的 Chaco 峡谷时，考古学家发现具有 4 000 年历史的谷物花粉．这证明印第安人在西南部开始种植谷物的年代比科学家们估计的年代要早几个世纪．花粉中的碳 14 放射掉了百分之多少？

43. 遗忘．在一个艺术班级中，学生在课程结束后要进行课后测验．然后每隔一段时间再进行一次同等的测验．t 月后测验的分数由下表给出．

时间 t(月)	分数 y
1	84.9%
2	84.6%
3	84.4%
4	84.2%
5	84.1%
6	83.9%

a)使用绘图器中的 **REGRESSION** 选项求一个对数函数 $y=a+b\ln x$ 与表中数据拟合．

b)用所求得的函数分别预测 8 个月、10 个月、24 个月、36 个月后的测验成绩．

c)多长时间后测验成绩将跌落到 82%以下？

*d)求成绩的变化率，并解释其意义．

44. 牛肉消费下跌．1985 年每人每年消费牛肉 B 约 80 磅，1996 年约 67 磅．假设消费按指数衰减模型递减．

a)求 k 的值，并写出方程．

b)估计 2000 年牛肉的消费量．

c)理论上，到哪一年牛肉的消费量是每人 20 磅？

综合题

45. 经济：供给与需求．某种型号的录像机的供给和需求函数分别为

$$x = D(p) = 480e^{-0.003p}$$

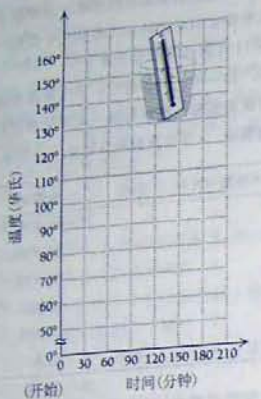
和

$$x = S(p) = 150e^{0.004p}.$$

求平衡点．

46. 牛顿冷却定律．考虑下列测量情况．倒一杯热水，把温度计放入杯中测量温度．每 30 分钟记录一次温度．在图上描出这些点，并用平滑曲线连接．

2007/08/16



340 ~ 344

a)开始时，温度是多少？

b)在什么温度有一段看似呈水平线的图形？

c)a)和 b)的答案之间的差是多少？

d)将 b)中的温度与室内温度相比较．

e)求拟合这些数据的方程，用其检验其他点的数据，并加以比较．

f)即使从"理论上"上讲，水的温度能够降到与室温相同吗？请解释．

*g)求温度的变化率，并解释其意义．

*47．利率由 8% 减少到 7.2%．解释为什么这会增加 10 年后到期的结存的现值．

4.5　a^x 和 $\log_a x$ 的导数

要点

- 将指数函数转换成以 e 为底的函数．
- 求含有 a^x 和 $\log_a x$ 的函数的导数．

a^x 的导数

为了求以任意数 a 为底的函数 a^x 的导数，先把 a^x 转换成以 e 为底的函数．为此，首先证明对数的另一个性质．

P7．$b^{\log_b x}=x$．

为了证明此性质，令

$$y=\log_b x.$$

则由对数定义得

$$b^y=x.$$

用 $\log_b x$ 替换 y 得到

$$b^{\log_b x}=x.$$

现在可以把 a^x 转换成以 e 为底的函数．利用性质 7，取 $b=\mathrm{e}$，$x=a$ 得

$$a=\mathrm{e}^{\ln a}.\quad 因为 \ln a=\log_e a$$

等式两边都取 x 次幂得到

$$a^x=(\mathrm{e}^{\ln a})^x$$
$$=\mathrm{e}^{x\cdot\ln a}\qquad 指数相乘$$

于是得到下面结论．

定理 13

$$a^x=\mathrm{e}^{x\cdot\ln a}.$$

例 1　将下列式子转换成以 e 为底的幂．

a) 3^2

b) 10^x

$$3^2=\mathrm{e}^{2\cdot\ln 3}\approx\mathrm{e}^{2(1.098\,612)}\approx\mathrm{e}^{2.197\,2}$$
$$10^x=\mathrm{e}^{x\cdot\ln 10}\approx\mathrm{e}^{x(2.302\,585)}\approx\mathrm{e}^{2.302\,6x}$$ ■

345

现在可求导数了．

例 2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{x\cdot\ln 2}\qquad 定理 13$$
$$=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\cdot\ln 2)\right]\cdot\mathrm{e}^{x\cdot\ln 2}=(\ln 2)(\mathrm{e}^{\ln 2})^x=(\ln 2)2^x.$$

对 $x\ln 2$ 取导数，且用 2^x 代替 $\mathrm{e}^{x\ln 2}$ 就求出了 2^x 的导数．注意到 $\ln 2\approx 0.7$，因而上面的结果验证了我们前面提到的事实：2^x 的导数的近似值可取作 $(0.7)2^x$（见 4.1 节）． ■

一般地，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{x\cdot\ln a}\qquad 定理 13$$
$$=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\cdot\ln a)\right]\cdot\mathrm{e}^{x\cdot\ln a}=(\ln a)a^x.$$

于是，得到下面结论．

定理 14

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x=(\ln a)a^x.$$

例 3

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}3^x=(\ln 3)3^x.$$ ■

例 4

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1.4)^x=(\ln 1.4)(1.4)^x.$$ ■

比较公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x=(\ln a)a^x\quad 和\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x.$$

后一个公式较简单，这正是在微积分中以 e 为底的原因．e 在自然现象中的许多应用也提供了以 e 为底的其他原因．

由上面的结论还可得到一些其他结果．如果

$$f(x)=a^x,$$

则

$$f'(x)=a^x(\ln a).$$

346

2007/08/16

在 4.1 节，还证明了

$$f'(x)=a^x\left(\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\right).$$

因此

$$a^x(\ln a)=a^x\left(\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\right).$$

因为 $a^x>0$，所以得到下面的结论.

定理 15

$$\ln a=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}.$$

$\log_a x$ 的导数

求 a^x 的导数用到了 $\ln a$，同样，求 $\log_a x$ 的导数也是如此. 为了求 $\log_a x$ 的导数，首先要用 $\ln a$ 来表示 $\log_a x$. 利用性质 7：

$$a^{\log_a x}=x.$$

于是有

$$\ln\left(a^{\log_a x}\right)=\ln x$$

$$(\log_a x)\cdot\ln a=\ln x \quad \text{利用 P3，把 } \log_a x \text{ 当作指数}$$

由此得到

$$\log_a x=\boxed{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln x.$$

└─常数

$\log_a x$ 的导数如下所述.

定理 16

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}.$$

把这与

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$$

相比较，再一次看到在微积分中以 e 为底是方便的.

例 5

$$\frac{d}{dx}\log_3 x=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{x}.$$ ■

例 6

$$\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{x},\quad \text{这里 } \log x=\log_{10}x.$$ ■

例 7

$$\frac{d}{dx}x^2\log x=x^2\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{x}+2x\log x \quad \text{根据乘积法则}$$

$$=\frac{x}{\ln 10}+2x\log x,\quad \text{或}\quad x\left(\frac{1}{\ln 10}+2\log x\right).$$ ■

上机技术演练

使用绘图器检验例 3～7 的结果. 求 $y=\log_2 x$ 的导数，并在绘图器上检验所得结果.

习题 4.5

把下列各式表示成 e 的幂.

1. 5^4
2. 2^3
3. $(3.4)^{10}$
4. $(1.04)^{24}$
5. 4^k
6. 5^R
7. 8^{kT}
8. 10^{kR}

求下列函数的导数.

9. $y=6^x$
10. $y=7^x$
11. $f(x)=10^x$
12. $f(x)=100^x$
13. $f(x)=x(6.2)^x$
14. $f(x)=x(5.4)^x$
15. $y=x^3 10^x$
16. $y=x^4 5^x$
17. $y=\log_4 x$
18. $y=\log_5 x$
19. $f(x)=2\log x$
20. $f(x)=5\log x$
21. $f(x)=\log\frac{x}{3}$
22. $f(x)=\log\frac{x}{5}$
23. $y=x^3\log_8 x$
24. $y=x\log_6 x$
25. $g(x)=e^{kx}$
26. $g(x)=e^{2x}$
27. $f(x)=\frac{4^x}{x}$
28. $f(x)=e^x\log_4 x$

应用

商业与经济

29. **铝罐再利用.** 已知流通中的铝罐每年将有四分之一回收后再利用. 一家饮料公司售出 250 000 只铝罐. t 年后仍在使用的数量为

$$N(t)=250\,000\left(\frac{1}{4}\right)^t.$$

a)求 $N'(t)$.

*b)解释 $N'(t)$的意义.

30. **复式均衡下跌折旧.** 花 5 200 美元购买了一台办公设备. 在某些假设下，它的残值 V 依照一个被称为复式均衡下跌的方法折旧，其折旧率是每年 80%，即

$$V(t)=5\,200(0.80)^t\text{（美元）},$$

其中 t 是时间，单位是年.

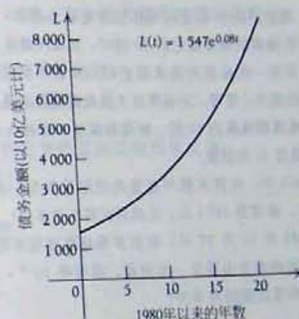
a)求 $V'(t)$.

*b)解释 $V'(t)$的意义.

31. **家庭债务.** 美国家庭金融债务总额（以 10 亿美元计）可用函数

$$L(t)=1\,547e^{0.08t}$$

来建模，其中 t 是 1980 年之后的年数. 这一函数的图形如下.



347～348

a)使用这个模型，预测 2010 年美国家庭金融债务的总额.

b)求 $L'(25)$.

c)解释 $L'(25)$ 的意义.

32. **小企业.** 在美国，非农产品经营者的数量（以千户计）可用函数

$$N(t)=8\,400\ln t-10\,500$$

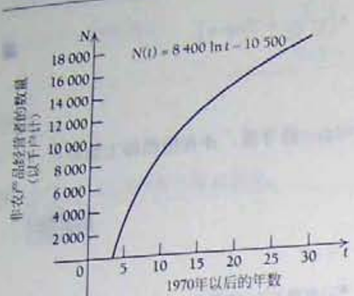
来建模，其中 t 是 1970 年之后的年数. 这个函数的图形见题后.

a)使用这个模型，预测 2010 年美国非农产品经营者的数量.

b)求 $N'(35)$.

c)解释 $N'(35)$ 的意义.

2007/08/16



生命科学与物理学

地震的震级．地震强度 I 的级别 R（按里氏标准测量）由

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

确定，其中 I_0 是用来作比较的最小强度．当一次地震的强度是它的 10 倍时，其里氏震级是 1．如果一次地震的强度是它的 100 倍，其里氏震级是 2，等等．于是里氏 7 级地震的强度是 6 级地震的强度的 10 倍．地震的震级被解释为最小强度 I_0 的倍数．

33．1986 年，在俄亥俄州克里夫兰附近发生一次地震，强度是 $10^5 \cdot I_0$，它的里氏震级是多少？

34．1989 年 10 月 17 日，在世界棒球联赛冠军赛期间加州旧金山发生一次地震，强度是 $10^{6.9} \cdot I_0$，它的里氏震级是多少？



这张照片显示的是 1989 年加州旧金山地区由于地震而受损的一部分．

35．地震强度．地震的强度 I 为

$$I = I_0 10^R,$$

其中 R 是里氏震级，I_0 是当 $R=0$ 时用来作比较的最小强度．

a)求里氏 7 级地震的 I_0 的倍数 I．

b)求里氏 8 级地震的 I_0 的倍数 I．

c)比较 a)和 b)的答案．

d)求变化率 dI/dR．

*e)解释 dI/dR 的意义．

36．声音的强度．声音的强度为

$$I = I_0 10^{0.1L},$$

其中 L 是所测得的声响的分贝数，I_0 是人的耳朵可听到的声音最小强度．

a)用 I_0 表示具有 100 分贝声响的动力剪草机的声音强度 I．

b)用 I_0 表示具有刚刚能听到的 10 分贝声响的 I．

c)比较 a)和 b)的答案．

d)求变化率 dI/dL．

*e)解释 dI/dL 的意义．

37．地震的震级．地震强度 I 的级别 R（按里氏标准测量）由

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

确定，其中 I_0 是用来作比较的最小强度．（在 35 题中给出了这个定义的指数形式．）

a)求变化率 dR/dI．

*b)解释 dR/dI 的意义．

38．声音的响度．强度为 I 的声音其响度 L 由

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

确定，其中 I_0 是人的耳朵可听到的最小强度，L 是所测量的声音响度的分贝数．（在 36 题中给出了这个定义的指数形式．）

a)求变化率 dL/dI．

*b)解释 dL/dI 的意义．

39．用药剂量的反应．一种药物剂量 x 的反应 y 为

$$y = m \log x + b.$$

这种反应可能难以用数值测量．患者可能出很多汗，体温上升或昏迷．

a)求变化率 dy/dx．

*b)解释 dy/dx 的意义．

综合题

40．求 $\lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h}$．

使用链式法则和本节给出的其他公式求下面各个函数的导数．有些题，在求导之前两边先取对数有利于求导．

41．$f(x) = 3^{2x}$　　42．$y = 2^{x^4}$

43．$y = x^x$，$x>0$　　44．$y = \log_5(x^2+1)$

45．$f(x) = x^{e^x}$，$x>0$　　46．$y = a^{f(x)}$

47．$y = \log_a f(x)$，$f(x)$是正的

48．$y = [f(x)]^{g(x)}$，$f(x)$是正的

*49．用自己的语言说明求 $f(x) = a^x$ 的导数公式是什么样才是正确的．

*50．用自己的语言说明求 $f(x) = \log_a x$ 的导数公式是什么样才是正确的．

4.6 经济应用：需求弹性

要点

- 求需求函数的弹性．
- 求总收益函数的最大值．
- 用弹性表示需求量．

假设 x 表示售出商品的数量，p 是商品的单价．回顾 x 和 p 的关系可用需求函数

$$x = D(p)$$

来表示．假设产品单价有一个改变量 Δp，则价格改变的百分比为

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{100}{100} = \frac{\Delta p \cdot 100}{p}\%.$$

如果产品价格的改变引起销售数量产生改变量 Δx，则销售数量改变的百分比为

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x \cdot 100}{x}\%.$$

销售数量改变的百分比与价格改变的百分比的比率是

$$\frac{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)},$$

349
~
350

这可表示为

$$\frac{p}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta p}. \tag{1}$$

对于可微函数，

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{dx}{dp}.$$

因而当 Δp 趋于 0 时，式(1)中的表示式的极限变为

$$\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{p}{D(p)} \cdot D'(p) = \frac{pD'(p)}{D(p)}.$$

定义 需求弹性(elasticity of demand)E 是指由

$$E(p) = -\frac{pD'(p)}{D(p)}$$

给出的价格 p 的函数．

2007/08/16

数 x，$D(p)$和 p 总是非负的. 因为需求曲线是递减的，所以需求曲线的斜率 $dx/dp=D'(p)$总是负的. $D(p)$总是非负的，而为保证弹性存在，$D(p)$又必须是正的. 经济学家在弹性的定义中使用了负号"−"，以使$E(p)$非负且更容易操作.



例 1 经济学：录像带出租的需求. 录像带商店设计出一个关于其录像带租金的需求函数，并把它表示为

$$x=D(p)=120-20p,$$

其中 x 是当每盒租金是 p 美元时每天出租录像带的数量. 求解下列各题.

a)求当每盒租金是 2 美元时的需求数量.

b)求作为 p 的函数的弹性表达式.

c)求当 $p=2$ 美元和 $p=5$ 美元时的弹性. 解释这些弹性数值的意义.

d)求 $E(p)=1$ 时 p 的值. 解释这一价格的意义.

e)求总收益函数 $R(p)=pD(p)$.

f)求总收益最大时的价格 p.

解

a)当 $p=2$ 美元时，$x=D(2)=120-20(2)=80$. 因此，当每盒租金是 2 美元时，每天出租 80 盒录像带.

351 b)为求弹性，首先求出导数 $D'(p)$：

$$D'(p)=-20.$$

在弹性的表达式中用−20 替换 $D'(p)$，$120-20p$ 替换 $D(p)$得

$$E(p)=-\frac{pD'(p)}{D(p)}=-\frac{p\cdot(-20)}{120-20p}=\frac{20p}{120-20p}=\frac{p}{6-p}.$$

c)$E(2)=\frac{2}{6-2}=\frac{1}{2}$.

当 $p=2$ 美元时，弹性是$\frac{1}{2}$，它小于 1. 因此，出租数量改变量的百分比与价格改变量的百分比的比率小于 1. 价格的小量增长所引起出租数量百分比的减少小于价格改变量的百分比.

$$E(5)=\frac{5}{6-5}=5.$$

当 $p=5$ 时，弹性是 5，它大于 1. 因此，出租数量改变量的百分比与价格改变量的百分比的比率大于 1. 价格的小量增长所引起出租数量百分比的减少，大于价格改变量的百分比.

d)令 $E(p)=1$，解出 p：

$$\frac{p}{6-p}=1$$

$$p=6-p \qquad \text{假设 } p\neq 6\text{，两边乘以 } 6-p$$

$$2p=6$$

$$p=3$$

因此，当每盒租金是 3 美元时，出租数量改变量的百分比与价格改变量的百分比的比率是 1.

e)因为总收益 $R(p)$是由 $pD(p)$给出的，因而

$$R(p)=pD(p)=p(120-20p)=120p-20p^2.$$

f)为了求总收益最大时的价格 p，先求 $R'(p)$：

$$R'(p)=120-40p.$$

对于区间$[0,\infty)$中一切 p 的值$R'(p)$都存在. 求解：

$$R'(p)=120-40p=0$$

$$-40p=-120$$

$$p=3.$$

因为只有一个临界点，所以可用二阶导数判断其是否有最大值：

$$R''(p)=-40,\quad \text{为常数}.$$

于是，$R''(3)$是负的，因此 $R(3)$ 是最大值. 即当每盒租金是 3 美元时，总收益最大. ■

在例 1 中看到，使 $E(p)=1$ 的 p 值与使总收益最大的 p 值是相同的. 这一事实总是成立的. 352

上机技术演练

经济学：便携式收音机的需求 一家公司测定，便携式收音机的需求函数是

$$x=D(p)=300-p,$$

其中 x 是当每台收音机的价格为 p 美元时每天卖出的数量.

练习

1. 求弹性 E 和总收益 R.
2. 在同一个坐标系中仅使用第一象限，作出需求、弹性和总收益函数的图形.
3. 求使总收益最大的价格 p. 使用例 1 的方法，在绘图器上检验你的答案.

定理 17 在使 $E(p)=1$ 的 p 值处，其总收益最大.

该定理证明如下. 已知

$$R(p)=pD(p),$$

所以

$$\begin{aligned}R'(p)&=p\cdot D'(p)+1\cdot D(p)\\&=D(p)\left[\frac{pD'(p)}{D(p)}+1\right] \qquad \text{这可用相乘验证} \qquad (2)\\&=D(p)[-E(p)+1]=D(p)[1-E(p)]\end{aligned}$$

$$R'(p)=0 \quad \text{当 } 1-E(p)=0 \text{ 或 } E(p)=1 \text{ 时}.$$

现在已经证明了当 $E(p)=1$ 时总收益最大，那么 $E(p)<1$ 和 $E(p)>1$ 时又如何呢？根据上述证明中的式(2)可回答这个问题.

2007/08/16

这说明总收益函数是递增的.

对于使 $D(p)>0$ 和 $E(p)<1$ 的价格 p，有 $1-E(p)>0$，因此，根据式(2)有 $R'(p)>0$.

对于使 $D(p)>0$ 和 $E(p)>1$ 的价格 p，有 $1-E(p)<0$，因此，根据式(2)有 $R'(p)<0$.

这说明总收益函数是递减的.

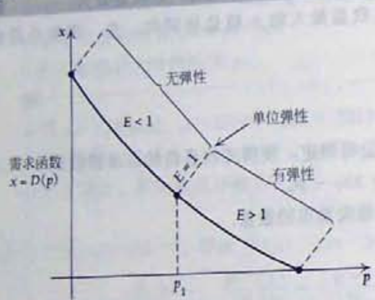
下述命题和图表总结了上面的结论.

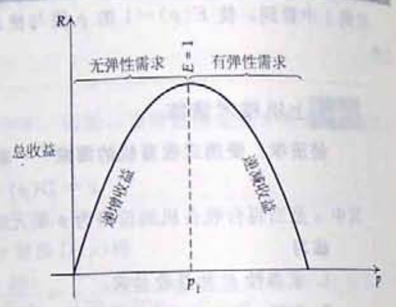
对于价格 p 的一个特定数值：

1. 如果 $E(p)<1$，则需求是无弹性的(inelastic)．价格的增长将会导致收益的增长．如果需求是无弹性的，则收益是递增的.

2. 如果 $E(p)=1$，则需求有一个单位弹性(unit elasticity)．当收益最大时，需求有一个单位弹性.

3. 如果 $E(p)>1$，则需求是弹性的(elastic)．价格的增长将会导致收益的减少．如果需求是弹性的，则收益是递减的.





总之，假设例1中每盒录像带出租价格提高而总收益增加，则说需求是无弹性的．如果总收益减少，则说需求是有弹性的．下表中列出了美国经济的一些价格弹性.

美国经济的价格弹性

工业	弹性	工业	弹性
弹性需求		石油	0.91
金属	1.52	化学药品	0.89
电机工程产品	1.39	饮料（所有类型）	0.78
机械工程产品	1.30	烟草	0.61
家具	1.26	食物	0.58
机动车辆	1.14	银行和保险服务	0.56
证券工程产品	1.10	房地产服务	0.55
专业服务	1.09	服装	0.49
运输服务	1.03	农业和渔业产品	0.42
无弹性需求		书、杂志和报纸	0.34
煤气、电和水	0.92	煤	0.32

资料来源：Ahsan Mansur and John Whalley, "Numerical specification of applied general equilibrium models: Estimation, calibration, and data." In H. E. Scarf and J. B. Shoven (eds.), *Applied General Equilibrium Analysis*. (New York: Cambridge University Press, 1984), p. 109.

353

习题 4.6

对于1～12题中的需求函数，求解下列问题.

a)求弹性表达式.

b)求所给价格的弹性．确定该需求是有弹性的还是无弹性的.

c)求使总收益最大的 p 的值.

1. $x=D(p)=400-p$；　$p=125$ 美元
2. $x=D(p)=500-p$；　$p=38$ 美元
3. $x=D(p)=200-4p$；　$p=46$ 美元
4. $x=D(p)=500-2p$；　$p=57$ 美元
5. $x=D(p)=\frac{400}{p}$；　$p=50$ 美元
6. $x=D(p)=\frac{3\,000}{p}$；　$p=60$ 美元
7. $x=D(p)=\sqrt{600-p}$；　$p=100$ 美元
8. $x=D(p)=\sqrt{300-p}$；　$p=250$ 美元
9. $x=D(p)=100e^{-0.25p}$；　$p=10$ 美元
10. $x=D(p)=200e^{-0.05p}$；　$p=80$ 美元
11. $x=D(p)=\frac{100}{(p+3)^2}$；　$p=1$ 美元
12. $x=D(p)=\frac{500}{(2p+12)^2}$；　$p=8$ 美元

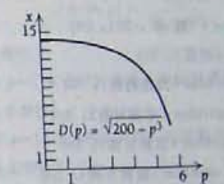
应用

商业与经济

13. *巧克力饼的需求.* 一家面包店设计出所出售的巧克力饼的需求函数，并把它表示成
$$x=D(p)=967-25p,$$
其中 x 是以每个饼 p 美分的价格出售时的销售数量.
a)求弹性.
b)价格是多少时需求弹性等于1?
c)价格是多少时需求是有弹性的?
d)价格是多少时需求是无弹性的?
e)价格是多少时收益最大?
f)当每个饼的价格为20美分时，价格的小幅度增长将会导致总收益增加还是减少?

14. *石油的需求.* 假设你被石油输出国组织雇用为世界石油需求的经济顾问．需求函数是
$$x=D(p)=63\,000+50p-25p^2,\quad 0\leqslant p\leqslant 50,$$
其中 x 是价格为每桶 p 美元时每天售出的数量，单位是百万桶.
a)求弹性.
b)求价格为每桶10美元时的弹性，此时需求是有弹性的还是无弹性的?
c)求价格为每桶20美元时的弹性，此时需求是有弹性的还是无弹性的?
d)求价格为每桶30美元时的弹性，此时需求是有弹性的还是无弹性的?
e)价格是多少时收益最大?
f)在以收益最大时的价格销售时售出的石油数量是多少? 检查目前的世界石油价格，与你的答案相比较.
g)当每桶价格为30美元时，价格的小幅度增长将会导致总收益增加还是减少?

15. *电子游戏的需求.* 一个计算机软件商店确定出一种新的电子游戏的需求函数为
$$x=D(p)=\sqrt{200-p^3},$$
其中 x 是当每个游戏的价格为 p 美元时每天卖出的数量.

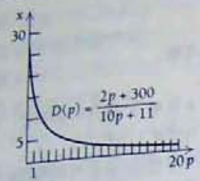


a)求弹性.
b)求当每个游戏的价格是 $p=3$ 美元时的弹性.
c)当 $p=3$ 美元时，价格的小幅度增长将会导致总收益增加还是减少?

16. *番茄苗的需求.* 一家苗圃确定出初夏期间对于具有一定大小的番茄苗的需求函数为
$$x=D(p)=\frac{2p+300}{10p+11},$$
其中 x 是当每株的价格是 p 美元时卖出的株数.
a)求弹性.
b)求当每株的价格 $p=3$ 美元时的弹性.
c)当 $p=3$ 美元时，价格的小幅度增长将会导致总收益增加还是减少?

354～355

2007/08/16



综合题

17. 经济：定常弹性曲线.

a)求需求函数

$$x = D(p) = \frac{k}{p^n}$$

的弹性，其中 k 是一个正的常数，n 是一个大于 0 的整数.

b)弹性的值依赖于单价吗？

c)总收益有最大值吗？何时总收益最大？

18. 经济：指数需求曲线.

a)求需求函数

$$x = D(p) = Ae^{-kp}$$

的弹性，其中 A 和 k 都是正的常数.

b)弹性的值依赖于单价吗？

c)总收益有最大值吗？此时 p 的值是多少？

19. 令

$$L(p) = \ln D(p).$$

用 $L'(p)$ 表示弹性.

*20. 用你自己的语言叙述弹性概念和它在经济上的用途. 到图书馆查询或咨询经济学家，了解这个概念最初是何时提出的，以及是怎样提出的.

*21. 说明一种产品的需求弹性如何受它的有效代用品的影响.

概要与复习

关键术语

Exponential function (指数函数)，287
Base (底)，287
The number e (数 e)，291，292
Logarithm (对数)，301
Logarithmic base (对数的底)，301
Common logarithm (常用对数)，304
Natural logarithm (自然对数)，305
Exponential equation (指数方程)，306
Exponential growth (指数增长)，319
Exponential growth rate (指数增长率)，319
Interest compounded continuously (永续复利)，319
Doubling time (倍增时间)，320
Models of limited growth (有限增长模型)，326
Exponential decay (指数衰减)，333
Half-life (半衰期)，334
Decay rate (衰减率)，334
Carbon dating (碳定年代法)，335
Present value (现值)，337
Newton's Law of Cooling (牛顿冷却定律)，337
Elasticity of demand (需求弹性)，351
Elastic demand (有弹性需求)，353
Inelastic demand (无弹性需求)，353
Unit elasticity (单位弹性)，353

复习题

这些复习题是为测验准备的，它们也可以用作不限时间的练习测验. 答案在书后，答案中还包括方括号内的参考章节. 它告诉你，如果你的答案不正确，应该再学习哪个章节.

356

求下列函数的导数.

1. $y=\ln x$
2. $y=e^x$
3. $y=\ln(x^2+5)$
4. $y=e^{2\sqrt{x}}$
5. $f(x)=\ln\sqrt{x}$
6. $f(x)=x^4e^{3x}$
7. $f(x)=\frac{\ln x}{x^3}$
8. $f(x)=e^{x^2}\cdot\ln 4x$
9. $f(x)=e^{4x}-\ln\frac{x}{4}$
10. $g(x)=x^3-8\ln x$
11. $y=\frac{\ln e^x}{e^x}$

已知 $\log_a 2=1.8301$ 和 $\log_a 7=5.0999$，求下列各对数值.

12. $\log_a 14$
13. $\log_a \frac{2}{7}$
14. $\log_a 28$
15. $\log_a 3.5$
16. $\log_a \sqrt{7}$
17. $\log_a \frac{1}{4}$

18. 求满足 $dQ/dt=kQ$ 的函数. 利用 Q_0 给出答案.

19. 生命科学：群体增长. 新兴城市的人口在 16 年增长了一倍. 城市的增长率是多少？四舍五入到百分比的十分之一位.

20. 商业：永续复利. 假设在储蓄贷款协会存入 8 300美元，按 6.8%的永续复利计算，多长时间 8 300 美元将翻一番？四舍五入到十分之一年.

21. 商业：牛排午餐的价格. 牛排午餐的平均价格 C，1962 年是 4.65 美元，1986 年是 15.81 美元. 假设采用指数增长模型.

a)求指数增长率，并写出方程.

b)到 2000 年和 2007 年这种午餐的价格各是多少？

22. 商业：特许经营店的增长. 一家服装公司正在美国和加拿大各处出售特许经营权. 估计特许经营店的数量 N 以每年 12%的速度增加，即

$$\frac{dN}{dt} = 0.12N,$$

其中 t 是时间，单位是年.

a)假设 1998 年($t=0$)特许经营店的数量是 60，求满足方程的函数.

b)到 2004 年特许经营店将有多少？

c)多少年之后特许经营店达到 120 个？四舍五入到十分之一年.

23. 生命科学：衰减率. 某种放射性同位素的衰减率是每年 13%. 它的半衰期是多少？四舍五入到十分之一年.

24. 生命科学：半衰期. 氡-222 的半衰期是 3.8 天. 它的衰减率是多少？四舍五入到百分比的十分之一位.

25. 生命科学：衰减率. 某种放射性同位素的衰减率是每天 7%，即

$$\frac{dA}{dt} = -0.07A,$$

其中 A 是在 t(天)时元素的数量.

a)如果 $t=0$ 时元素的数量是 800 克，求满足方程的函数.

b)20 天之后，800 克元素还剩下多少？四舍五入到克.

c)多长时间之后只剩下原来数量的一半？

26. 社会科学：赫尔学习模型. t 次学习后熟练掌握某个装配线工作的概率 p 为

$$p(t) = 1 - e^{-0.7t}.$$

a)学习 1 次，2 次，5 次，10 次，14 次后能熟练掌握装配线工作的概率各是多少？

b)求变化率 $p'(t)$.

*c)解释 $p'(t)$的意义.

d)描绘函数的图形.

27. 商业：现值. 按 8.4% 的永续复利计算，求 1 000 000美元的现值 40 年后得到的结存.

求下列函数的导数.

28. $y=3^x$

29. $f(x)=\log_{15} x$

30. 经济：需求弹性. 考虑需求函数

$$x = D(p) = \frac{600}{(p+4)^2}.$$

a)求弹性.

b)求 $p=1$ 美元时的弹性，此时需求是有弹性还是无弹性？

c)求 $p=12$ 美元时的弹性，此时需求是有弹性还是无弹性？

d)当价格是 $p=12$ 美元时，价格的小幅度增长将会导致总收益增加还是减少？

e)求使总收益最大时的 p 的值.

综合题

31. 求导：$y=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}$.

32. 求 $f(x)=x^4\ln 4x$ 的最小值.

357

上机技术演练

33. 作图：$f(x)=\frac{e^{1/x}}{(1+e^{1/x})^2}$.

34. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x}}{(1+e^{1/x})^2}$.

2007/08/16

35. 商业：因特网上购物．各种消费品的在线（因特网）销售正在以指数率增长．表中的数据显示的是销售额，单位是 10 亿美元．

a)用绘图器中的 **REGRESSION** 选项求一个指数函数 $y=a\cdot b^t$ 与表中数据拟合．然后将其变换成以 e 为底的指数函数，其中 t 是 1996 年之后的年数．再确定指数增长率．

b)估计 2010 年，2020 年的网上销售额．

c)多长时间后网上销售额能达到 400 亿美元？

d)网上销售额的倍增时间是多少？

1996 年之后的年数 t	网上销售额(10 亿美元)
0	0.71
1	2.6
2	5.8
3	9.9
4	15.6

资料来源：Jupiter Communications

测验

求导数．

1. $y=2e^{3x}$　　2. $y=\ln x$

3. $f(x)=e^{-x^2}$　　4. $f(x)=\ln \frac{x}{7}$

5. $f(x)=e^x-5x^3$　　6. $f(x)=3e^x\ln x$

7. $y=\ln(e^x-x^3)$　　8. $y=\frac{\ln x}{e^x}$

已知 $\log_b 2=0.2560$ 和 $\log_b 9=0.8114$，求下列各对数值．

9. $\log_b 18$　　10. $\log_b 4.5$　　11. $\log_b 3$

12. 求满足 $dM/dt=kM$ 的函数．用 M_0 给出答案．

13. 某种细菌的倍增时间是 3 小时．它的增长率是多少？四舍五入到百分比的十分之一位．

14. 商业：永续复利．以年利率为 6.931% 的永续复利投资，其倍增时间是多少？四舍五入到年．

15. 商业：牛奶的价格．1941 年 1 加仑牛奶的价格 C 是 0.54 美元，1985 年是 2.31 美元．假设其遵循指数增长模型．

a)求指数增长率，并写出方程．

b)求 2000 年和 2010 年 1 加仑牛奶的价格．

16. 生命科学：药物剂量．一种药物被注入患者的体内．体内的药物含量以每小时 10% 的速度减少，即

$$\frac{dA}{dt}=-0.1A.$$

其中 A 为体内的药物含量，t 为时间，单位是小时．

a)注射 3 立方厘米(cc)的剂量．假设 $A_0=3$，$k=0.1$，求满足方程的函数．

b)3cc 的原始剂量在 10 个小时之后还残存多少？

c)多长时间之后残存的剂量只是原来剂量的一半？

17. 生命科学：衰减率．锫的衰减率是每天 1.1%，它的半衰期是多少？

18. 生命科学：半衰期．碲的半衰期是 1 000 000 年．它的衰减率是多少？四舍五入到百分比的第 6 位小数．

19. 商业：广告效应．一家公司在一个城市试验性地介绍一种新产品．公司在电视上发布产品广告，广告播放 t 次后购买产品者所占的百分比 P 满足函数

$$P(t)=\frac{100\%}{1+24e^{-0.28t}}.$$

a)没有发布广告时($t=0$)购买产品者的百分比是多少？

b)广告发布 1 次，5 次，10 次，15 次，20 次，30 次，35 次后购买产品者所占的百分比各是多少？

c)求变化率 $P'(t)$．

*d)解释 $P'(t)$ 的意义．

e)描绘函数的图形．

20. 商业：现值．按 8.6% 的永续复利计算，求 80 000 美元的现值 12 年后得到的结存．

求导数．

21. $f(x)=20^x$

22. $y=\log_{20} x$

23. 经济：需求弹性．考虑需求函数

$$x=D(p)=400e^{-0.2p}.$$

a)求弹性．

b)求 $p=3$ 美元时的弹性，此时需求是有弹性还是无弹性？

c)求 $p=18$ 美元时的弹性，此时需求是有弹性还是无弹性？

d)当价格是 $p=3$ 美元时，价格的小幅度增长将会导致总收益增加还是减少？

e)求使总收益最大时的 p 的值．

综合题

24. 求导数：$y=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$．

25. 求 $f(x)=x^4e^{-x}$ 在[0，10]上的极大值和极小值．

上机技术演练

26. 作 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的图形．

27. 求 $\lim\limits_{x\to 0}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$．

28. 商业：电视商业广告的平均价格．在过去几年超级杯赛期间 30 秒电视商业广告的价格按指数增长．下表中的数据给出了 1990 年之后的价格．

1990 年之后的年数 t	价格(美元)
1	800 000
3	850 000
4	900 000
5	1 000 000
8	1 300 000

资料来源：National Football League

a)用绘图器中的 **REGRESSION** 选项求一个指数函数 $y=a\cdot b^t$ 与表中数据拟合．然后将其变换成以 e 为底的指数函数，其中 t 是 1990 年之后的年数．

b)估计 2000 年，2020 年超级杯赛期间电视商业广告的价格．

c)多长时间后价格是 10 亿美元？

d)超级杯赛期间电视商业广告的价格的倍增时间是多少？

358/359

上机技术的深入应用

科幻影片的票房收入

在 4.3 节的例 8 中，我们用逻辑斯谛增长方程预测电影《泰坦尼克号》在美国的票房收入．现在来考虑一些其他电影．

电影收入：《冲锋陷阵》

星期 1=2000 年 9 月 29 日

放映星期 t	营业收入 G (本周，百万美元)	总收入 R (百万美元)
1	26.65	26.65
2	24.50	51.15
3	16.29	67.44
4	12.30	79.74
5	10.04	89.78
6	8.84	98.62
7	6.13	104.75
8	3.53	108.28
9	2.31	110.59

资料来源：www.boxofficereport.com

2007/08/16



练习

1. 在绘图器上作出所给各数据点(t, R)的散点图. 它能用逻辑斯谛方程去拟合吗？请予以解释.

2. 使用绘图器中的 **REGRESSION** 选项求一个逻辑斯谛函数

$$R(t)=\frac{c}{1+ae^{-bt}}$$

与这组数据拟合.

3. 求变化率$R'(t)$，并解释它的意义. 求$\lim_{t\to\infty}R'(t)$，并解释它的意义.

4. 另外作出所给各数据点(t, G)的散点图. 考虑你的绘图器上可以用作回归的每个函数，从中选择你认为最佳的一个函数与该组数据拟合，并说明为什么选择它. 求它的定义域.

5. 通常，电影发行商要等到该电影在美国的每周票房收入变成0之后才开始制成录像带销售. 使用第4题中求出的函数预测发行商何时开始销售录像带. 实际上，你所等待的时间要比预测的开始销售时间长，为什么？

360

现在考虑第二个电影.

电影收入：《男人百分百》

星期 1=2000 年 12 月 15 日

放映星期 t	营业收入 G（本周，百万美元）	总收入 R（百万美元）
1	48.57	48.57
2	40.78	89.35
3	32.99	122.34
4	19.58	141.92
5	13.47	155.39
6	8.61	164.00
7	5.54	169.54
8	3.98	173.52
9	2.76	176.28

资料来源：www.boxofficereport.com



练习

6. 在绘图器上作出所给各数据点(t, R)的散点图. 它能用逻辑斯谛方程去拟合吗？请加以解释.

7. 使用绘图器中的 **REGRESSION** 选项求一个逻辑斯谛函数

$$R(t)=\frac{c}{1+ae^{-bt}}$$

与这组数据拟合.

8. 求变化率$R'(t)$，并解释它的意义. 求$\lim_{t\to\infty}R'(t)$，并解释它的意义.

9. 另外作出所给各数据点(t, G)的散点图. 考虑你的绘图器上可以用作回归的每个函数，从中选择你认为最佳的一个函数与该组数据拟合，并说明为什么选择它. 求它的定义域.

10. 使用第9题中求出的函数预测发行商何时开始销售录像带.（见第5题.）

现在考虑第三个电影.

电影收入：《怪物史莱克》

星期 1=2001 年 5 月 18 日

放映星期 t	营业收入 G（本周，百万美元）	总收入 R（百万美元）
1	56.54	56.54
2	63.65	120.19
3	39.36	159.55
4	24.80	184.35
5	20.48	204.83
6	15.60	220.43
7	14.12	234.55
8	9.13	243.68
9	5.96	249.64
10	4.10	253.74
11	3.11	256.85

资料来源：www.boxofficereport.com

2007/08/16



361 **练习**

11. 在绘图器上作出所给各数据点(t, R)的散点图．它能用逻辑斯谛方程去拟合吗？请加以解释．

12. 使用绘图器中的 **REGRESSION** 选项求一个逻辑斯谛函数

$$R(t)=\frac{c}{1+ae^{-bt}}$$

与这组数据拟合．

13. 求变化率$R'(t)$，并解释它的意义．求$\lim\limits_{t\to\infty}R'(t)$，并解释它的意义．

14. 另外作出所给各数据点(t, G)的散点图．考虑你的绘图器上可以用作回归的每个函数，从中选择你认为最佳的一个函数与该组数据拟合，并说明为什么选择它．求它的定义域．

15. 使用第14题中求出的函数预测发行商何时开始销售录像带．（见第5题．）

现在考虑第四个电影．

电影收入：《霹雳娇娃》

星期 1=2000 年 11 月 3 日

放映星期 t	营业收入 G（本周，百万美元）	总收入 R（百万美元）
1	50.40	50.40
2	29.50	79.90
3	18.55	98.45
4	11.95	110.40
5	6.22	116.62
6	3.38	120.00

资料来源：www.boxofficereport.com



练习

16. 在绘图器上作出所给各数据点(t, R)的散点图．它能用逻辑斯谛方程去拟合吗？请加以解释．

17. 使用绘图器中的 **REGRESSION** 选项求一个逻辑斯谛函数

$$R(t)=\frac{c}{1+ae^{-bt}}$$

与这组数据拟合．

18. 求变化率$R'(t)$，并解释它的意义．求$\lim\limits_{t\to\infty}R'(t)$，并解释它的意义．

19. 另外作出所给各数据点(t, G)的散点图．考虑你的绘图器上可以用作回归的每个函数，从中选择你认为最佳的一个函数与该组数据拟合，并说明为什么选择它．求它的定义域．

20. 使用第19题中求出的函数预测发行商何时开始销售录像带．（见第5题．）

现在研究与上面所有数据都有关的问题．

练习

21. 逻辑斯谛函数看上去与各数据点(t, R)的所有散点图拟合吗？为什么你认为会这样？ 362

22. 用哪类函数去拟合各数据点(t, G)？说明原因．

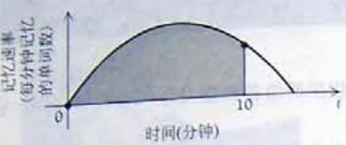
2007/08/16

第5章 积　　分

应用 记忆信息的速率最初随时间递增．但是，在最终达到一个最大速率后就开始递减．在一个特定的记忆实验中，记忆速率为

$$M'(t) = -0.009t^2 + 0.2t,$$

其中 $M'(t)$ 是记忆速率(每分钟记忆的单词数)．那么在前 10 分钟内(从 $t=0$ 到 $t=10$)记住了多少单词？



记住的单词总数为

$$\underbrace{\int_0^{10}(-0.009t^2+0.2t)\,dt.}$$

这是一个积分．

这个表达式也给出了在区间[0，10]上 $M'(t)$ 的图形下方的面积．

这个问题出现在习题 5.3 的 38 题中．

引言 假如我们要作微分的逆运算，也就是求一个函数使其导数是一个已知函数，这一过程称为**反微分**(antidifferentiation)或**积分**(integration)．它是本章的主要课题，也是微积分的第二个部分，第一个部分是微分．我们将看到，利用积分可以求闭区间上曲线下的面积、求一个区间上一定数量的累积，以及计算函数的平均值．

363 本章首先研究积分的意义，然后学习一些积分的方法．

5.1 积分

要点

- 求不定积分和原函数．
- 解含有原函数的应用问题．

在第 2、3 和 4 章中，研究了导数的某些解释，把其中的一些罗列如下．

函数	导数	函数	导数
距离	速度	成本	边际成本
收入	边际收入	人口	人口的增长率

对于人口，我们实际上是先考虑它的导数，然后才考虑函数．数学的许多应用都涉及微分的逆，称其为反微分．例如，若已知一个特定问题的边际收益函数，则可用反微分求总收益函数．

原函数

假设 y 是 x 的函数，且其导数是常数 8．能求出 y 吗？容易看出，$8x$ 就是一个这样的函数，即 $8x$ 是一个导数为 8 的函数．是否还有其他导数是 8 的函数呢？事实上，有许多．这里给出一些例子：

$$8x+3,\quad 8x-10,\quad 8x+7.4,\quad 8x+\sqrt{2}.$$

所有这些函数都是 $8x$ 加上某个常数．除了形如 $8x+C$ 的函数以外，没有其他函数以 8 为导数．换言之，任何两个导数是 8 的函数仅相差一个常数．一般地，任何两个具有相同导数的函数都只相差一个常数．

定理 1 如果在一个区间上两个函数 F 和 G 具有相同的导数，则

$$F(x) = G(x) + C,$$

其中 C 是一个常数．

微分的逆是反微分，反微分的结果称为**原函数**(antiderivative)．前面，我们找出了函数 8 的几个原函数，它们都是 $8x$ 加上某个常数．

例 1 反微分 x^2(即求 x^2 的原函数)．

解 它的一个原函数是 $x^3/3$．所有其他的原函数都与此相差一个常数，因此，可表示为 364

$$\frac{x^3}{3}+C.$$

为了证明这个结果，求 $x^3/3+C$ 的导数：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+C\right)=3\left(\frac{x^2}{3}\right)=x^2.$$

■

因此，$x^3/3+C$ 是 x^2 的原函数．

例 1 的解是 x^2 的原函数的一般形式．

积分与积分运算

反微分的过程常称为**积分运算**(integration)．为了表示 x^2 的原函数是 $x^3/3+C$，我们记

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+C. \tag{1}$$

值得注意的是，

$$\int f(x)\,dx$$

是一个符号体系，从现在开始我们将用其表示函数 $f(x)$ 的原函数．更一般地，我们写成

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \tag{2}$$

其中 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的原函数的一般形式．式(2)读作"$f(x)$ 的不定积分是 $F(x)+C$"．常数 C 称为积分常数，可以取任何固定的值；因此使用"不定"这个词．

2007/08/16

符号体系$\int f(x)\mathrm{d}x$ 是由莱布尼茨(Leibniz) 给出的，称为积分，或更确切地称为不定积分(indefinite integral). 符号$\int$ 称为积分号. 式(2) 的左边通常读作"$f(x)$, $\mathrm{d}x$ 的积分"，或更简单地读作"$f(x)$ 的积分". 在这个意义上，$f(x)$ 称为被积函数. 从现在起，认为"$\mathrm{d}x$" 指明积分中所涉及的变量是 x. 后面还有关于 $\mathrm{d}x$ 的更多解释.

例 2 计算：$\int x^9\mathrm{d}x$.

解

$$\int x^9\mathrm{d}x = \frac{x^{10}}{10} + C.$$

左边的符号读作"x^9, $\mathrm{d}x$ 的积分."（读的时候"$\mathrm{d}x$"经常被省略.）此时，被积函数是 x^9. 常数 C 称为积分常数. ■

值得注意的是，

$$\int e^x\mathrm{d}x \neq \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$$

365 **例 3** 计算：$\int 5e^{4x}\mathrm{d}x$.

解

$$\int 5e^{4x}\mathrm{d}x = \frac{5}{4}e^{4x} + C.$$

我们可用微分来检查这个原函数. $\frac{5}{4}e^{4x}+C$ 的导数是 $4\left(\frac{5}{4}\right)e^{4x}$，或 $5e^{4x}$，这正是被积函数. ■

求积分(或反微分)，需要利用微分公式. 实际上，是反向读取微分公式. 下面把一些微分公式反向叙述成积分公式. 对于每个公式，都可用微分其右边来验证，其结果都是它的被积函数.

定理 2 基本积分公式

1. $\int k\mathrm{d}x = kx + C$（$k$ 是常数）.
2. $\int x^r\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$，当 $r \neq -1$ 时.
   （求 x 的非 -1 次幂的积分是将其幂增加 1 再除以增加后的幂数.）
3. $\int x^{-1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C$，$x > 0$.
   $\int x^{-1}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$，$x < 0$.
   （通常都假设 $x > 0$.）
4. $\int be^{ax}\mathrm{d}x = \frac{b}{a}e^{ax} + C$.

下述法则与上面的公式相结合使我们能求许多积分. 它们源自两个熟悉的微分法则.

定理 3

法则 A：$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$.

（常数与函数之积的积分等于常数与这个函数积分之积.）

法则 B：$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$.

（和或差的积分等于积分的和或差.）

例 4 366

$$\begin{aligned}\int(5x+4x^3)\mathrm{d}x &= \int 5x\mathrm{d}x + \int 4x^3\mathrm{d}x \quad \text{法则 B}\\ &= 5\int x\mathrm{d}x + 4\int x^3\mathrm{d}x \quad \text{法则 A}\end{aligned}$$

于是

$$\int(5x+4x^3)\mathrm{d}x = 5\cdot\frac{x^2}{2} + 4\cdot\frac{x^4}{4} + C = \frac{5}{2}x^2 + x^4 + C.$$

不要忘掉积分常数. 不必写两个积分常数. 如果有两个积分常数，则可以把 C 视为它们的和.

我们可以作如下检验：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{5}{2}x^2 + x^4 + C\right) = 2\cdot\frac{5}{2}\cdot x + 4x^3 = 5x + 4x^3.$$ ■

我们总可以用微分检查积分.

例 5 计算积分，再用微分法来检验.

$$\begin{aligned}\int(7e^{6x}-\sqrt{x})\mathrm{d}x &= \int 7e^{6x}\mathrm{d}x - \int\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int 7e^{6x}\mathrm{d}x - \int x^{1/2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{7}{6}e^{6x} - \frac{x^{(1/2)+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{7}{6}e^{6x} - \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \frac{7}{6}e^{6x} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C.\end{aligned}$$

为了检验此结果，我们求导.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{7}{6}e^{6x} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C\right) = 6\cdot\left(\frac{7}{6}e^{6x}\right) - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{1/2} + 0 = 7e^{6x} - \sqrt{x}.$$ ■

例 6 计算积分，再用微分法来检验.

$$\begin{aligned}\int\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x &= \int 1\mathrm{d}x - 3\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int x^{-4}\mathrm{d}x\\ &= x - 3\ln x + \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C\\ &= x - 3\ln x - \frac{x^{-3}}{3} + C.\end{aligned}$$ 367

为了检验此结果，我们求导.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x - 3\ln x - \frac{x^{-3}}{3} + C\right) = 1 - 3\cdot\frac{1}{x} - (-3)\cdot\frac{1}{3}x^{-4} + 0 = 1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^4}$$ ■

2007/08/16

再考察原函数

上机技术演练

探索 使用同一个坐标系，作出

$$y=x^4-4x^3$$

和

$$y=x^4-4x^3+7$$

的图形．比较两个图形．在 $x=-1$，$x=0$ 和 $x=1$ 处作出每个图形的切线，并求出每条切线的斜率．比较斜率．然后求出每个函数的导数．比较导数．哪个函数是 $y=4x^3-12x^2$ 的一个原函数？

x^2 的原函数图形是关于不同常数 C 的函数

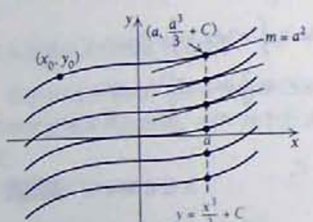
$$y=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C$$

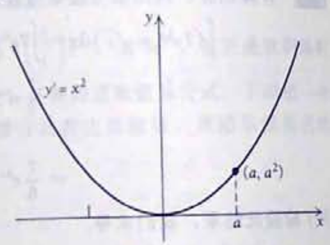
的图形．

正如在下面图形所看到的，x^2 是每个函数的导数．因此，在点

$$\left(a,\frac{a^3}{3}+C\right)$$

的切线斜率是 a^2．曲线 $(x^3/3)+C$ 充满整个平面，对于每个给定的点 (x_0, y_0) 恰有一条曲线通过．





假设要寻找 x^2 的一个原函数，使其在某一点具有一个特定值，例如 $f(-1)=2$．这样的函数只有一个．

例7 求满足

$$f'(x)=x^2$$

和

$$f(-1)=2$$

的函数 f．

解

a)用积分求 $f(x)$：

$$f(x)=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

b)条件 $f(-1)=2$ 使我们可求出 C，

$$f(-1)=\frac{(-1)^3}{3}+C=2,$$ 368

求解 C 得到

$$-\frac{1}{3}+C=2$$

$$C=2+\frac{1}{3}, \text{或} \frac{7}{3}.$$

于是，$f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{7}{3}$． ■

函数常给人们提供更多的信息，例如，在例7中 $f(-1)=2$ 或 $(-1, 2)$．$f(-1)=2$ 称为边界条件或初始条件．有时也采用术语边界值或初始值．

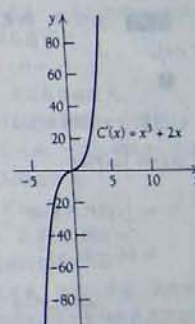
应用

由边际成本确定总成本

例8 商业：由边际成本确定总成本．某公司测定出生产 x 件某种产品的边际成本 C' 为

$$C'(x)=x^3+2x.$$

求总成本函数 C，假设固定成本(生产0件产品的成本)是45美元．边界条件或初始条件是当 $x=0$ 时 $C=45$ 美元，即 $C(0)=45$ 美元．



解

a)用积分求 $C(x)$．为了避免与成本函数 C 相混淆，使用 K 作为积分常数：

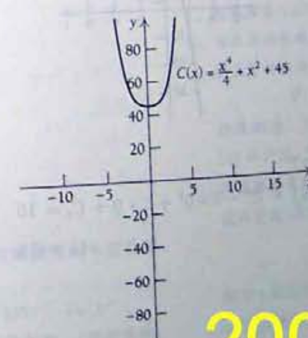
$$C(x)=\int C'(x)\,dx=\int(x^3+2x)\,dx=\frac{x^4}{4}+x^2+K.$$

b)固定成本是45美元，即 $C(0)=45$．用此确定 K 的值：

$$C(0)=\frac{0^4}{4}+0^2+K=45$$

$$K=45.$$

因此，$C(x)=\frac{x^4}{4}+x^2+45$．



■ 369

2007/08/16

由加速度求速度和距离

大家记得，若沿直线运动的物体在时间 t 的位置坐标是 $s(t)$，则

$$s'(t) = v(t) = \text{时间 } t \text{ 的速度},$$
$$v'(t) = a(t) = \text{在时间 } t \text{ 的加速度}.$$

例 9 物理学：距离. 假设 $v(t)=5t^4$，$s(0)=9$. 求 $s(t)$.

解

a)用积分求 $s(t)$：

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int 5t^4\,dt = t^5 + C.$$

b)用边界条件 $s(0)=9$ 确定 C，这个条件是在时间 $t=0$ 时的初始条件或位置：

$$s(0) = 0^5 + C = 9$$
$$C = 9.$$

因此，$s(t)=t^5+9$. ■

例 10 物理学：距离. 假设 $a(t)=12t^2-6$，$v(0)=$初始速度$=5$，$s(0)=$初始位置$=10$. 求 $s(t)$.

解

a)用积分 $a(t)$ 求 $v(t)$：

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int (12t^2-6)\,dt = 4t^3 - 6t + C_1.$$

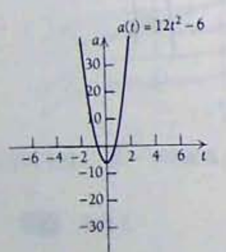
b)使用条件 $v(0)=5$ 求 C_1：

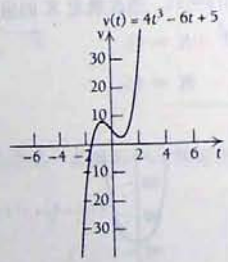
$$v(0) = 4\cdot 0^3 - 6\cdot 0 + C_1 = 5$$
$$C_1 = 5.$$

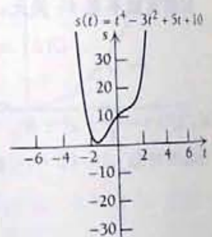
因此，$v(t)=4t^3-6t+5$.

c)用积分 $v(t)$ 求 $s(t)$：

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (4t^3 - 6t + 5)\,dt = t^4 - 3t^2 + 5t + C_2.$$







d)使用条件 $s(0)=10$ 求 C_2：

$$s(0) = 0^4 - 3\cdot 0^2 + 5\cdot 0 + C_2 = 10$$
$$C_2 = 10.$$

370 因此，$s(t)=t^4-3t^2+5t+10$. ■

习题 5.1

计算积分.

1. $\int x^6\,dx$
2. $\int x^7\,dx$
3. $\int 2\,dx$
4. $\int 4\,dx$
5. $\int x^{1/4}\,dx$
6. $\int x^{1/3}\,dx$
7. $\int (x^2+x-1)\,dx$
8. $\int (x^2-x+2)\,dx$
9. $\int (2t^2+5t-3)\,dt$
10. $\int (3t^2-4t+7)\,dt$
11. $\int 5e^{8x}\,dx$
12. $\int 3e^{5x}\,dx$
13. $\int (x^3-x^{8/7})\,dx$
14. $\int (x^4-x^{6/5})\,dx$
15. $\int \frac{1\,000}{x}\,dx$
16. $\int \frac{500}{x}\,dx$
17. $\int \frac{dx}{x^3}\left(\text{或}\int \frac{1}{x^3}\,dx\right)$
18. $\int \frac{dx}{x^2}$
19. $\int \sqrt{x}\,dx$
20. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$
21. $\int \frac{-6}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$
22. $\int \frac{20}{\sqrt[5]{x^4}}\,dx$
23. $\int 8e^{-2x}\,dx$
24. $\int 7e^{-0.25x}\,dx$
25. $\int \left(x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{x} + x^{-4/3}\right)dx$
26. $\int \left(x^4 + \frac{1}{8\sqrt{x}} - \frac{4}{5}x^{-2/5}\right)dx$
27. $\int (3x+2)^2\,dx$（提示：先化简.）
28. $\int (x+4)^2\,dx$

求 f 满足：

29. $f'(x)=x-3$，$f(2)=9$
30. $f'(x)=x-5$，$f(1)=6$
31. $f'(x)=x^2-4$，$f(0)=7$
32. $f'(x)=x^2+1$，$f(0)=8$

应用

商业与经济

信贷市场债务. 国家信贷市场债务的年变化率（以每年 10 亿美元计）可用函数

$$D'(t) = 1\,975 - 1\,190t + 597t^2 - 71.3t^3$$

来建模，其中 t 是自 1994 年以后的年数.（资料来源：Federal Reserve System.）使用上述信息作 33 和 34 题.

33. 已知 $D(0)=17\,198$ 美元，求国家信贷市场债务 $D(t)$.
34. 2000 年国家信贷市场债务是多少？
35. **由边际成本确定总成本.** 一家公司测定生产某种产品 x 件的边际成本 C' 是
$$C'(x) = x^3 - 2x.$$
假设固定成本是 100 美元，求总成本函数 C.
36. **由边际成本确定总成本.** 一家公司测定，生产某种产品 x 件的边际成本 C' 是
$$C'(x) = x^3 - x.$$
假设固定成本是 200 美元，求总成本函数 C.
37. **由边际收益确定总收益.** 一家公司测定，销售某种产品 x 件的边际收益 R' 是
$$R'(x) = x^2 - 3.$$
a)假设 $R(0)=0$，求总收益函数 R.
*b)$R(0)=0$ 的假设的合理性何在？
38. **由边际收益确定总收益.** 一家公司测定，销售某种产品 x 件的边际收益 R' 是
$$R'(x) = x^2 - 1.$$
a)假设 $R(0)=0$，求总收益函数 R.
*b)$R(0)=0$ 的假设的合理性何在？
39. **由边际需求确定需求.** 某公司求得，消费需求量的变化率与价格的关系可用边际需求函数表示为
$$D'(p) = -\frac{4\,000}{p^2}.$$
如果知道，当价格是每件 4 美元时消费者对产品的需求是 1 003 件，求需求函数.
40. **由边际供给确定供给.** 某公司求出卖主的销售数量关于价格的变化率可以用边际供给函数表示为
$$S'(p) = 0.24p^2 + 4p + 10.$$
如果知道，当价格是每件 5 美元时卖主可销售 121 件产品，求供给函数.
41. **机器操作员的效率.** 机器操作员的效率 E（表示成百分比）关于时间 t 的变化率可表示为
$$\frac{dE}{dt} = 30 - 10t,$$
其中 t 是操作员工作的小时数.
已知操作员工作 2 小时后的效率是 72%，

2007/08/16

$E(2)=72$，求 $E(t)$.

b)利用 a)的答案求 3 小时和 5 小时后操作员的效率.

42. 机器操作员的效率. 机器操作员的效率 E(表示成百分比)关于时间 t 的变化率可表示为

$$\frac{dE}{dt}=40-10t,$$

其中 t 是操作员工作的小时数.

其中 t 是操作员工作的小时数. 已知操作员工作 2 小时后的效率是 72%，即

a)已知操作员工作 2 小时后的效率是 72%，即 $E(2)=72$，求 $E(t)$.

b)利用 a)的答案求 4 小时和 8 小时后操作员的效率.



机器操作员的效率随时间变化

生命科学与物理学

求 $s(t)$.

43. $v(t)=3t^2$， $s(0)=4$

44. $v(t)=2t$， $s(0)=10$

求 $v(t)$.

45. $a(t)=4t$， $v(0)=20$

46. $a(t)=6t$， $v(0)=30$

求 $s(t)$.

47. $a(t)=-2t+6$， $v(0)=6$， $s(0)=10$

48. $a(t)=-6t+7$， $v(0)=10$， $s(0)=20$

49. 距离. 对于自由下落的物体，$a(t)=-32$英尺/秒²，$v(0)=$初始速度$=v_0$，$s(0)=$初始高度$=s_0$. 求 $s(t)$ 的依赖于 v_0 和 s_0 的一般表达式.

50. 时间. 一个球从 10 英尺的高度以 80 英尺/秒的初始速度投下，此处 $s(0)=10$，$v(0)=80$. 需要多长时间球到达地面？(见 49 题.)

51. 距离. 一辆汽车在 $\frac{1}{2}$ 分钟内以常加速度将速度由 0 英里/小时增到 60 英里/小时，在这段时间里汽车行驶了多远？

52. 流行性感冒的扩散. 在 2000～2001 年流感流行期的 34 周内，在爱尔兰每 100 000 人中感染流行性感冒的比率可近似地表示为

$$I'(t)=3.389e^{0.1049t},$$

其中 I 是每 100 000 人中已经感染流行性感冒的总人数，t 是时间，以周为单位.（资料来源：Departments of Public Health.）

a)计算 $I(t)$，即在时间 t 内每 100 000 人中已经感染流行性感冒的总人数. 可以假设 $I(0)=0$.

b)在前 27 周内每 100 000 人中感染了流行性感冒的总人数近似为多少？

c)在整个 34 周内每 100 000 人中感染了流行性感冒的总人数近似为多少？

d)在 34 周的最后 7 周内每 100 000 人中感染了流行性感冒的总人数近似为多少？

社会科学

53. 记忆力. 在一个特定的记忆实验中，记忆速率为

$$M'(t)=0.2t-0.003t^2,$$

其中 $M(t)$ 是在 t 分钟内记住的西班牙单词的数目.

a)如果已知 $M(0)=0$，求 $M(t)$.

b)在 8 分钟内记住多少单词？

综合题

求 f.

54. $f'(t)=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}$， $f(4)=0$

55. $f'(t)=t^{\sqrt{3}}$， $f(0)=8$

计算. 使用本节所介绍的法则求下面的各个积分，但是预先要有一些代数知识.

56. $\int (5t+4)^2 dt$

57. $\int (x-1)^2 x^3 dx$

58. $\int (1-t)\sqrt{t}\,dt$

59. $\int \frac{(t+3)^2}{\sqrt{t}}dt$

60. $\int \frac{x^4-6x^2-7}{x^3}dx$

61. $\int (t+1)^3 dt$

62. $\int \frac{1}{\ln 10}\frac{dx}{x}$

63. $\int be^{ax}dx$

64. $\int (3x-5)(2x+1)dx$

65. $\int \sqrt[3]{64x^4}\,dx$

66. $\int \frac{x^2-1}{x+1}dx$

67. $\int \frac{t^3+8}{t+2}dt$

*68. 在一次测验中，一位学生说，"函数 $f(x)=x^2$ 有唯一的积分."请加以讨论.

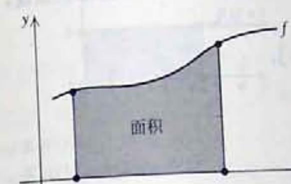
*69. 叙述原函数的图形解释.

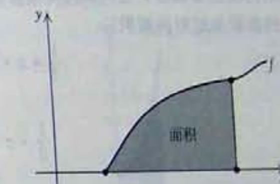
5.2 面积与定积分

要点

- 在已知闭区间上求曲线下的面积.
- 用另外两种方式解释曲线下的面积.
- 计算定积分.

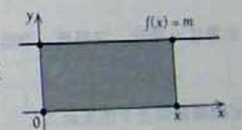
现在用积分求某个区域的面积. 考虑在一个区间上的输出是非负的函数，求在该区间上的函数图形与 x 轴之间的区域的面积，如下图所示. 371～373





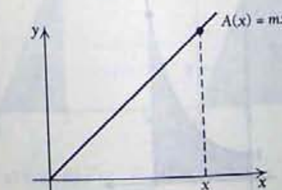
首先考虑从 0 到 x 的区间$[0, x]$上的常值函数 $f(x)=m$.

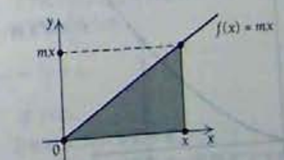
参看右面的图形，它是一个矩形，其面积是底乘高 $x\cdot m$，或 mx. 假如我们让 x 变化，则得到不同面积的矩形. 每个矩形的面积都是 mx. 现在得到一个面积函数：



$$A(x)=mx.$$

它的图形如左下图所示.



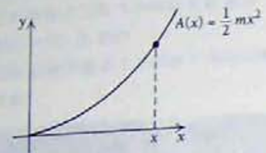


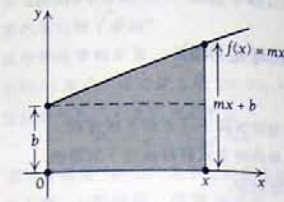
再来考虑如右上图所示的从 0 到 x 的区间$[0, x]$上的线性函数 $f(x)=mx$.

这时作出的图形是三角形，它的面积是底乘高的一半，即$\frac{1}{2}\cdot x\cdot(mx)$，或$\frac{1}{2}mx^2$。如果让$x$变化又得到一个面积函数：

$$A(x)=\frac{1}{2}mx^2.$$

374 其图形如左下图所示.





再考虑如右上图所示的从 0 到 x 的区间$[0, x]$上的线性函数 $f(x)=mx+b$.
这时作出的图形是梯形，它的面积是高乘以平行边线长度之和的一半(或者注意到虚线，它是三角形的面积加矩形的面积)：

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot[b+(mx+b)],$$

或

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot(mx+2b),$$

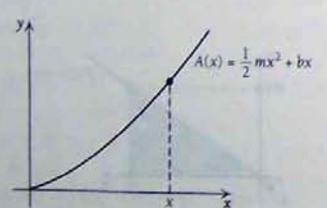
或

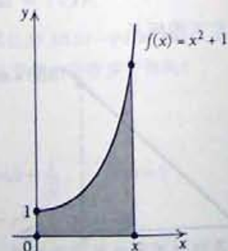
$$\frac{1}{2}mx^2+bx.$$

如果让 x 变化，又得到一个面积函数：

$$A(x)=\frac{1}{2}mx^2+bx.$$

它的图形如左下图所示.





375 现在考虑从 0 到 x 的区间$[0, x]$上的函数 $f(x)=x^2+1$. 所讨论的区域的图形如右上图所示. 这时由于 $f(x)$的图形不是直线，不容易求出面积函数. 我们考察下表中的各个范例.

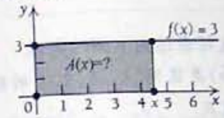
$f(x)$	$A(x)$
$f(x)=3$	$A(x)=3x$
$f(x)=m$	$A(x)=mx$
$f(x)=3x$	$A(x)=\frac{3}{2}x^2$
$f(x)=mx$	$A(x)=\frac{1}{2}mx^2$
$f(x)=mx+b$	$A(x)=\frac{1}{2}mx^2+bx$

你可能已猜测到，面积函数 $A(x)$是 $f(x)$的一个原函数. 在下面的探索练习中，你可以作进一步地考察.

探索练习

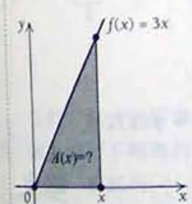
求面积

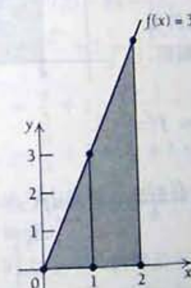
1. 研究常值函数 $f(x)=3$.



a)求 $A(x)$.
b)求 $A(1)$，$A(2)$和 $A(5)$.
c)作 $A(x)$的图形.
d)$f(x)$和 $A(x)$有何关系？

2. 研究函数 $f(x)=3x$.





a)求 $A(x)$.
b)求 $A(1)$，$A(2)$和 $A(3.5)$.
c)作 $A(x)$的图形.
d)$f(x)$和 $A(x)$有何关系？

3. 在区间$[0, 2]$上，$f(x)=x^2+1$ 的图形下面的区域如下图所示.





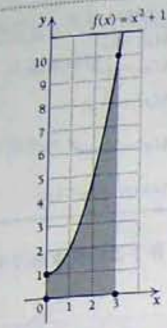
a)在一张薄纸上复制阴影区域.
b)以各种方式剪碎这个阴影区域，为的是填满格子中的小正方形. 对其总面积作出一个估算.
c)利用原函数

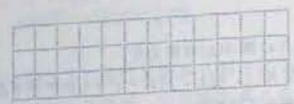
$$F(x)=\frac{x^3}{3}+x,$$

求 $F(2)$.
d)比较 b)和 c)中的答案.

4. 对于下面图形的阴影区域，利用其下方的格子重复练习 3 中的 a)和 b). 376

2007/08/16





c)利用原函数

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+x$$

求 $F(3)$.

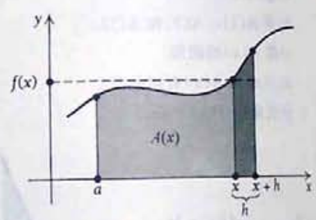
d)比较 b)和 c)中的答案.

关于面积和原函数(或积分)的关系所做的推测是正确的．这可表述为下面的定理．

定理 4　假设 f 是区间$[a, b]$上的非负连续函数，$A(x)$是区间$[a, b]$上 f 的图形与 x 轴之间区域的面积，其中 $x\leqslant b$. 则 $A(x)$是 x 的一个可导函数且

$$A'(x)=f(x).$$

377 该定理所描述的事实如右图所示.



根据导数的定义，$A(x)$的导数是

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}.$$

从图形上看，$A(x+h)-A(x)$是一小条垂直区域的面积．这小条的面积接近于底为 h 高为$f(x)$的矩形面积，特别是对于小的 h 值更是如此．于是有

$$A(x+h)-A(x)\approx f(x)\cdot h.$$

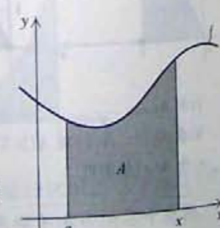
现在

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0}f(x)=f(x),$$

因为 $f(x)$不含 h，所以

$$A(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

其中 $F(x)$是 f 的任意一个原函数.



定积分

现在来了解如何使用定理 4 的重要结论去求从 a 到 x 的非负连续函数 f 的图形下的面积．我们知道，面积函数 A 是一个原函数.

设 F 是 f 的任意一个其他的原函数．则

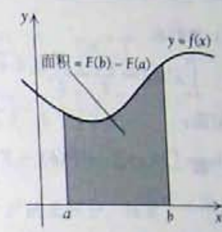
$$A(x)-A(a)=F(x)-F(a).$$

为了说明这一点，由 5.1 节可知，因为 A 和 F 都是 f 的原函数，所以 A 和 F 仅相差一个常数，即 $A(x)=F(x)+C$. 因此，

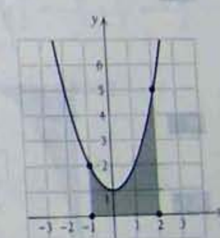
$$A(x)-A(a)=[F(x)+C]-[F(a)+C]=F(x)-F(a).$$

于是，对于 f 的任何原函数差 $A(x)-A(a)$都有相同的值. 378

欲求区间$[a, b]$上的非负连续函数 f 图形下的面积：
1. 求 $f(x)$的任意一个原函数 $F(x)$．(最简单的是积分常数是 0 的那一个．)
2. 代入 b 和 a，求差 $F(b)-F(a)$．结果就是区间$[a, b]$上图形下的面积.



例 1　求区间$[-1, 2]$上 $y=x^2+1$ 的图形下面的面积.



解　在此情况下，$f(x)=x^2+1$，$a=-1$，$b=2$.

1)求 $f(x)$的任意一个原函数 $F(x)$．选择一个最简单的：

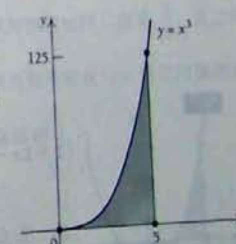
$$F(x)=\frac{x^3}{3}+x.$$

2)代入 2 和 -1，求差 $F(2)-F(-1)$：

$$\begin{aligned}F(2)-F(-1)&=\left[\frac{2^3}{3}+2\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}+(-1)\right]\\&=\frac{8}{3}+2-\left[\frac{-1}{3}-1\right]\\&=\frac{8}{3}+2+\frac{1}{3}+1=6.\end{aligned}$$

我们可像前面探索练习中那样，通过计算正方形或正方形的一部分进行不精确的验证. ■

例 2　求区间$[0, 5]$上 $y=x^3$ 的图形下面的面积.



解　在此情况下，$f(x)=x^3$，$a=0$，$b=5$.

1)求 $f(x)$的任意一个原函数 $F(x)$．选择一个最简单的：

$$F(x)=\frac{x^4}{4}.$$

2)代入 5 和 0，求差 $F(5)-F(0)$：

2007/08/16

$$F(5)-F(0)=\frac{5^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{625}{4}=156\frac{1}{4}.$$ ■

无论 f 是否非负，对于它的一切原函数，差 $F(b)-F(a)$ 有相同的值．称其为由 a 到 b 的 f 的**定积分**(definite integral)．

379 **定义** 假设 f 是区间 $[a, b]$ 上的任意连续函数，F 是 f 的任意一个原函数．由 a 到 b 的 f 的**定积分**(definite integral)是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

计算定积分的值称为*积分*．数 a 和 b 称为**积分限**(limit of integration)．

例 3 计算：$\int_a^b x^2\mathrm{d}x$．

解 利用原函数 $F(x)=x^3/3$，我们有

$$\int_a^b x^2\mathrm{d}x=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}.$$ ■

为了简便起见，使用一个中介记法：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a).$$

现在计算一些定积分．

例 4

$$\int_{-1}^2 x^2\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2=\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}$$
$$=\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3.$$ ■

例 5

$$\int_0^3 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x]_0^3=\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}^3-1.$$ ■

例 6

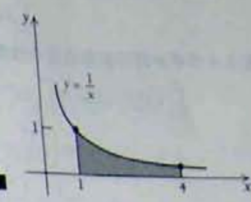
$$\int_1^4 (x^2-x)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^4=\left(\frac{4^3}{3}-\frac{4^2}{2}\right)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{64}{3}-\frac{16}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$
380
$$=\frac{64}{3}-8-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=13\frac{1}{2}.$$ ■

例 7

$$\int_1^e\left(1+2x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=[x+x^2-\ln x]_1^e$$
$$=(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2-\ln\mathrm{e})-(1+1^2-\ln 1)$$
$$=(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2-1)-(1+1-0)$$
$$=\mathrm{e}+\mathrm{e}^2-1-1-1$$
$$=\mathrm{e}+\mathrm{e}^2-3.$$ ■

再讨论面积

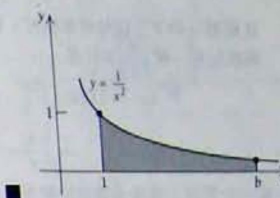
当计算非负连续函数的定积分时，就得到一个区间上的图形下的面积．



例 8 求区间 $[1, 4]$ 上 $y=1/x$ 下的面积．

解

$$\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{x}=[\ln x]_1^4=\ln 4-\ln 1$$
$$=\ln 4\approx 1.3863.$$ ■



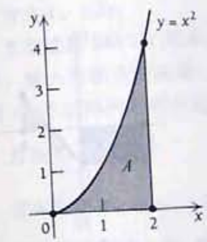
例 9 求区间 $[1, b]$ 上 $y=1/x^2$ 下的面积．

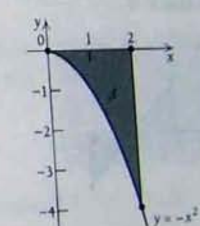
解

$$\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\int_1^b x^{-2}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^b=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^b$$
$$=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\left(-\frac{1}{b}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{b}$$ ■

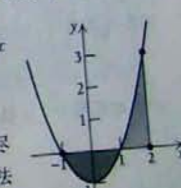
现在比较函数 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的定积分．注意，一个是非负的，一个是非正的． 381

$$\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{8}{3}\qquad\int_0^2 -x^2\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=-\frac{2^3}{3}+\frac{0^3}{3}=-\frac{8}{3}$$





函数 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的图形关于 x 轴互为镜像，因此阴影区域的面积相同，都是 $\frac{8}{3}$．第二种情形的计算过程给出的是 $-\frac{8}{3}$．这说明对于负值函数，定积分给出的是曲线与 x 轴之间面积的相反数或加法逆．总之，区间 $[0, 2]$ 上 $-x^2$ 的积分是 $-\frac{8}{3}$，曲线和 x 轴之间的面积是 $\frac{8}{3}$．



现在考虑区间 $[-1, 2]$ 上的函数 x^2-1．它既有正值也有负值．尽管函数值不都是非负的，我们仍将应用上述计算过程．我们用两种方法来计算．

2007/08/16

首先，利用这样一个事实，对于任何 a，b，c，如果 $a<c<b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

在5.4节中将讨论积分的这个性质．我们有

$$\int_{-1}^2(x^2-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(x^2-1)\mathrm{d}x+\int_1^2(x^2-1)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2$$

$$=\left[\left(\frac{1^3}{3}-1\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-(-1)\right)\right]+\left[\left(\frac{2^3}{3}-2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)\right]$$

$$=\left[-\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]=0.$$

382 这说明 x 轴下方区域的面积与 x 轴上方区域的面积是相同的．

现在用另一种方法来计算：

$$\int_{-1}^2(x^2-1)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^2=\left(\frac{2^3}{3}-2\right)-\left[\frac{(-1)^3}{3}-(-1)\right]$$

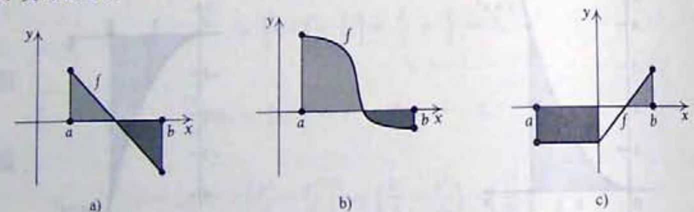
$$=\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{8}{3}-2+\frac{1}{3}-1=0.$$

在一个区间上连续函数的定积分是 x 轴上方面积的和减去 x 轴下方面积的和．

例10 对于下列每个图形，直观上确定

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

是正的、负的还是零．



解

a)在此图形中，x 轴上方与下方有相同的面积．因此，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0.$$

b)在此图形中，x 轴上方的面积多于下方的面积．因此，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

c)在此图形中，x 轴下方的面积多于上方的面积．因此，

383 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<0.$$ ■

例11 计算：$\int_{-1}^2(x^3-3x+1)\mathrm{d}x$．利用面积解释结果．

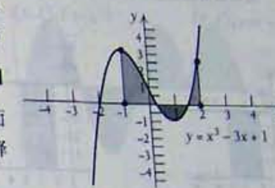
解 我们有

$$\int_{-1}^2(x^3-3x+1)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-1}^2$$

$$=\left(\frac{2^4}{4}-\frac{3}{2}\cdot2^2+2\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{3}{2}\cdot(-1)^2+(-1)\right)$$

$$=\left(\frac{16}{4}-6+2\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-1\right)=0-\left(-2\frac{1}{4}\right)=2\frac{1}{4}.$$

在区间上作出函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 的图形及曲线与 x 轴之间的阴影．轴上方的面积之和减去轴下方的面积等于 $2\frac{1}{4}$． ■



在这一节中，讨论了与面积有关的定积分．在下面各节和第6章中，将会看到定积分概念的许多其他解释和应用．

上机技术演练

近似计算定积分 使用绘图器计算定积分有两种方法．考虑例11的函数 $f(x)=x^3-3x+1$．

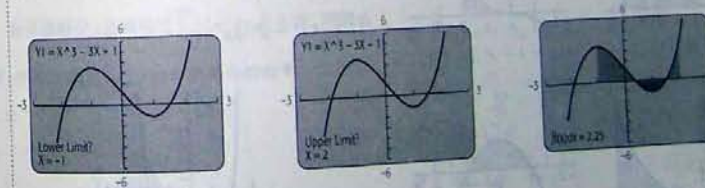
方法1：fnInt

首先选择 **MATH** 菜单中的 **fnInt**(函数积分)选项．然后，键入要积分的函数、变量和区间端点．绘图器返回例11中求得的定积分的值．



方法2：$\int f(x)\mathrm{d}x$

首先作出 $y_1=x^3-3x+1$ 的图形，然后选择 CALC 菜单中的 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 选项并键入积分的下限和上限．绘图器制作阴影面积并返回例11中定积分的值．



384

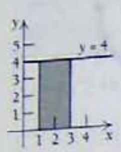
练习 计算定积分.

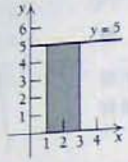
1. $\int_{-1}^{2}(x^2-1)\mathrm{d}x$
2. $\int_{-2}^{2}(x^3-3x+1)\mathrm{d}x$
3. $\int_{1}^{6}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$
4. $\int_{-8}^{2}\frac{4}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x$
5. $\int_{-10}^{10}(0.002x^4-0.3x^2+4x-7)\mathrm{d}x$

习题 5.2

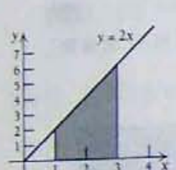
求在指定区间上所给曲线下的面积.

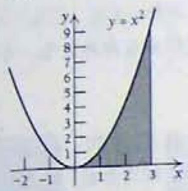
1. $y=4$;[1,3]
2. $y=5$;[1,3]



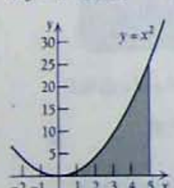


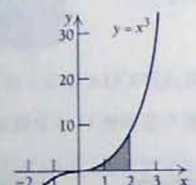
3. $y=2x$;[1,3]
4. $y=x^2$;[0,3]



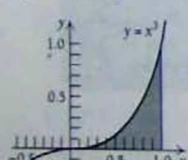


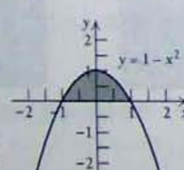
5. $y=x^2$;[0,5]
6. $y=x^3$;[0,2]





7. $y=x^3$;[0,1]
8. $y=1-x^2$;[-1,1]

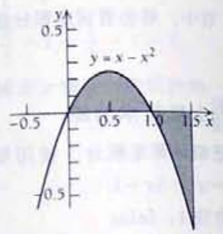




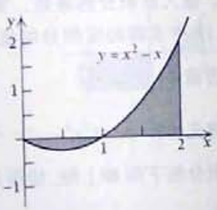
9. $y=4-x^2$;[-2,2]
10. $y=e^x$;[0,2]
11. $y=e^x$;[0,3]
12. $y=\frac{2}{x}$;[1,4]
13. $y=\frac{3}{x}$;[1,6]
14. $y=x^2-4x$;[-4,-2]

计算,然后解释结果.

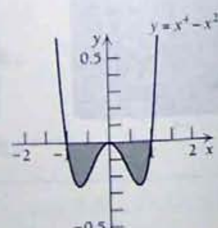
15. $\int_{0}^{1.5}(x-x^2)\mathrm{d}x$



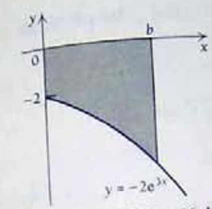
16. $\int_{0}^{2}(x^2-x)\mathrm{d}x$



17. $\int_{-1}^{1}(x^4-x^2)\mathrm{d}x$



18. $\int_{0}^{b}-2e^{3x}\mathrm{d}x$



19 ~ 36. 使用绘图器验证 1 ~ 18 各题的结果.

计算.

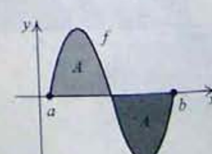
37. $\int_{a}^{b}e^t\mathrm{d}t$
38. $\int_{0}^{a}(ax-x^2)\mathrm{d}x$
39. $\int_{a}^{b}3t^2\mathrm{d}t$
40. $\int_{-5}^{2}4t^3\mathrm{d}t$
41. $\int_{1}^{e}\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$
42. $\int_{1}^{e}\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$
43. $\int_{0}^{2}\sqrt{2x}\mathrm{d}x$(提示:先化简.)
44. $\int_{0}^{27}\sqrt{3x}\mathrm{d}x$
45. $\int_{-4}^{1}\frac{10}{17}t^3\mathrm{d}t$
46. $\int_{0}^{1}\frac{12}{13}t^2\mathrm{d}t$

求在指定区间上所给图形下的面积.

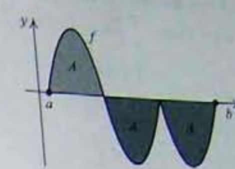
47. $y=x^3$;[0,2]
48. $y=x^4$;[0,1]
49. $y=x^2+x+1$;[2,3]
50. $y=2-x-x^2$;[-2,1]
51. $y=5-x^2$;[-1,2]
52. $y=e^x$;[-2,3]
53. $y=e^x$;[-1,5]
54. $y=2x+\frac{1}{x^2}$;[1,4]

在每道题中,直观确定 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是正的、负的还是零,并用 A 表示 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 解释你的结果.

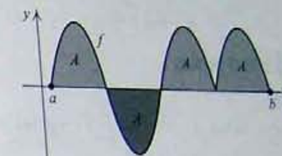
*55. a)



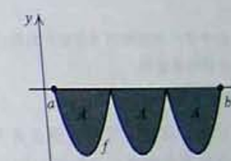
b)



*56. a)



b)



综合题

计算.

57. $\int_{2}^{5}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{d}x$
58. $\int_{1}^{3}\frac{x^3-x^{-1}}{x^2}\mathrm{d}x$
59. $\int_{4}^{16}(x-1)\sqrt{x}\mathrm{d}x$
60. $\int_{0}^{1}(x+2)^3\mathrm{d}x$
61. $\int_{1}^{8}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$
62. $\int_{0}^{1}\frac{x^3+8}{x+2}\mathrm{d}x$
63. $\int_{1}^{2}(4x+3)(5x-2)\mathrm{d}x$
64. $\int_{2}^{5}(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})\mathrm{d}t$
65. $\int_{0}^{1}(t+1)^3\mathrm{d}t$
66. $\int_{1}^{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$
67. $\int_{1}^{3}\frac{t^5-t}{t^3}\mathrm{d}t$
68. $\int_{4}^{9}\frac{t+1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
69. $\int_{3}^{5}\frac{x^2-4}{x-2}\mathrm{d}x$
70. $\int_{0}^{1}\frac{t^3+1}{t+1}\mathrm{d}t$

2007/08/16

找出下列各题的错误，并加以解释.

•71. $\int_1^2 (x^2+x+1)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$
$= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{2}\cdot 2^2+2\right)$
$= \frac{10}{3}$

•72. $\int_1^2 (\ln x - e^x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{x}-e^x\right]_1^2$
$= \left(\frac{1}{2}-e^2\right)-(1-e^1)$
$= e-e^2-\frac{1}{2}$

上机技术演练

计算.

73. $\int_{-2}^{3}(x^3-4x)\mathrm{d}x$

74. $\int_{-2}^{3}(x-x^3)\mathrm{d}x$

75. $\int_{-1.2}^{4.5}(x^3-9x^2+27x+50)\mathrm{d}x$

76. $\int_{-8}^{1.4}(x^4+4x^3-36x^2-160x+300)\mathrm{d}x$

77. $\int_{-1}^{20}\frac{4x}{x^2+1}\mathrm{d}x$

78. $\int_{-1}^{1}(1-\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x$

79. $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

80. $\int_{0}^{10}(x^3-6x^2+15x)\mathrm{d}x$

81. $\int_{0}^{8}x(x-5)^4\mathrm{d}x$

82. $\int_{-2}^{2}x^{2/3}\left(\frac{5}{2}-x\right)\mathrm{d}x$

83. $\int_{2}^{4}\frac{x^2-4}{x^2-3}\mathrm{d}x$

84. $\int_{-10}^{10}\frac{8}{x^2+4}\mathrm{d}x$

5.3 和的极限与累积

要点

- 把定积分看作和的极限与用矩形面积的和逼近定积分.
- 利用定积分求累积.
- 求函数的平均值.

在5.2节中，叙述了定积分概念并利用它求面积. 本节将讨论定积分可作为一个和的极限，还要讨论涉及量的累积方面的应用，如成本累积.

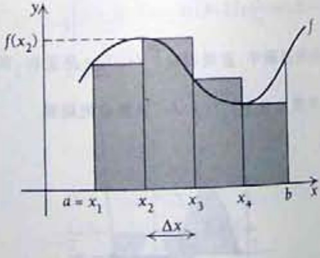
和的极限

考察区间$[a, b]$上的一条曲线下的面积. 把$[a, b]$分割成相等长度的子区间，并作矩形，它们的面积之和近似等于曲线下的面积.

在下列图形中，$[a, b]$被分为四个子区间. 每个子区间的宽$\Delta x=(b-a)/4$.



曲线下的面积可用矩形面积的和来近似



各矩形的高是

$$f(x_1),\quad f(x_2),\quad f(x_3)\quad 和\quad f(x_4).$$

曲线下区域的面积近似等于四个矩形面积的和：

$$f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+f(x_4)\Delta x.$$

我们可用$\sum$(sigma)给出的和号(summation notation)表示这个和：

$$\sum_{i=1}^{4}f(x_i)\Delta x,\quad 或\quad \textstyle\sum_{i=1}^{4}f(x_i)\Delta x.$$

读作"从$i=1$到$i=4$的数$f(x_i)\Delta x$的和". 为了恢复原来的表达式，依次将数1到4代入$f(x_i)\Delta x$并在这些结果之间写上加号. 385 / 387

在继续讨论之前，先考察几个涉及和号的例子.

例1 用和号表示$2+4+6+8+10$.

解

$$2+4+6+8+10=\sum_{i=1}^{5}2i.$$ ■

例2 用和号表示

$$g(x_1)\Delta x+g(x_2)\Delta x+\cdots+g(x_{19})\Delta x.$$

解

$$g(x_1)\Delta x+g(x_2)\Delta x+\cdots+g(x_{19})\Delta x\approx\sum_{i=1}^{19}g(x_i)\Delta x.$$ ■

例3 不用和号表示

$$\sum_{i=1}^{4}3^i.$$

解

$$\sum_{i=1}^{4}3^i=3^1+3^2+3^3+3^4,\quad 或\quad 120.$$ ■

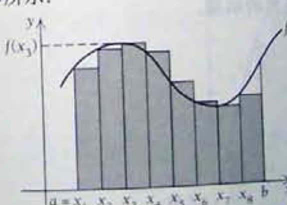
例4 不用和号表示

$$\sum_{i=1}^{30}h(x_i)\Delta x.$$

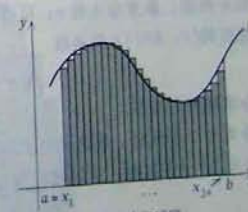
解

$$\sum_{i=1}^{30}h(x_i)\Delta x=h(x_1)\Delta x+h(x_2)\Delta x+\cdots+h(x_{30})\Delta x.$$ ■

当用较小的子区间时矩形会更多，用这些矩形的面积之和作为面积的近似值会更加精确，如下面的图形所示.



8个子区间



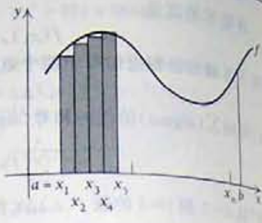
24个子区间

388

2007/08/16

一般地，假设区间$[a, b]$被分为 n 个相等的子区间，每个子区间的宽 $\Delta x=(b-a)/n$. 作高为

$$f(x_1),\quad f(x_2),\quad \dots, f(x_n)$$



的矩形.

每个矩形的宽都是 Δx. 因此，第一个矩形面积是

$$f(x_1)\Delta x,$$

第二个矩形面积是

$$f(x_2)\Delta x,$$

如此等等. 曲线下区域的面积近似于矩形面积的和

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

当 n 无限增大时通过求各矩形面积之和便求得区域的精确面积. 于是，精确面积为

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

面积也可以表示为定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

可以把一个(正的或其他的)函数的积分表示成一个和的极限或用一个原函数来表示，这是一个极为重要的结论，称之为积分学基本定理.

积分学基本定理　*如果函数 f 在$[a, b]$上有一个原函数 F，则*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

在取极限时作如下想象是有意义的：把和号拉长成与 S 相似的符号(积分号)，而把 Δx 定义为 $\mathrm{d}x$. 这就是为什么 $\mathrm{d}x$ 要出现在积分号中.

历史注记　在这个上下文中使用的和或和的极限通常称为黎曼(Riemann)和，以此表示对德国数学家 G. F. Bernhard Riemann(1826—1866)的纪念. 黎曼在 Göttingen

389 大学获得博士学位并且在几何学方面也有许多研究成果.

在下面的例子中，用积分来求精确的面积. 然后，为了给和的极限提供更好的理解，我们用和来逼近定积分的值，取充分大的 n，可得到满意的结果.

例5　考虑区间$[0, 600]$上的函数

$$f(x)=600x-x^2.$$

a)使用积分求精确的面积.

b)把区间分为 6 个子区间，求区域面积的近似值.

c)把区间分为 12 个子区间，求区域面积的近似值.

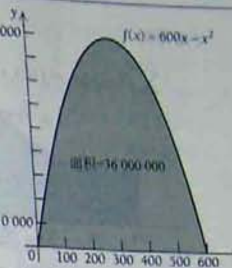
解

a)用积分求精确的面积如下：

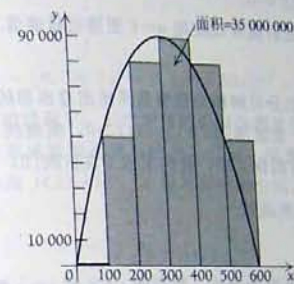
$$\int_0^{600}(600x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[300x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{600}$$

$$=\left(300\cdot 600^2-\frac{600^3}{3}\right)-\left(300\cdot 0^2-\frac{0^3}{3}\right)$$

$$=36\ 000\ 000$$



b)把区间$[0, 600]$分为 6 个子区间，每个子区间长 $\Delta x=(600-0)/6=100$，x_i 的值由 $x_1=0$ 取到 $x_6=500$.



390

于是得到

$$\sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x=f(0)\cdot 100+f(100)\cdot 100+f(200)\cdot 100$$

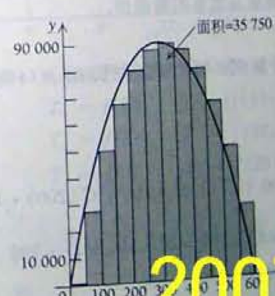
$$+f(300)\cdot 100+f(400)\cdot 100+f(500)\cdot 100$$

$$=0\cdot 100+50\ 000\cdot 100+80\ 000\cdot 100$$

$$+90\ 000\cdot 100+80\ 000\cdot 100+50\ 000\cdot 100$$

$$=35\ 000\ 000.$$

c)把区间$[0, 600]$分为 12 个子区间，每个子区间长 $\Delta x=(600-0)/12=50$，x_i 的值由 $x_1=0$取到 $x_{12}=550$.



2007/08/16

于是得到

$$\sum_{i=1}^{12} f(x_i)\Delta x = f(0)\cdot 50+f(50)\cdot 50+f(100)\cdot 50+f(150)\cdot 50$$
$$+f(200)\cdot 50+f(250)\cdot 50+f(300)\cdot 50+f(350)\cdot 50$$
$$+f(400)\cdot 50+f(450)\cdot 50+f(500)\cdot 50+f(550)\cdot 50$$
$$=0\cdot 50+27\,500\cdot 50+50\,000\cdot 50+67\,500\cdot 50$$
$$+80\,000\cdot 50+87\,500\cdot 50+90\,000\cdot 50+87\,500\cdot 50$$
$$+80\,000\cdot 50+67\,500\cdot 50+50\,000\cdot 50+27\,500\cdot 50$$
$$=35\,750\,000.$$

注意，使用 $n=12$ 得到的近似值要比使用 $n=6$ 更接近精确值. ■

累积

$f(x)$的定积分可解释为能够最终给出总面积的一个累积的面积.

前面已经看到，在区间$[0, b]$上 $v(t)>0$，则曲线 $y=v(t)$下的面积是由 $t=$
假设有一个速度函数 $v(t)$，在5.2节的例2中，我们求出了在区间$[0, 5]$上 $y=x^3$ 的图形下的面积
到 $t=b$ 的运行总距离. 是 $156\frac{1}{4}$. 假如把 $y=x^3$ 当作速度函数

$$v(t)=t^3,$$

其中 t 以小时为单位，而距离以英里为单位. 则在由 $t=0$ 到 $t=5$ 的 5 小时内运行的总距离是

391 在$[0, 5]$上曲线 $y=v(t)$下的面积，或 $156\frac{1}{4}$英里.

对于边际成本函数 $C'(x)$，在区间$[0, x]$上的曲线 $y=C'(x)$下的面积是生产 x 单位产品的总成本，或累积成本.

例6 企业：由边际成本确定成本. Raggs 有限公司测定每套服装的边际成本为

$$C'(x)=0.000\,3x^2-0.2x+50.$$

a) 用和 $\sum_{i=1}^{4} C'(x_i)\Delta x$ 计算生产 400 套服装总成本的近似值.

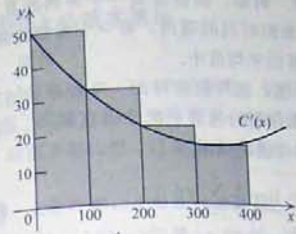
b)用定积分计算生产 400 套服装总成本的精确值.

解

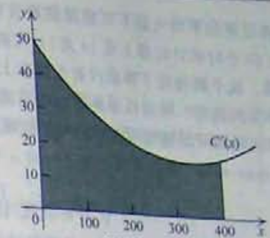
a)把区间$[0, 400]$分为 4 个子区间，每个子区间长 $\Delta x=(400-0)/4=100$，且 x_i 的值由 $x_1=0$取到 $x_4=300$.

因此，有

$$\sum_{i=1}^{4} C'(x_i)\Delta x = C'(0)\cdot 100+C'(100)\cdot 100+C'(200)\cdot 100+C'(300)\cdot 100$$
$$=50\cdot 100+33\cdot 100+22\cdot 100+17\cdot 100$$
$$=12\,200(\text{美元}).$$



$\sum_{i=1}^{4} C'(x_i)\Delta x$



$\int_0^{400} C'(x)\,dx$

b)精确的总成本是

$$\int_0^{400} C'(x)\,dx=[0.000\,1x^3-0.1x^2+50x]_0^{400}=10\,400(\text{美元}).$$

因此，在考虑的子区间较少的情况下，a)中求得的近似值相差也不是太大. ■

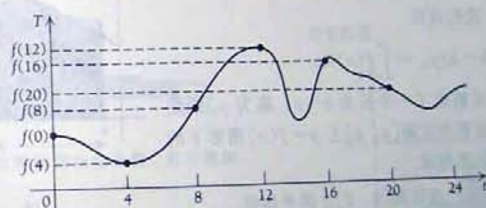
事实上，当一个函数的原函数没有初等的表达式时，用和来近似表示积分是有用的. 例如，对于概率论中的重要函数 $f(x)=e^{-x^2/2}$，没有原函数公式. 因此，它的积分近似值的表是用求和的方法计算出来的. 392

函数的平均值

假设在一个气象观测站，

$$T=f(t)$$

是某一天记录下的时间 t 的气温. 观测站使用一个 24 小时的计时器，因此气温函数的定义域是区间$[0, 24]$. 该函数是连续的，如下图所示.



为了求这一天的平均气温，从午夜开始每隔 4 小时一次读取 6 个气温值：

$$T_0=f(0),\quad T_1=f(4),$$
$$T_2=f(8),\quad T_3=f(12),$$
$$T_4=f(16),\quad T_5=f(20).$$

平均值是这 6 个值的和除以 6：

$$T_{av}=\frac{T_0+T_1+T_2+T_3+T_4+T_5}{6}.$$

2007/08/16

这样计算的平均气温不可能提供最有效的结果．例如，假设这是一个炎热的夏日，下午2:00(在24小时的计时器上是14点)，在我们所读取的时间间隔内，有一个短暂的雷雨天气，气温下降．这个瞬间的下降就没有反映在上面所计算的平均值中．

应该如何做呢？可以以半小时为间隔读取48个值，这样就能得出一个较好的结果．事实上，读取的时间间隔越短所得到的结果就越好．看来合理的做法是把 T 在区间[0，24]上的平均值(average value)定义为当 n 趋于∞时 n 个值的平均值的极限：

$$T\text{的平均值}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(t_i).$$

注意，这离积分的定义不太远了．只需要给出 Δt 即可，此时 Δt 是 $(24-0)/n$，或 $24/n$．把它

393 代人和式中：

$$\begin{aligned}T\text{的平均值}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(t_i)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Delta t}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta t\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{24}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta t\qquad \Delta t=\frac{24}{n},\text{或}\frac{1}{\Delta t}=\frac{n}{24}\\&=\frac{1}{24}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta t=\frac{1}{24}\int_0^{24}f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

定义　设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的一个连续函数．它在 $[a,b]$ 上的**平均值**(average value) y_{av} 为

$$y_{av}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

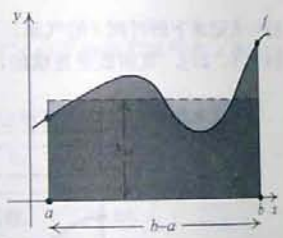
再用另一种方式来考虑平均值．如果在

$$y_{av}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的两边乘以 $b-a$，我们得到

$$(b-a)y_{av}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

现在，左边的表达式给出了一个长为 $b-a$、高为 y_{av} 的矩形面积．这个矩形面积与区间 $[a,b]$ 上 $y=f(x)$ 图形下的面积是相等的，如右图所示．

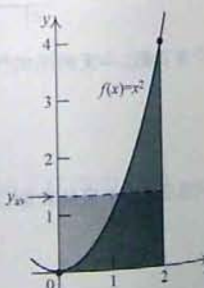


394 **例7**　求 $f(x)=x^2$ 在区间[0，2]上的平均值．

解　平均值是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-0}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{4}{3},\quad\text{或}\quad 1\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

注意，虽然在区间[0，2]上 $f(x)$ 的值由0增加到4，但是不能认为平均值是2．因为从图形中看到，在大半个区间上 $f(x)$ 小于2． ■



上机技术演练

练习

1. 作出 $f(x)=x^4$ 的图形．使用例7中的方法计算函数在区间[0，2]上的平均值．然后在同一坐标系下，利用值 y_{av} 把它的图形画成一条水平线．与 $f(x)=x^4$ 的图形相比较，这条直线代表什么？

例8　生命科学：发动机的排放物．一台发动机的排放物为

$$E(t)=2t^2,$$

其中 $E(t)$ 是在时间 t(单位：年)发动机的排放速率，以10亿个污染颗粒/年计．求由 $t=1$ 到 $t=5$ 的平均排放量．

解　平均排放量是

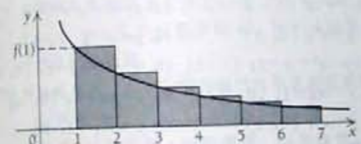
$$\begin{aligned}\frac{1}{5-1}\int_1^5 2t^2\mathrm{d}t&=\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}t^3\right]_1^5=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(5^3-1^3)=\frac{1}{6}(125-1)\\&=20\frac{2}{3}\quad(10\text{亿个污染颗粒}/\text{年})\end{aligned}$$
■

习题 5.3

1. a)计算每个矩形的面积到四位小数，然后相加，以此作为

$$\int_1^7\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

的近似值．



b)计算每个矩形的面积到四位小数，然后相加，以此作为

$$\int_1^7\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

的近似值．



c)计算

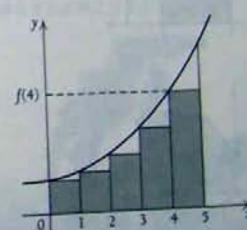
$$\int_1^7\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

将你的答案与a)和b)作比较．

2. a)计算每个矩形的面积，然后相加，以此作为

$$\int_0^5(x^2+1)\mathrm{d}x$$

的近似值．

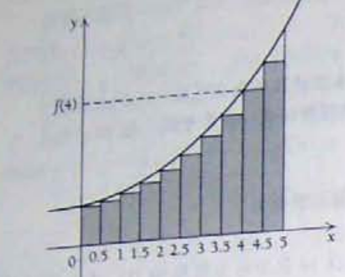


b)计算每个矩形的面积，然后相加，以此作为

$$\int_0^5(x^2+1)\mathrm{d}x$$

的近似值．

2007/08/16



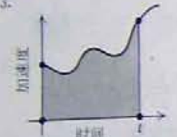
c)计算

$$\int_0^5 (x^2+1)\,dx,$$

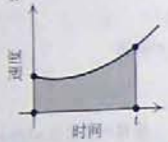
将你的答案与 a)和 b)作比较.

对于以下每种情况，除了面积之外，给出阴影区域的两种解释.

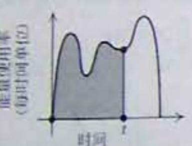
3.



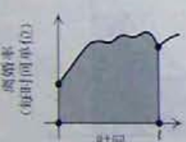
4.



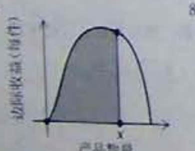
5.



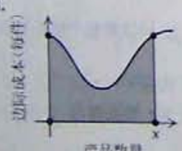
6.



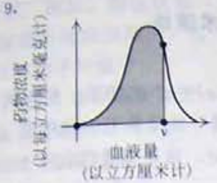
7.



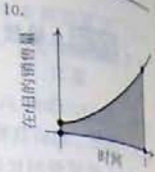
8.



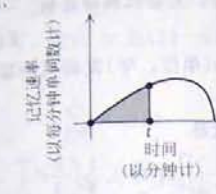
9.



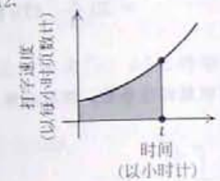
10.



11.



12.



求在给定的区间上的平均值.

13. $y=2x^3$；$[-1, 1]$
14. $y=4-x^2$；$[-2, 2]$
15. $y=e^x$；$[0, 1]$
16. $y=e^{-x}$；$[0, 1]$
17. $y=x^2-x+1$；$[0, 2]$
18. $y=x^2+x-2$；$[0, 4]$
19. $y=mx+1$；$[0, 2]$
20. $y=4x+5$；$[0, a]$
21. $y=x^n$；$[0, 1]$
22. $y=x^n$；$[1, 2]$

应用

商业与经济

23. **累积销售额**. 某公司估计，其销售额将会以函数

$$S'(t) = 20e^t$$

所给出的速率连续增长，其中 $S'(t)$ 是在时间 t 天的销售额的增长速度，以美元/天为单位.

a)求最初 5 天的累积销售额.

b)求从第 2 天到第 5 天的销售额.（这是从 1 到 5 的积分.）

c)到哪一天累积销售额将超过 20 000 美元?

24. **累积销售额**. Raggs 有限公司估计其销售额将会以函数

$$S'(t) = 10e^t$$

所给出的速率连续增长，其中 $S'(t)$ 是在时间 t 天的销售额的增长速度，以美元/天为单位.

a)求最初 5 天的累积销售额.

b)求从第 2 天到第 5 天的销售额.（这是从 1 到 5 的积分.）

c)到哪一天累积销售额将超过 40 000 美元?

25. **由边际成本确定总成本**. Raggs 有限公司测定出每套服装的边际成本为

$$C'(x) = 0.000\,3x^2 - 0.2x + 50.$$

忽略固定成本，求生产第 101 套服装到第 400 套服装的总成本(即由 $x=100$ 到 $x=400$ 的积分).

26. **由边际成本确定总成本**. 使用 25 题的信息，求生产第 201 套服装到第 400 套服装的总成本(即由 $x=200$ 到 $x=400$ 的积分).

27. **由边际收益确定总收益**. 一场拳击赛的承办人销售 x 张票，并且有一个由

$$R'(x) = 200x - 1\,080.$$

给出的边际收益函数. 这意味着总收益关于售出的票数 x 的变化率是 $R'(x)$. 求从销售第 1 001 张票到第 1 300 张票的总收益.

28. **由边际利润确定总利润**. 某公司有一个边际利润函数，它可表示为

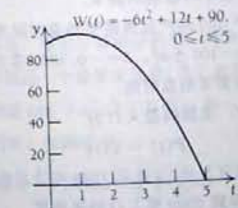
$$P'(x) = -2x + 980.$$

这意味着总利润关于生产 x 件产品的变化率是 $P'(x)$. 求从生产且销售第 101 件产品到第 800 件产品的总利润.

29. **训练的效果**. 在 5 分钟时间内打字员的速率为

$$W(t) = -6t^2 + 12t + 90,\quad t \in [0, 5],$$

此处 $W(t)$ 是时刻 t 时的速度，以单词数/分为单位.



a)求这段时间内的初始时刻速率.

b)求最大速率及出现的时间.

c)求这 5 分钟内的平均速率.

信贷市场债务. 信贷市场债务的年变化率(以 10 亿美元/年为单位)可用函数

$$D'(t) = 1\,975 - 1\,190t + 597t^2 - 71.3t^3$$

来建模，其中 t 是自 1994 年以来的年数.（资料来源：Federal Reserve System.）使用上述信息作 30 题和 31 题.

30. 在 1995 年到 1999 年之间信贷市场债务增加了多少?

31. 在 1994 年到 2000 年之间信贷市场债务增加了多少?

生命科学与物理学

32. 一个质点从原点出发. 它在时间 t 的速度为

$$v(t) = 3t^2 + 2t.$$

从第 2 小时到第 5 小时内(由 $t=1$ 到 $t=5$)它运行了多远?

33. 一个质点从原点出发. 它在时间 t 的速度为

$$v(t) = 4t^3 + 2t.$$

从开始到第 3 小时内(由 $t=0$ 到 $t=3$)它运行了多远?

34. **总污染**. 某工厂正在污染一个湖泊. 在时间 t(月)排放到湖泊中的污染物的速率为

$$N'(t) = 280t^{3/2},$$

其中 N 是在时间 t 排放到湖泊中污染物的总磅数.

a)在 16 个月中排放到湖泊中的污染物有多少磅?

b)一个环境专家告诉工厂，排放到湖泊中的污染物达到 50 000 磅之后必须启动清理程序. 这将在多长时间之后发生?

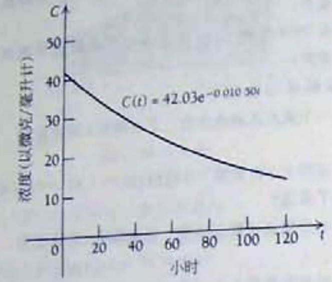


35. **平均药物剂量**. 一头被注射了消炎药的小牛，血液中苯基丁氮酮的浓度 C(以微克/毫升为单位)由

$C(t) = 10.03e^{...}$

2007/08/16

给出，其中 t 是注射之后的小时数且 $0 \leqslant t \leqslant 120$.（资料来源：A. K. Arifah and P. Lees, "Pharmacodynamics and Pharmacokinetics of Phenylbutazone in Calves," *Journal of Veterinary Pharamacology and Therapeutics*, Vol. 25, 299-309(2002).）



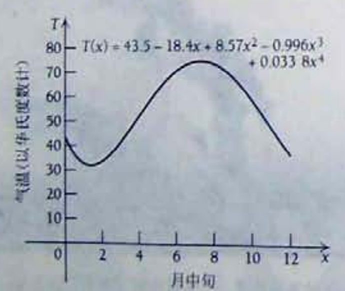
a)已知这个模型对于 $0 \leqslant t \leqslant 120$ 是精确的，那么初始的剂量是多少？

b)在 10 和 120 小时之间，在小牛体内苯基丁氮酮的平均含量是多少？

36. 纽约气温．对于任何日期，纽约在该日的平均气温可近似地用函数

$$T(x) = 43.5 - 18.4x + 8.57x^2 - 0.996x^3 + 0.033\,8x^4$$

来表示，其中 T 表示气温的华氏度数，$x=1$ 表示 1 月中旬，$x=2$ 表示 2 月中旬，等等．计算纽约全年平均气温．（资料来源：www.worldclimate.com.）



37. 室外气温．在 10 个小时以内的气温可表示为

$$f(t) = -t^2 + 5t + 40, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10.$$

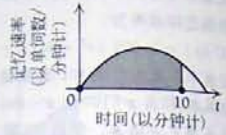
a)求平均气温．

b)求最低气温．

c)求最高气温．

社会科学

记忆力．记忆信息的速率（比如，每分钟单词数）最初随时间递增．但是，在最终达到一个最大速率之后就开始递减．



38. 假设在一次特定的记忆实验中记忆速率为

$$M'(t) = -0.009t^2 + 0.2t,$$

其中 $M'(t)$ 是记忆速率，以单词数/分钟为单位．试问在最初的 10 分钟内（由 $t=0$ 到 $t=10$）记住了多少单词？

39. 假设在某次记忆实验中记忆速率可表示为

$$M'(t) = -0.003t^2 + 0.2t,$$

其中 $M'(t)$ 是记忆速率，以单词数/分钟为单位．试问在最初的 10 分钟内（由 $t=0$ 到 $t=10$）记住了多少单词？

40. 工业的学习曲线．一家公司正在生产一种新产品．由于产品的性质使公司意识到，必须使工人尽快熟悉生产程序，以减少生产每件产品所需要的时间．公司测定学习过程的函数为

$$T(x) = ax^b,$$

其中 $T(x)$ 是生产 x 件产品的平均时间，x 是生产的产品数量，a 是生产第一件产品所需要的小时数，b 是学习曲线的斜率．

a)求生产 100 件产品所需要的总时间的表达式．

b)假设 $a=100$ 小时，$b=-0.322$．求生产 100 件产品所需要的总时间．

41. 平均人口．美国的总人口为

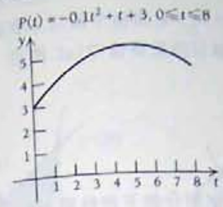
$$P(t) = 241e^{0.009t},$$

其中 P 以百万计，t 是从 1986 年之后的年数．求从 1986 年到 2000 年人口的平均值．

42. 一个城市的平均人口．某城市的人口在 8 年中依照函数

$$P(t) = -0.1t^2 + t + 3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 8$$

先增加，后减少，其中 P 以百万计，t 是时间．



a)求平均人口．

b)求人口的最小值．

c)求人口的最大值．

43. 学习成绩．学生在一次测验中的分数由函数

$$S(t) = t^2, \quad t \in [0,10]$$

给出，其中 $S(t)$ 是经过 t 小时学习后的分数．

a)求学生可以达到的最高分数以及为此所需花的学习时间．

b)求在 10 个小时的区间上的平均分数．



学生的测验分数是所花学习时间的函数

综合题

梯形法则．近似计算积分的另一种方法是把和中的每个矩形都用一个梯形来代替（见下面图 1 和图 2)．梯形的面积是 $h(c_1 + c_2)/2$，其中 c_1 和 c_2 是两个平行边的长．因此，在图 2 中，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^m f(x)\,dx + \int_m^b f(x)\,dx$$

$$\approx \Delta x \frac{f(a) + f(m)}{2} + \Delta x \frac{f(m) + f(b)}{2}$$

$$\approx \Delta x \left[\frac{f(a)}{2} + f(m) + \frac{f(b)}{2}\right].$$

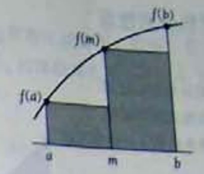


图 1

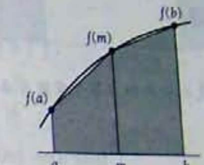


图 2

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个相等的子区间，每个子区间的长为 $\Delta x = (b-a)/n$，于是得到近似式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\Delta x \left[\frac{f(a)}{2} + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_n) + \frac{f(b)}{2}\right],$$

其中 $x_1 = a$，而

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x \quad 或 \quad x_n = a + (n-1)\Delta x.$$

这称为**梯形法则**(Trapezoidal Rule)．

44. 使用梯形法则，分割 1 题 a)的区间，求

$$\int_1^7 \frac{dx}{x^2}$$

的近似值．

45. 使用梯形法则，分割 2 题 a)的区间，求

$$\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx$$

的近似值．

上机技术演练

作出函数的图形，并用绘图器近似计算积分．

46. $\int_0^2 (x^4 + 1)\,dx$

47. $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

48. $\int_0^3 \frac{2}{\sqrt{x+1}}\,dx$

49. $\int_2^4 \ln x\,dx$

2007/08/16

5.4 定积分的性质

要点
- 定积分性质的运用.
- 求曲线之间的面积.
- 解涉及定积分的应用问题.

定积分的性质

由定积分的定义和不定积分的性质可以很容易地推导出定积分的下列性质.

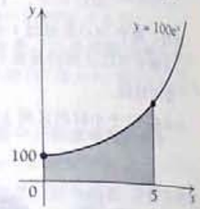
性质 1

$$\int_a^b k\cdot f(x)\mathrm{d}x = k\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

395 ～ 400 常数与函数之积的积分等于常数与函数积分的乘积，即常数是可从被积函数中提出的因子.

例 1

$$\int_0^5 100\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = 100\int_0^5 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$
$$= 100[\mathrm{e}^x]_0^5$$
$$= 100(\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^0)$$
$$= 100(\mathrm{e}^5-1)$$
$$\approx 14\ 741.32$$



■

性质 2

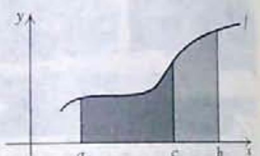
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

和的积分等于积分的和.

性质 3 对于 $a<c<b$,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

对于 a 和 b 之间的任何数 c，由 a 到 b 的积分等于由 a 到 c 的积分加上由 c 到 b 的积分.



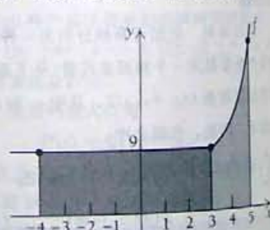
当一个函数是在各子区间上用不同方式定义的分段函数时，性质 3 就有了特殊的应用.

例 2 求从 -4 到 5 的 $y=f(x)$ 图形下的面积，其中

$$f(x)=\begin{cases}9, & 当\ x<3\ 时,\\ x^2, & 当\ x\geqslant 3\ 时.\end{cases}$$

解

$$\int_{-4}^5 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-4}^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_3^5 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-4}^3 9\mathrm{d}x + \int_3^5 x^2\mathrm{d}x$$
$$= 9\int_{-4}^3 \mathrm{d}x + \int_3^5 x^2\mathrm{d}x = 9[x]_{-4}^3 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^5$$
401 $$= 9[3-(-4)] + \left(\frac{5^3}{3}-\frac{3^3}{3}\right) = 95\ \frac{2}{3}.$$



■

以两个图形为边界的区域面积

假设需要求以两个函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图形为边界的区域面积，如图 1 所示. 注意，在图 2a) 中需要求的区域 A 的面积是图 2b) 中 A_2 的面积减去图 2c) 中 A_1 的面积.

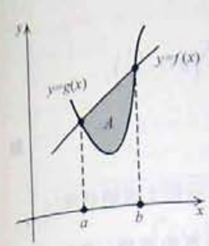


图 1

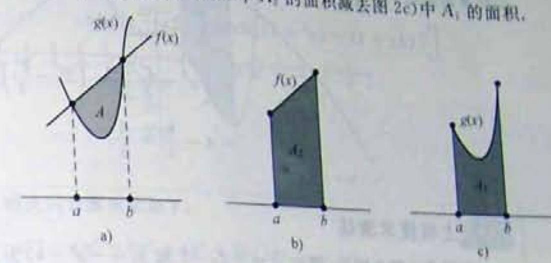


图 2

于是,

$$\mathrm{A} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

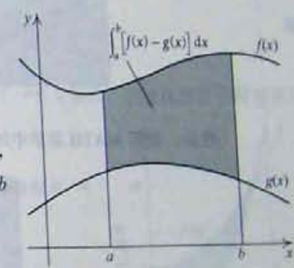
或

$$\mathrm{A} = \int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$

一般地，有以下定理.

定理 5 设在区间 $[a, b]$ 上 f 和 g 都是连续函数，并且 $f(x)\geqslant g(x)$，则介于两条曲线之间由 $x=a$ 到 $x=b$ 的区域面积是

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$



402

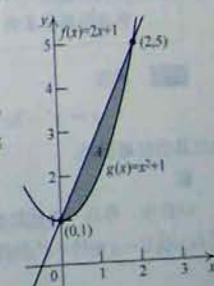
例 3 求以 $f(x)=2x+1$ 和 $g(x)=x^2+1$ 的图形为边界的区域面积.

解

a) 首先，作出一个比较准确的草图，以保证能得到一个正确的轮廓. 图形如右所示. 注意哪个图形在上. 这里，在区间 $[0, 2]$ 上 $2x+1\geqslant x^2+1$.

b) 其次，如果没有给出边界，则要确定所有可能的交点的第一个坐标. 有时通过考察图形就能确定交点. 不然的话，还可如下解方程. 在交点处，$f(x)=g(x)$，因此,

$$x^2+1 = 2x+1$$
$$x^2-2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$



2007/08/16

$$x=0 \quad 或 \quad x=2.$$

于是我们所考虑的区间是[0, 2].

c)计算面积如下：

$$\int_0^2[(2x+1)-(x^2+1)]\mathrm{d}x=\int_0^2(2x-x^2)\mathrm{d}x$$

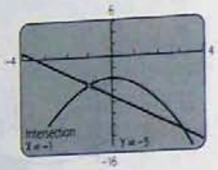
$$=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\left(2^2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(0^2-\frac{0^3}{3}\right)$$

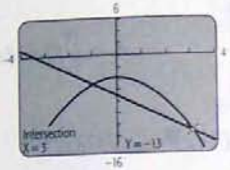
403 $$=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}.$$ ■



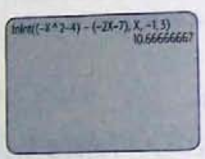
上机技术演练

为了求以两个图形(例如 $y_1=-2x-7$ 和 $y_2=-x^2-4$)为边界的面积，我们作出每个函数的图形，并使用 CALC 菜单中的 INTERSECT 选项确定交点.





然后，使用 MATH 菜单中的 fnInt 选项.



以两条曲线为边界的面积约等于 10.7.

使用绘图器求例3中区域的面积.

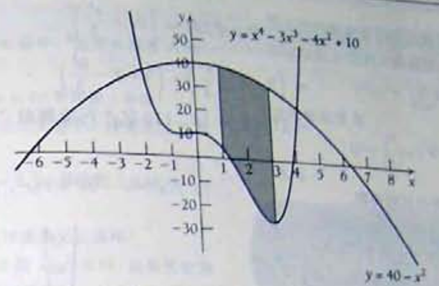
例4 求以

$$y=x^4-3x^3-4x^2+10, \quad y=40-x^2, \quad x=1 \quad 和 \quad x=3$$

为边界的区域面积.

解

a)首先，作出一个比较准确的草图，以保证能得到一个正确的轮廓. 图形如下所示. 注意在[1, 3]上，$y=40-x^2$ 的图形在上. 因此，在[1, 3]上有 $40-x^2\geq x^4-3x^3-4x^2+10$.



b)积分限如上所示，因此可计算面积如下：

$$\int_1^3[(40-x^2)-(x^4-3x^3-4x^2+10)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^3(-x^4+3x^3+3x^2+30)\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{3}{4}x^4+x^3+30x\right]_1^3$$

$$=\left(-\frac{3^5}{5}+\frac{3}{4}\cdot3^4+3^3+30\cdot3\right)-\left(-\frac{1^5}{5}+\frac{3}{4}\cdot1^4+1^3+30\cdot1\right)$$

$$=97.6.$$ ■ 404

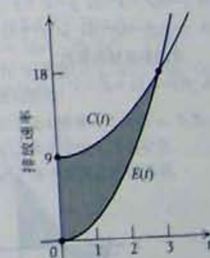
一个应用

例5 生命科学：排放控制. 一位聪明的学生研制了一台发动机，它被认定符合联邦政府的排放控制标准. 发动机的排放速率为

$$E(t)=2t^2,$$

此处 $E(t)$ 是在时间 t(以年计)的排放速率，以10亿个污染颗粒/年为单位. 传统发动机的排放速率为

$$C(t)=9+t^2.$$



两条曲线的图形如右.

a)在何时排放速率是相同的?

b)使用学生的发动机排放量减少了多少?

解

a)当 $E(t)=C(t)$ 时排放速率是相同的，即

$$2t^2=9+t^2$$

$$t^2-9=0$$

$$(t-3)(t+3)=0$$

$$t=3 \quad 或 \quad t=-3.$$

因为在这个问题中负时间没有意义，所以当 $t=3$ 年时排放速率是相同的.

b)上面图形中阴影区域的面积表示了排放物减少的数量. 它是由 $t=0$ 到 $t=3$ 的 $C(t)=9+t^2$ 与 $E(t)=2t^2$ 之间的面积. 计算如下：

2007/08/16

$$\int_0^3[(9+t^2)-2t^2]\mathrm{d}t=\int_0^3(9-t^2)\mathrm{d}t=\left[9t-\frac{t^3}{3}\right]_0^3$$

$$=\left(9\cdot3-\frac{3^3}{3}\right)-\left(9\cdot0-\frac{0^3}{3}\right)$$

$$=27-9=18\quad(10\text{ 亿个污染颗粒 / 年}).$$

405

习题 5.4

求以所给图形为边界的区域面积.

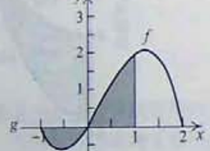
1. $y=x$, $y=x^3$, $x=0$, $x=1$
2. $y=x$, $y=x^4$
3. $y=x+2$, $y=x^2$
4. $y=x^2-2x$, $y=x$
5. $y=6x-x^2$, $y=x$
6. $y=x^2-6x$, $y=-x$
7. $y=2x-x^2$, $y=-x$
8. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$
9. $y=x$, $y=\sqrt[4]{x}$
10. $y=3$, $y=x$, $x=0$
11. $y=5$, $y=\sqrt{x}$, $x=0$
12. $y=x^2$, $y=x^3$
13. $y=4-x^2$, $y=4-4x$
14. $y=x^2+1$, $y=x^2$, $x=1$, $x=3$
15. $y=x^2+3$, $y=x^2$, $x=1$, $x=2$

求被每组曲线所包围的面积.

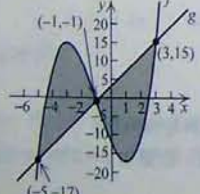
16. $y=2x^2-x-3$, $y=x^2+x$
17. $y=2x^2-6x+5$, $y=x^2+6x-15$

求阴影区域的面积.

18. $f(x)=2x+x^2-x^3$, $g(x)=0$

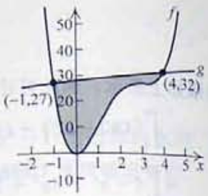


19. $f(x)=x^3+3x^2-9x-12$, $g(x)=4x+3$

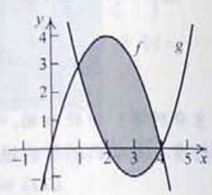


406

20. $f(x)=x^4-8x^3+18x^2$, $g(x)=x+28$



21. $f(x)=4x-x^2$, $g(x)=x^2-6x+8$



求区间[−2, 3]上图形之下的面积，其中：

22. $f(x)=\begin{cases}x^2, & 若\ x<1,\\ 1, & 若\ x\geqslant1.\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & 若\ x<0,\\ 4, & 若\ x\geqslant0.\end{cases}$

应用

商业与经济

24. 总利润. 一家公司测定每天的边际收益可表示为

$$R'(t)=100e^t,\quad R(0)=0,$$

其中 $R(t)$ 是在第 t 天的收益，以美元计. 公司每天的边际成本可表示为

$$C'(t)=100-0.2t,\quad C(0)=0,$$

其中 $C(t)$ 是第 t 天的成本，以美元计. 求由 $t=0$ 到 $t=10$(最初 10 天)的总利润. 注意：

$$P(T)=R(T)-C(T)=\int_0^T[R'(t)-C'(t)]\mathrm{d}t.$$

社会科学

25. 记忆力. 在某个记忆实验中，接受实验者 A 能够以速率

$$m'(t)=-0.009t^2+0.2t(\text{单词数 / 分钟})$$

记忆单词. 在相同的记忆实验中，接受实验者 B 能够以速率

$$M'(t)=-0.003t^2+0.2t(\text{单词数 / 分钟})$$

记忆单词.

a)哪个接受实验者有较高的记忆速率?

b)由 $t=0$ 到 $t=10$(在前 10 分钟内)速率快的接受实验者多记了多少单词?

综合题

求以给定的图形为边界的区域面积.

26. $y=x^2$, $y=x^{-1}$, $x=1$, $x=5$
27. $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=0$, $x=1$
28. $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1$, $x=8$
29. $y=x^2$, $y=x^3$, $x=-1$, $x=1$
30. $x+2y=2$, $y-x=1$, $2x+y=7$
31. 求以 $y=3x^5-20x^3$、x 轴以及函数的相对极大值和极小值的第一个坐标为边界的区域面积.
32. 求以 $y=x^3-3x+2$、x 轴、函数的相对极大值和极小值的第一个坐标为边界的区域面积.
33. 生命科学：普瓦瑟耶(Poiseuille)定律. 血管中血液的流动在血管的中心比较快，而在中心之外比较缓慢. 血液的流速为

$$V=\frac{p}{4Lv}(R^2-r^2),$$

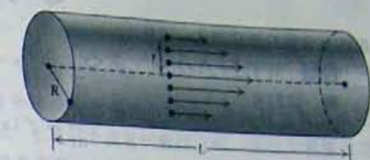
其中 R 是血管的半径，r 是由血管中心到测量点血液的距离，而 p, v 和 L 是与压力、血液粘度及血管的长度有关的物理常数. 如果 R 是常数，则可以把 V 当作 r 的函数：

$$V(r)=\frac{p}{4Lv}(R^2-r^2).$$

总的血流量为

$$Q=\int_0^R 2\pi\cdot V(r)\cdot r\cdot\mathrm{d}r.$$

求 Q.



上机技术演练

求已知图形所围区域的面积.

34. $y=x+6$, $y=-2x$, $y=x^3$
35. $y=x^2+4x$, $y=\sqrt{16-x^2}$
36. $y=x\sqrt{4-x^2}$, $y=\dfrac{-4x}{x^2+1}$, $x=0$, $x=2$
37. $y=2x^2+x-4$, $y=1-x+8x^2-4x^4$
38. $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=1-x^2$, $x=-1$, $x=1$
39. 考虑下列函数：

$$f(x)=3.8x^5-18.6x^3,$$
$$g(x)=19x^4-55.8x^2.$$

a)在具有 Yscl=10 的视窗[−4, 4, −70, 70]中作出这些函数的图形.

b)计算两个图形三个交点的第一个坐标 a, b 和 c.

c)求在区间[a, b]上两个曲线之间的面积.

d)求在区间[b, c]上两个曲线之间的面积. 407

5.5 积分法：换元法

要点

- 用换元法计算积分.
- 用换元法解涉及积分的应用问题.

下列公式为被称之为换元法(substitution)的积分方法提供了基础.

A. $\displaystyle\int u^r\mathrm{d}u=\frac{u^{r+1}}{r+1}+C$, 规定 $r\neq-1$.

B. $\displaystyle\int e^u\mathrm{d}u=e^u+C$.

C. $\displaystyle\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\ln|u|+C$.

2007/08/16

$\int \frac{1}{u}du = \ln u + C, u > 0.$（通常都是考虑 $u > 0$.）

回顾导数的莱布尼茨记号 dy/dx. 在 3.6 节中给出了微分 dy 和 dx 的特殊定义. 我们知道

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

和

$$dy = f'(x)dx.$$

在这一节将广泛应用这一记号.

例 1 对于 $y=f(x)=x^3$，求 dy.

解 我们有

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2,$$

因此

$$dy = f'(x)dx = 3x^2 dx.$$ ■

例 2 对于 $u=g(x)=\ln x$，求 du.

解 我们有

$$\frac{du}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x},$$

因此

408 $$du = g'(x)dx = \frac{1}{x}dx, \quad 或 \quad \frac{dx}{x}.$$ ■

例 3 对于 $y=f(x)=e^{x^2}$，求 dy.

解 使用链式法则，有

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2xe^{x^2},$$

因此

$$dy = f'(x)dx = 2xe^{x^2}dx.$$ ■

至此，在

$$\int f(x)dx$$

中的 dx 除了指明积分变量之外还没有在积分中发挥作用. 现在利用 dx 会带来便利. 考虑积分

$$\int 2xe^{x^2}dx.$$

乍一看，此时使用我们已经知道的规则似乎不能计算这个积分. 但是，在作了一个适当的代换之后，就能计算这个积分了. 如果令

$$u = x^2,$$

则

$$\frac{du}{dx} = 2x,$$

因此

$$du = 2xdx.$$

如果以 u 代替 x^2，以 du 代替 $2xdx$，则积分取如下形式：

$$\int e^u du.$$

由于

$$\int e^u du = e^u + C$$

因而得到

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

实际上，我们反向用到了链式法则. 可以用微分来检验所得到的结果. 称这种过程为换元(substitution)，或变量代换(change of variable). 它是一个反复试验的过程，通过大量练习之后，你才会变得熟练起来. 如果试验一个代换没有得到一个容易积分的被积函数，那就要选择另外的代换再试验. 有许多积分是不能用换元法计算的. 但是确实知道，在本节开始所给出的适合规则 A、B 或 C 的任何积分都可用换元法来计算. 409

再来考虑一些例子.

例 4 计算：$\int \frac{2xdx}{1+x^2}$.

解

$$\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \int \frac{du}{u} \quad \text{换元} \quad 令 u = 1+x^2，则 du = 2xdx$$ ■

记住，总可以用微分进行检验.

例 5 计算：$\int \frac{2xdx}{(1+x^2)^2}$.

解

$$\int \frac{2xdx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{du}{u^2} \quad \text{换元} \quad u = 1+x^2, du = 2xdx$$

$$= \int u^{-2}du = -u^{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{u} + C = \frac{-1}{1+x^2} + C$$ ■

例 6 计算：$\int \frac{\ln 3xdx}{x}$.

解

$$\int \frac{\ln 3xdx}{x} = \int u du \quad \text{换元} \quad u = \ln 3x, du = \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln 3x)^2}{2} + C$$ ■

2007/08/16

例 7 计算：$\int x e^{x^2} dx$.

解 假设试验代换 $u=x^2$，则有

$$du = 2x dx.$$

在 $\int x e^{x^2} dx$ 中没有 $2x dx$. 但是有 $x dx$，只需提供一个 2 就可以了. 因此用 $\frac{1}{2}\cdot 2$ 即 1 乘所求积分，

410 得到

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x dx) = \frac{1}{2}\int e^u du$$

$$= \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

例 8 计算：$\int \frac{dx}{x+3}$.

解

$$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{du}{u} \quad \text{换元} \quad \begin{array}{l} u = x+3, \\ du = dx \end{array}$$

$$= \ln u + C = \ln(x+3) + C$$

跟着作练习，你也会用心算作某个换元而得出答案. 例 8 就是这样的一个好的实例.

例 9 计算：$\int x^2(x^3+1)^{10} dx$.

解

$$\int x^2(x^3+1)^{10} dx = \frac{1}{3}\int (x^3+1)^{10}(3x^2 dx) \quad \text{换元} \quad \begin{array}{l} u = x^3+1, \\ du = 3x^2 dx \end{array}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{10} du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{11}}{11} + C$$

$$= \frac{1}{33}(x^3+1)^{11} + C$$

例 10 计算：$\int_0^1 x^2(x^3+1)^{10} dx$.

解

a) 首先求不定积分(已在例 9 中给出).

b) 然后计算[0，1]上的定积分：

$$\int_0^1 x^2(x^3+1)^{10} dx = \left[\frac{1}{33}(x^3+1)^{11}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{33}[(1^3+1)^{11} - (0^3+1)^{11}]$$

$$= \frac{1}{33}(2^{11} - 1^{11}) = \frac{2^{11}-1}{33}.$$

上机技术演练

练习

1. 用绘图器计算

$$\int_0^1 x^2(x^3+1)^{10} dx.$$

411

习题 5.5

计算下列积分. (一定要用微分来验算!)

1. $\int \frac{3x^2 dx}{7+x^3}$
2. $\int \frac{3x^2 dx}{1+x^3}$
3. $\int e^{7x} dx$
4. $\int e^{3x} dx$
5. $\int e^{x/2} dx$
6. $\int e^{x/3} dx$
7. $\int x^3 e^{x^4} dx$
8. $\int x^4 e^{x^5} dx$
9. $\int t^2 e^{-t^3} dt$
10. $\int t e^{-t^2} dt$
11. $\int \frac{\ln 4x dx}{x}$
12. $\int \frac{\ln 5x dx}{x}$
13. $\int \frac{dx}{1+x}$
14. $\int \frac{dx}{12+x}$
15. $\int \frac{dx}{4-x}$
16. $\int \frac{dx}{1-x}$
17. $\int t^2(t^3-1)^7 dt$
18. $\int t(t^2-1)^5 dt$
19. $\int (x^4+x^3+x^2)^7(4x^3+3x^2+2x) dx$
20. $\int (x^3-x^2-x)^9(3x^2-2x-1) dx$
21. $\int \frac{e^x dx}{4+e^x}$
22. $\int \frac{e^t dt}{3+e^t}$
23. $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$
24. $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$
25. $\int \frac{dx}{x\ln x}$
26. $\int \frac{dx}{x\ln x^2}$
27. $\int \sqrt{ax+b}\, dx$
28. $\int x\sqrt{ax^2+b}\, dx$
29. $\int b e^{ax} dx$
30. $\int P_0 e^{kt} dt$
31. $\int \frac{3x^2 dx}{(1+x^3)^5}$
32. $\int \frac{x^3 dx}{(2-x^4)^7}$
33. $\int 5x\sqrt[4]{1-x^2}\, dx$
34. $\int 12x\sqrt[5]{1+6x^2}\, dx$

计算下列积分.

35. $\int_0^1 2x e^{x^2} dx$
36. $\int_0^1 3x^2 e^{x^3} dx$
37. $\int_0^1 x(x^2+1)^5 dx$
38. $\int_1^2 x(x^2-1)^7 dx$
39. $\int_0^4 \frac{dt}{1+t}$
40. $\int_0^3 e^{4x} dx$
41. $\int_1^4 \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx$
42. $\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x} dx$
43. $\int_0^b e^{-x} dx$
44. $\int_0^b 2e^{-2x} dx$
45. $\int_0^b m e^{-mx} dx$
46. $\int_0^b k e^{-kx} dx$
47. $\int_0^4 (x-6)^2 dx$
48. $\int_0^3 (x-5)^2 dx$
49. $\int_0^2 \frac{3x^2 dx}{(1+x^3)^5}$
50. $\int_{-1}^0 \frac{x^3 dx}{(2-x^4)^7}$
51. $\int_0^{\sqrt{7}} 7x\sqrt[3]{1+x^2}\, dx$
52. $\int_0^1 12x\sqrt[5]{1-x^2}\, dx$

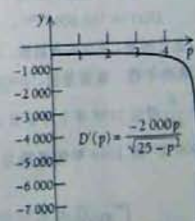
53. 利用绘图器检验 35～52 题中的每一个结果.

应用

商业与经济

54. 由边际需求确定需求. 某公司有边际需求函数

$$D'(p) = \frac{-2\,000p}{\sqrt{25-p^2}}.$$



412

2007/08/16

已知当每件产品的价格是 $p=3$ 美元时 $D=13\,000$，求需求函数．

55. 投资的价值．一家公司以 250 000 美元购买了一台新机器．从销售这台机器生产的产品中所获得的边际收益是

$$R'(t)=4\,000t.$$

机器残值以

$$V'(t)=25\,000e^{-0.1t}$$

的速率下降．T 年后来自机器的总利润为

$$P(t)=\begin{pmatrix}\text{来自产品}\\ \text{销售的}\\ \text{收益}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{来自机器}\\ \text{销售的}\\ \text{收益}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{机器的}\\ \text{成本}\end{pmatrix}$$

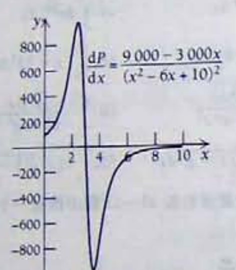
$$=\int_0^T R'(t)\mathrm{d}t+\int_0^T V'(t)\mathrm{d}t-250\,000.$$

a)求 $P(T)$．

b)求 $P(10)$．

56. 由边际利润确定利润．某公司有边际利润函数

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{9\,000-3\,000x}{(x^2-6x+10)^2}.$$



已知 $x=3$ 时 $P=1\,500$ 美元，求总利润函数．

社会科学

57. 离婚．美国的离婚率可近似表示为

$$D(t)=100\,000e^{0.025t},$$

其中 $D(t)$ 是在时间 t 发生的离婚数，而 t 是 1900 年以来观测的年数．也就是说，$t=0$ 对应 1900 年，$t=98\frac{9}{365}$ 对应 1998 年 1 月 9 日，等等．

a)求从 1900 年到 1999 年的离婚总数．注意，这是

$$\int_0^{99}D(t)\mathrm{d}t.$$

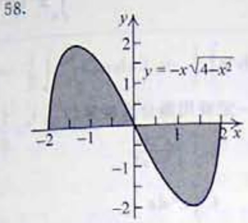
b)求从 1980 年到 1999 年的离婚总数．注意，这是

$$\int_{80}^{99}D(t)\mathrm{d}t.$$

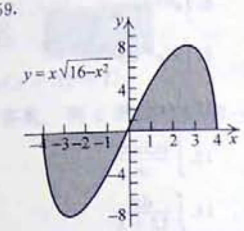
综合题

求阴影区域的面积．

58.



59.



计算下列各题．

60. $\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}$　　61. $\int 5x\sqrt{1-4x^2}\mathrm{d}x$

62. $\int\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$　　63. $\int\frac{x^2}{e^{x^3}}\mathrm{d}x$

64. $\int\frac{(\ln x)^{99}}{x}\mathrm{d}x$　　65. $\int\frac{e^{1/t}}{t^2}\mathrm{d}t$

66. $\int(e^t+2)e^t\mathrm{d}t$　　67. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^4}$

68. $\int\frac{t^2}{\sqrt[4]{2+t^3}}\mathrm{d}t$　　69. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\mathrm{d}x$

70. $\int\frac{[(\ln x)^2+3(\ln x)+4]}{x}\mathrm{d}x$

71. $\int\frac{x-3}{(x^2-6x)^{1/3}}\mathrm{d}x$　　72. $\int\frac{t^3\ln(t^4+8)}{t^4+8}\mathrm{d}t$

73. $\int\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}\mathrm{d}t$

（提示：$\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}=\frac{t^2+2t+1-1}{t^2+2t+1}=1-\frac{1}{(t+1)^2}$.）

74. $\int\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x$

75. $\int\frac{x+3}{x+1}\mathrm{d}x$

（提示：$\frac{x+3}{x+1}=1+\frac{2}{x+1}$.）

76. $\int\frac{t-5}{t-4}\mathrm{d}t$　　77. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^n}$

78. $\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$（提示：$\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.）

79. $\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x$　　80. $\int\frac{(\ln x)^n}{x}\mathrm{d}x$

81. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x[\ln(\ln x)]}$　　82. $\int\frac{e^{-mx}}{1-ae^{-mx}}\mathrm{d}x$

83. $\int 9x(7x^2+9)^n\mathrm{d}x$　　84. $\int 5x^2(2x^3-7)^n\mathrm{d}x$

*85. 确定下式是否是一个定理，

$$\int[f(x)]^2\mathrm{d}x=2\int f(x)\mathrm{d}x.$$

5.6 积分法：分部积分法

要点

- 利用分部积分公式计算积分．
- 解涉及分部积分的应用问题．

回顾求导的乘积法则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}uv=u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

两边对 x 积分，得到

$$uv=\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}v+\int v\mathrm{d}u.$$

解出 $\int u\mathrm{d}v$，得到下述定理．

定理 6　分部积分公式 413～414

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

在某些情况下，被积函数是两个函数的乘积，且其中一个函数能用已有的方法进行积分．此时，定理中的方程可当作一个积分公式来使用．例如，

$$\int xe^x\mathrm{d}x$$

可看成

$$\int x(e^x\mathrm{d}x)=\int u\mathrm{d}v,$$

其中设

$$u=x\quad\text{和}\quad \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x.$$

如此，有

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x,\quad\text{用微分}$$

和

$$v=e^x,\quad\text{用积分并且采用最简单的原函数.}$$

然后用分部积分公式得到

2007/08/16

$$\int \overset{u}{(x)}\,\overset{dv}{(e^x dx)} = \overset{u}{(x)}\,\overset{v}{(e^x)} - \int \overset{v}{(e^x)}\,\overset{du}{(dx)} = xe^x - e^x + C.$$

这种积分方法称为**分部积分法**(integration by part).

注意，与换元法一样，分部积分法也是一个反复试验的过程. 在上述例子中，假设把 x 和 e^x 的角色颠倒过来，将得到

$$u=e^x,\qquad dv=x\,dx,$$

$$du=e^x dx,\qquad v=\frac{x^2}{2},$$

以及

$$\int(e^x)(x\,dx) = (e^x)\left(\frac{x^2}{2}\right)-\int\left(\frac{x^2}{2}\right)(e^x dx).$$

现在右边的被积函数比原来的积分更难以积分. 当被积函数的两个因子都可积分时，这就有一个如何运用分部积分公式的选择问题，也可能出现仅有一个因子可以积分(或可能两个因子都
415 不能积分)的情况.

运用分部积分法的提示

1. 如果试过换元法，且没有成功，则可尝试分部积分法.
2. 当一个积分具有形式

$$\int f(x)g(x)\,dx$$

时，使用分部积分法. 然后把它与形如

$$\int u\,dv$$

的积分相比较，选择一个函数作为 $u=f(x)$，其中 $f(x)$ 是能够求导的；而余下的因子作为 $dv=g(x)dx$，此处 $g(x)$ 是能够积分的.

3. 用微分求 du，用积分求 v.
4. 如果所得到的积分比原来的积分更复杂，则对于 $u=f(x)$ 和 $dv=g(x)dx$ 需另作选择.

再考虑一些例子.

例 1 计算：$\int \ln x\,dx$.

解 注意 $\int (dx/x) = \ln x + C$，但是因为不知道如何求 $\ln x$ 的原函数，所以也就不知道如何求 $\int \ln x\,dx$. 因为我们能微分 $\ln x$，所以令

$$u=\ln x \quad 和 \quad dv = dx.$$

于是

$$du = \frac{1}{x}dx \quad 和 \quad v = x.$$

用分部积分公式得

$$\int \overset{u}{(\ln x)}\,\overset{dv}{(dx)} = \overset{u}{(\ln x)}\,\overset{v}{x} - \int \overset{v}{x}\,\overset{du}{\left(\frac{1}{x}dx\right)}$$

$$= x\ln x - \int dx$$

$$= x\ln x - x + C.$$

■

例 2 计算：$\int x\ln x\,dx$.

解 可试验多种选择，如下所述.

选择 1：令

$$u = 1 \quad 和 \quad dv = x\ln x\,dx.$$

这又回到了原来的积分，我们不知道如何积分 $dv=x\ln x\,dx$，所以不能这样做. 416

选择 2：令

$$u = x\ln x \quad 和 \quad dv = dx.$$

则

$$du = \left[x\left(\frac{1}{x}\right)+1(\ln x)\right]dx \quad 和 \quad v = x.$$
$$= (1+\ln x)dx$$

使用分部积分公式，有

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = (x\ln x)x - \int x(1+\ln x)dx$$
$$= x^2\ln x - \int(x + x\ln x)dx.$$

这个积分看起来比原来的还复杂.

选择 3：令

$$u = \ln x \quad 和 \quad dv = x\,dx.$$

则

$$du = \frac{1}{x}dx \quad 和 \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

使用分部积分公式，有

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = (\ln x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

■

这个选择使我们可以计算该积分.

例 3 计算：$\int x\sqrt{x+1}\,dx$.

解 令

$$u = x \quad 和 \quad dv = (x+1)^{1/2}dx.$$ 417

则

$$du = dx \quad 和 \quad v = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}.$$

2007/08/16

注意，为了积分 dv，利用换元法如下：

$$\int (x+1)^{1/2}dx = \int w^{1/2}dw \qquad \text{换元} \quad w = x+1,\ dw = dx$$

$$= \frac{w^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}w^{3/2} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}.$$

用分部积分公式得到

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = x\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}dx$$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C.$$ ■

例 4 计算：$\int_1^2 \ln x\,dx$.

解

a)首先求不定积分(例 1).

b)然后计算定积分：

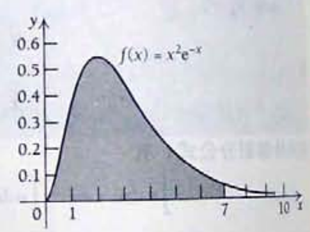
$$\int_1^2 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^2 = (2\ln 2 - 2) - (1\cdot\ln 1 - 1)$$

$$= 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1.$$ ■

重复分部积分法

在某些情况下，我们可能需要多次运用分部积分法.

例 5 为了求阴影区域的面积，计算 $\int_0^7 x^2e^{-x}dx$.



解

a)令

$$u = x^2 \quad \text{和} \quad dv = e^{-x}dx.$$

则

$$du = 2x\,dx \quad \text{和} \quad v = -e^{-x}.$$

用分部积分公式，有

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = x^2(-e^{-x}) - \int -e^{-x}(2x\,dx)$$

$$= -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx.$$

为了计算右边的积分，再次利用用分部积分法公式. 令

$$u = 2x \quad \text{和} \quad dv = e^{-x}dx.$$

则

$$du = 2dx \quad \text{和} \quad v = -e^{-x}.$$

再次使用分部积分公式，得到

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = 2x(-e^{-x}) - \int -e^{-x}(2dx)$$

$$= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

于是原来的积分变成

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.$$

b)现在计算定积分：

$$\int_0^7 x^2e^{-x}dx = [-e^{-x}(x^2+2x+2)]_0^7$$

$$= [-e^{-7}(7^2 + 2(7) + 2)] - [-e^{-0}(0^2 + 2(0) + 2)]$$

$$= -65e^{-7} + 2 \approx 1.94.$$ ■

上机技术演练

练习

1. 用绘图器计算

$$\int_0^7 x^2e^{-x}dx.$$

列表分部积分法

像例 5 中的情况那样，有一个积分

$$\int f(x)g(x)dx,$$

其中 $f(x)$ 容易用反复求导法最终使其导数为 0，函数 $g(x)$ 容易重复积分. 在这种情况下，可多次使用分部积分法来计算积分. 如在例 5 中见到的，这个过程可能很复杂. 当出现这种情况时，可以利用**列表积分法**(tabular integration)，请看例 6 的图解. 418~419

例 6 计算：$\int x^3e^x dx$.

解 令 $f(x) = x^3$，$g(x) = e^x$. 然后作表如下.

$f(x)$ 及多次导数		$g(x)$ 及多次积分
		e^x
x^3	(+)	e^x
$3x^2$	(−)	e^x
$6x$	(+)	e^x
6	(−)	e^x
0		

2007/08/16

于是，沿着箭头把各个乘积带上正负交错的符号再加起来，就得到

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C.$$

习题 5.6

用分部积分法计算下列积分．用微分来验算．

1. $\int 5x e^{5x} dx$
2. $\int 2x e^{2x} dx$
3. $\int x^3 (3x^2 dx)$
4. $\int x^3 (2x dx)$
5. $\int x e^{2x} dx$
6. $\int 2x e^{3x} dx$
7. $\int x e^{-2x} dx$
8. $\int x e^{-x} dx$
9. $\int x^2 \ln x dx$
10. $\int x^3 \ln x dx$
11. $\int x \ln \sqrt{x} dx$
12. $\int x^2 \ln x^3 dx$
13. $\int \ln(x+3) dx$
14. $\int \ln(x+1) dx$
15. $\int (x+2) \ln x dx$
16. $\int (x+1) \ln x dx$
17. $\int (x-1) \ln x dx$
18. $\int (x-2) \ln x dx$
19. $\int x \sqrt{x+2} dx$
20. $\int x \sqrt{x+5} dx$
21. $\int x^2 \ln 2x dx$
22. $\int x^2 \ln 5x dx$
23. $\int x^2 e^x dx$
24. $\int (\ln x)^2 dx$
25. $\int x^2 e^{2x} dx$
26. $\int x^{-5} \ln x dx$
27. $\int x^3 e^{-2x} dx$
28. $\int x^5 e^{4x} dx$
29. $\int (x^4+1) e^{3x} dx$
30. $\int (x^3 - x + 1) e^{-x} dx$

用分部积分法计算下列积分．

31. $\int_1^2 x^2 \ln x dx$
32. $\int_1^2 x^3 \ln x dx$
33. $\int_2^6 \ln(x+3) dx$
34. $\int_0^5 \ln(x+1) dx$
35. $\int_0^1 x e^x dx$
36. $\int_0^1 (x^3 + 2x^2 + 3) e^{-2x} dx$

应用

商业与经济

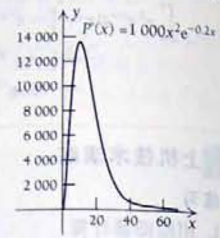
37. 由边际成本确定成本．某公司测定它的边际成本函数为

$$C'(x) = 4x\sqrt{x+3}.$$

已知 $C(13) = 1\ 126.40$ 美元，求总成本．

38. 由边际利润确定利润．某公司测定它的边际利润函数为

$$P'(x) = 1\ 000x^2 e^{-0.2x}.$$



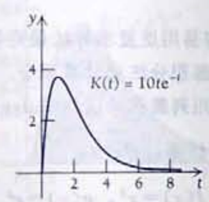
已知 $x=0$ 时 $P=2\ 000$ 美元，求总利润．

生命科学与物理学

39. 电能的消费．某家庭每天电的消费速率(以千瓦小时计)是

$$K(t) = 10te^{-t},$$

其中 t 是时间，以小时计．即 t 在区间[0，24]中．



a) 这个家庭在一天的最初 T 小时($t=0$ 到 $t=T$)内消费了多少千瓦小时的电？

b) 这个家庭在一天的最初 4 小时内消费了多少千瓦小时的电？

40. 药物剂量．假设服用一剂口服药．从那时起，药在体内被吸收然后通过尿液排泄出．经过时间 T 通过体内的药物总量可表示为

$$\int_0^T E(t) dt,$$

其中 E 是药物的排泄速率．一个典型的排泄速率函数是

$$E(t) = te^{-kt},$$

其中 $k>0$，而 t 是时间，以小时计．

a) 用分部积分法求关于

$$\int_0^T E(t) dt$$

的一个公式．

b) 当 $k=0.2$ 毫克/小时时，求

$$\int_0^{10} E(t) dt.$$

综合题

用分部积分法计算下列积分．

41. $\int \sqrt{x} \ln x dx$
42. $\int x^n \ln x dx$
43. $\int \frac{te^t}{(t+1)^2} dt$
44. $\int x^2 (\ln x)^2 dx$
45. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
46. $\int x^n (\ln x)^2 dx$
47. $\int \frac{13t^2 - 48}{\sqrt[5]{4t+7}} dt$
48. $\int (27x^3 + 83x - 2) \sqrt[6]{3x+8} dx$
49. 证明对任何正整数 n，

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx.$$

50. 证明对任何正整数 n，

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx.$$

*51. 下式是否确定了一个定理：

$$\int f(x) g(x) = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx.$$

请予说明．

*52. 比较微分和积分过程．哪一个看起来更复杂或更困难一些？为什么？

上机技术演练

53. 使用绘图器计算

$$\int_1^{10} x^5 \ln x dx.$$

5.7 积分法：积分表

要点

- 利用积分公式表计算积分．

积分公式表

或许你已经注意到，一般而言，积分要比微分更困难和需要更多的“技巧”．正因为如此，人们把实用的和/或重要的积分公式收集成一个表列在下面以及书后．表 1 就是这样的一个表，尽管它比较简略．关于积分法公式的完整书籍在图书馆中可以找到，此外在数学手册中也可找到较详细的积分公式表．这样的表通常是按照被积函数形式分类的．要想办法使问题中的积分与积分表中的某个公式相对应．除了积分表之外，有时可能还需要一些代数知识或者诸如换元积分或分部积分那样的技巧．

表 1 积分公式

(凡是使用 $\ln x$ 的地方都假设 $x>0$．)

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
3. $\int u dv = uv - \int v du$	4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + C$	6. $\int x e^{ax} dx = \frac{1}{a^2} \cdot e^{ax}(ax-1) + C$

2007/08/16

（续）

420～422

7. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx + C$

8. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

9. $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}dx + C, n \neq -1$

10. $\int x^n \ln x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C, n \neq -1$

11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C$

14. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$

15. $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$

16. $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}dx = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right) + C$

17. $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C, 0 < x < a$

18. $\int \frac{x}{ax+b}dx = \frac{b}{a^2} + \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b) + C$

19. $\int \frac{x}{(ax+b)^2}dx = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(ax+b) + C$

20. $\int \frac{1}{x(ax+b)}dx = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right) + C$

21. $\int \frac{1}{x(ax+b)^2}dx = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right) + C$

22. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2 \pm a^2}] \pm a^2\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})] + C$

23. $\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{15b^2}(3bx - 2a)(a+bx)^{3/2} + C$

24. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{105b^3}(15b^2x^2 - 12abx + 8a^2)(a+bx)^{3/2} + C$

25. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{3b^2}(bx - 2a)\sqrt{a+bx} + C$

26. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{15b^3}(3b^2x^2 - 4abx + 8a^2)\sqrt{a+bx} + C$

例1　计算

423

$$\int \frac{dx}{x(3-x)}.$$

解　这个积分符合表1中的公式20：

$$\int \frac{1}{x(ax+b)}dx = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right) + C.$$

在所求的积分中，$a=-1$，$b=3$. 因此，根据公式有

$$\int \frac{1}{x(3-x)}dx = \int \frac{dx}{x(-1 \cdot x + 3)}$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x}{-1 \cdot x + 3}\right) + C = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x}{3-x}\right) + C.$$ ■

例2　计算：

$$\int \frac{5x}{7x-8}dx.$$

解　如果先把因数5提到积分之外，则这个积分符合表1中的公式18：

$$\int \frac{x}{ax+b}dx = \frac{b}{a^2} + \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b) + C.$$

在所求的积分中，$a=7$，$b=-8$. 因此，根据公式有

$$\int \frac{5x}{7x-8}dx = 5\int \frac{x}{7x-8}dx = 5\left[\frac{-8}{7^2} + \frac{x}{7} - \frac{-8}{7^2}\ln(7x-8)\right] + C$$

$$= 5\left[\frac{-8}{49} + \frac{x}{7} + \frac{8}{49}\ln(7x-8)\right] + C$$

$$= -\frac{40}{49} + \frac{5x}{7} + \frac{40}{49}\ln(7x-8) + C.$$ ■

例3　计算：

$$\int \sqrt{16x^2 + 3}dx.$$

解　这个积分近乎符合表1中的公式22：

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})\right] + C.$$

但是x^2的系数必须是1. 为了达到此要求，首先把因数16提出来，然后再使用表1中的公式22：

$$\int \sqrt{16x^2+3}dx = \int \sqrt{16\left(x^2 + \frac{3}{16}\right)}dx = \int 4\sqrt{x^2 + \frac{3}{16}}dx = 4\int \sqrt{x^2 + \frac{3}{16}}dx$$ 424

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + \frac{3}{16}} + \frac{3}{16}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{3}{16}}\right)\right] + C$$

$$= 2\left[x\sqrt{x^2 + \frac{3}{16}} + \frac{3}{16}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{3}{16}}\right)\right] + C.$$

在本题的积分中，$a^2 = 3/16$，因而$a = \sqrt{3}/4$. 不过在应用公式时并不需要使用a的这种形式. ■

例4　计算：

$$\int \frac{dx}{x^2 - 25}.$$

解　这个积分符合表1中的公式14：

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C.$$

在所求的积分中，$a=5$. 因此，根据公式有

$$\int \frac{dx}{x^2 - 25} = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{x-5}{x+5}\right) + C.$$ ■

例5　计算：

$$\int (\ln x)^4 dx.$$

解　这个积分符合表1中的公式9：

2007/08/16

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx + C, n \neq -1.$$

必须三次应用这个公式：

$$\int (\ln x)^3 dx = x(\ln x)^3 - 3\int (\ln x)^2 dx + C \qquad \text{公式 9}$$

$$= x(\ln x)^3 - 3\left[x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx\right] + C \qquad \text{再利用公式 9}$$

$$= x(\ln x)^3 - 3\left[x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int dx\right)\right] + C \qquad \text{三次利用公式 9}$$

$$= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C.$$ ■

如果访问因特网，可使用这个网址

可以使用下列的网址来求积分：www. integrals. com.

425 检验例 1～5 或做下面的习题.

习题 5.7

利用表 1 计算下列积分.

1. $\int xe^{-3x} dx$
2. $\int 2xe^{3x} dx$
3. $\int 5^x dx$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} dx$
5. $\int \frac{1}{16-x^2} dx$
6. $\int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$
7. $\int \frac{x}{5-x} dx$
8. $\int \frac{x}{(1-x)^2} dx$
9. $\int \frac{1}{x(5-x)^2} dx$
10. $\int \sqrt{x^2+9} dx$
11. $\int \ln 3x dx$
12. $\int \ln \frac{4}{5} x dx$
13. $\int x^4 \ln x dx$
14. $\int x^3 e^{-2x} dx$
15. $\int x^3 \ln x dx$
16. $\int 5x^4 \ln x dx$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}$
18. $\int \frac{3dx}{x\sqrt{1-x^2}}$
19. $\int \frac{10dx}{x(5-7x)^2}$
20. $\int \frac{2}{5x(7x+2)} dx$
21. $\int \frac{-5}{4x^2-1} dx$
22. $\int \sqrt{9t^2-1} dt$
23. $\int \sqrt{4m^2+16} dm$
24. $\int \frac{3\ln x}{x^2} dx$
25. $\int \frac{-5\ln x}{x^3} dx$
26. $\int (\ln x)^4 dx$
27. $\int \frac{e^x}{x^{-3}} dx$
28. $\int \frac{3}{\sqrt{4x^2+100}} dx$
29. $\int x\sqrt{1+2x} dx$
30. $\int x\sqrt{2+3x} dx$

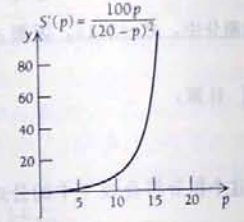
应用

商业与经济

31. 由边际供给确定供给．一家草坪机器公司引进一种新型的草坪播种机．公司发现，关于这种播种机的边际供给函数满足

$$S'(p) = \frac{100p}{(20-p)^2}, \quad 0 \leqslant p \leqslant 19,$$

其中，S 是每台播种机价格为 p 千美元时所购买的数量．已知当价格是 19 千美元时，公司将销售 2 000 台播种机，求供给函数 $S(p)$.

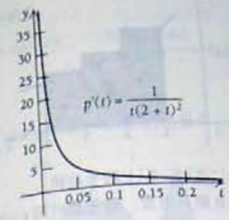


社会科学

32. 学习速率．在一条新装配线上一位雇员学会某项任务的概率的变化率为

$$p'(t) = \frac{1}{t(2+t)^2},$$

其中 p 是在时间 t(以月计)后学会该项任务的概率．已知当 $t=2$ 时 $p=0.826\ 7$，求函数 $p(t)$.



概要与复习

关键术语

Antiderivative(原函数)，364
Integration(积分法)，365
Indefinite integral(不定积分)，365
Area(面积)，373
Definite integral(定积分)，380
Limits of integration(积分限)，380
Summation notation(和号)，387
Fundamental Theorem of Integral Calculus(积分学基本定理)，389
Average value(平均值)，394
Trapezoidal Rule(梯形法则)，400
Integration by substitution(换元积分法)，408
Integration by parts(分部积分法)，414
Tabular integration by parts(列表分部积分法)，419
Integration using tables(利用积分表积分)，422

复习题

这些复习题是为测验准备的，它们也可以用作不限时间的练习测验．答案在书后，答案中还包括方括号内的参考章节．它告诉你，如果你的答案不正确，应该再学习哪个章节.

计算下列积分.

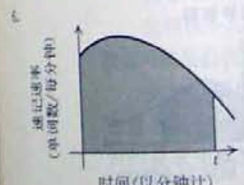
1. $\int 24x^5 dx$
2. $\int (3e^x+2) dx$
3. $\int \left(3t^2+7t+\frac{1}{t}\right) dt$

求在指定的区间上曲线下的面积.

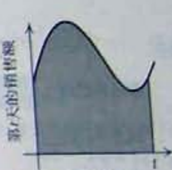
4. $y=4-x^2$；$[-2, 1]$
5. $y=x^2+3x+6$；$[0, 2]$

在每种情况下，给出阴影区域的两种解释.

6.



7.

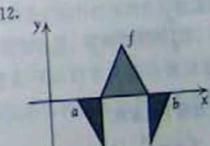


计算下列积分.

8. $\int_a^b x^5 dx$
9. $\int_{-1}^{1} (x^3 - x^4) dx$
10. $\int_0^1 (e^x + x) dx$
11. $\int_1^e \frac{2}{x} dx$

确定 $\int_a^b f(x) dx$ 是正的、负的还是零.

12.



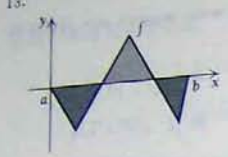
综合题

使用表 1 或网址 www.integrals.com 计算下列积分.

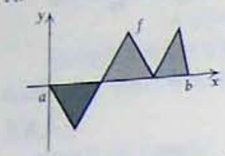
33. $\int \frac{8}{3x^2-2x} dx$
34. $\int \frac{x dx}{4x^2-12x+9}$
35. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+4x}$
36. $\int e^x \sqrt{e^{2x}+1} dx$
37. $\int \frac{-e^{-2x} dx}{9-6e^{-x}+e^{-2x}}$
38. $\int \frac{\sqrt{(\ln x)^2+49}}{2x} dx$ 426

2007/08/16

13.



14.



15. 求以 $y=3x^2$ 和 $y=9x$ 为边界的区域的面积.

利用换元法计算下列积分. 不使用表 1.

16. $\int x^3 e^{x^4} dx$　　17. $\int \frac{24t^3}{4t^4+3} dt$

18. $\int \frac{\ln 4x}{2x} dx$　　19. $\int 2e^{-3x} dx$

利用分部积分法计算下列积分. 不使用表 1.

20. $\int 3xe^{3x} dx$　　21. $\int \ln \sqrt[3]{x^2} dx$

22. $\int 3x^2 \ln x dx$

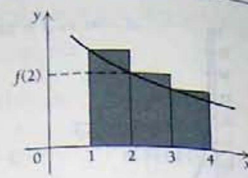
利用表 1 计算下列积分.

23. $\int \frac{1}{49-x^2} dx$　　24. $\int x^2 e^{3x} dx$

25. $\int \frac{x}{7x+1} dx$　　26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-36}}$

27. $\int x^6 \ln x dx$　　28. $\int xe^{8x} dx$

29. 计算每个长方形的面积，精确到三位小数，然后相加，以此作为 $\int_1^5 (2/x) dx$ 的近似值.



30. 求 $y=xe^{-x}$ 在[0，2]上的平均值.

31. 一个质点从原点出发. 在任意时间 $t \geq 0$，其速度由 $v(t)=3t^2+2$ 给出. 求质点在最初 4 小时(由 $t=0$ 到 $t=4$)内运行的距离.

32. 商业：累积销售额. 某公司估计其销售额将依照函数 $S'(t)=3e^{2t}$ 连续地增长，此处 $S'(t)$ 是在第 t 天的销售额，以美元计. 求最初 4 天的累积销售额.

使用任意方法积分.

33. $\int x^3 e^{0.1x} dx$　　34. $\int \frac{12t^2}{4t^3+7} dt$

35. $\int \frac{x dx}{\sqrt{4+5x}}$　　36. $\int 5x^4 e^{x^5} dx$

37. $\int \frac{dx}{x+9}$　　38. $\int t^7 (t^8+3)^{11} dt$

39. $\int \ln 7x dx$　　40. $\int x \ln 8x dx$

综合题

计算下列积分.

41. $\int \frac{t^4 \ln(t^5+3)}{t^5+3} dt$　　42. $\int \frac{dx}{e^x+2}$

43. $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$　　44. $\int x^{91} \ln x dx$

45. $\int \ln\left(\frac{x-3}{x-4}\right) dx$　　46. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^4}$

上机技术演练

47. 使用绘图器近似计算下列曲线之间的面积.

$$y=2x^2-2x,$$
$$y=12x^2-12x^3,$$
$$x=0,\quad x=1.$$

测验

计算下列积分.

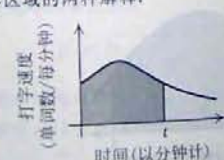
1. $\int dx$　　2. $\int 1\,000x^4 dx$

3. $\int \left(e^x+\frac{1}{x}+x^{1/3}\right) dx$

求在指定的区间上曲线下的面积.

4. $y=x-x^2$;[0,1]　　5. $y=\frac{4}{x}$;[1,3]

6. 给出阴影区域的两种解释.

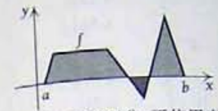


计算下列积分.

7. $\int_{-1}^{2} (2x+3x^2) dx$　　8. $\int_0^1 e^{-2x} dx$

9. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x}$

10. 确定 $\int_a^b f(x) dx$ 是正的、负的还是零.



利用换元法计算下列积分. 不使用表 1.

11. $\int \frac{dx}{x+11}$　　12. $\int e^{-0.5x} dx$

13. $\int t^3 (t^4+1)^9 dt$

利用分部积分法计算下列积分. 不使用表 1.

14. $\int xe^{2x} dx$　　15. $\int x^3 \ln x^4 dx$

利用表 1 计算下列积分.

16. $\int 2^x dx$　　17. $\int \frac{dx}{x(7-x)}$

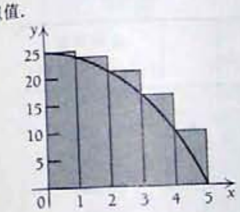
18. 求 $y=4t^3+2t$ 在[−1,2]上的平均值.

19. 求以 $y=x, y=x^3, x=0$ 和 $x=1$ 为边界的区域的面积.

20. 计算每个长方形的面积，然后相加，以此作为

$$\int_0^5 (25-x^2) dx$$

的近似值.



21. 商业：由边际成本确定成本. 某空调公司测定第 x 台空调的边际成本为

$$C'(x)=-0.2x+500,\quad C(0)=0.$$

求生产 100 台空调的总成本.

22. 社会科学：学习曲线. 在 4 分钟内一个打字员的速度为

$$W(t)=-6t^2+12t+90,\quad t\in[0,4],$$

其中 $W(t)$ 是在时间 t 的速度，以每分钟单词数计. 试问在第 2 分钟内(由 $t=1$ 到 $t=2$)打了多少个单词?

使用任意方法积分.

23. $\int \frac{dx}{x(10-x)}$　　24. $\int x^3 e^x dx$

25. $\int x^5 e^{x^6} dx$　　26. $\int \sqrt{x} \ln x dx$

27. $\int x^3 \sqrt{x^2+4} dx$　　28. $\int \frac{dx}{64-x^2}$

29. $\int x^4 e^{-0.1x} dx$　　30. $\int x \ln 13x dx$

综合题

计算下列积分.

31. $\int \frac{[(\ln x)^3-4(\ln x)^2+5]}{x} dx$

32. $\int \ln\left(\frac{x+3}{x+5}\right) dx$　　33. $\int \frac{8x^3+10}{\sqrt[3]{5x-4}} dx$

上机技术演练

34. 使用绘图器近似计算下列曲线之间的面积.

$$y=3x-x^2,$$
$$y=2x^3-x^2-5x,$$
$$x=-2,\quad x=0.$$

上机技术的深入应用

关于 Sherwin-Willams、Intel、Debrand 和 The Gap 公司的财务预测

公司领导人的众多任务之一是关于反映公司财务状况的各种数据的分析. 数据可能是总收益、总成本、经营费用、经营收益、销售和推销成本，等等.

这种数据的一个非常重要的用途是可以对未来做出预报或预测. 在这个应用中，将要求你分析一些真实公司的实际数据，作曲线拟合，为的是求出模型并且做出预测.

427 ~ 429

2007/08/16

练习 Sherwin-Williams 公司专门从事多种类型的涂料生产和喷涂. 下面的表列出 Sherwin-Williams 公司一些年度的总销售额.

年	x	总销售额（以百万美元计）	年	x	总销售额（以百万美元计）
1990	0	2 267	1996	6	4 133
1991	1	2 541	1997	7	4 881
1992	2	2 748	1998	8	4 934
1993	3	2 949	1999	9	5 004
1994	4	3 100	2000	10	5 212
1995	5	3 274			

资料来源：Sherwin-Williams Annual Financial Reports.

1. 作出数据的散射图. 线性函数、二次函数、三次多项式、四次多项式、指数函数或对数函数中的哪一类看起来与这组数据拟合得最好?

2. 使用绘图器上的 **REGRESSION** 选项求所选择的函数与这组数据拟合.

3. 使用所得的函数预测 Sherwin-Williams 公司在 2005 年、2010 年和 2015 年的总销售额.

4. 使用积分法预测公司由 1990 年到 2020 年的总销售额.

Intel 公司是一家专门从事微处理器和其他半导体产品的公司, 例如计算机芯片. 在该公司占有领先地位的是个人计算机销售额的增长. 下面的表列出 Intel 公司一些年度的总销售额.

年	x	总销售额（以百万美元计）	年	x	总销售额（以百万美元计）
1986	0	1 265	1993	7	8 782
1987	1	1 907	1994	8	11 521
1988	2	2 875	1995	9	16 202
1989	3	3 127	1996	10	20 847
1990	4	3 921	1997	11	25 070
1991	5	4 779	1998	12	26 273
1992	6	5 844	1999	13	29 389

资料来源：Intel Annual Financial Reports.

5. 作出数据的散射图. 在线性函数、二次函数、三次多项式、四次多项式、指数函数或对数函数中, 哪一类与这组数据拟合得最好?

6. 使用绘图器上的 **REGRESSION** 选项求所选择的函数与这组数据拟合.

7. 使用所得的函数预测 Intel 公司在 2005 年、2010 年和 2015 年的总销售额.

8. 使用积分法预测公司由 1990 年到 2020 年的总销售额.

DeBrand 公司是一家专门生产和销售高档巧克力的小私人经营公司. 下面的表给出了 DeBrand 公司一些年度的总销售额.

年	x	总销售额（以千美元计）	年	x	总销售额（以千美元计）
1995	0	42.3	1999	4	101.5
1996	1	47.9	2000	5	126.9
1997	2	75.2	2001	6	124.7
1998	3	83.2			

9. 作出数据的散射图. 在线性函数、二次函数、三次多项式、四次多项式、指数函数或对数函数中, 哪一类与这组数据拟合得最好?

10. 使用绘图器上的 **REGRESSION** 选项求所选择的函数与这组数据拟合.

11. 使用所得的函数预测 DeBrand 公司在 2005 年、2010 年和 2015 年的总销售额.

12. 使用积分法预测公司由 1990 年到 2020 年的总销售额.

The Gap 公司是一家在私人商标名称下销售休闲服装的专门经销商. 下面的表列出 The Gap 公司一些年度的总销售额.

年	x	总销售额（以 10 亿美元计）	年	x	总销售额（以 10 亿美元计）
1991	0	2.5	1997	6	6.5
1992	1	3.0	1998	7	9.1
1993	2	3.3	1999	8	11.6
1994	3	3.7	2000	9	13.7
1995	4	4.4	2001	10	13.9
1996	5	5.3			

资料来源：The Gap Annual Financial Reports.

13. 作出数据的散射图. 在线性函数、二次函数、三次多项式、四次多项式、指数函数或对数函数中, 哪一类与这组数据拟合得最好?

14. 使用绘图器上的 **REGRESSION** 选项求所选择的函数与这组数据拟合.

15. 使用所得的函数预测 The Gap 公司在 2005 年、2010 年和 2015 年的总销售额.

16. 使用积分法预测公司由 1990 年到 2020 年的总销售额.

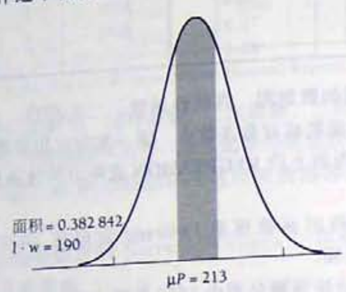
第 6 章 积分的应用

应用 在写这本书的时候，作者的保龄球分数 S 服从均值 201 和标准差 23 的正态分布. 求分数在 190 到 213 间的概率.

为了求此概率，计算积分

$$P(190 \leqslant x \leqslant 213) = \int_{190}^{213} \frac{1}{23\sqrt{2\pi}} e^{-1/2[(x-201)/23]^2} \, dx.$$

借助于本书后面的表 2 作这个积分，求得它约等于 0.383.



这个问题出现在习题 6.5 的 54 题中.

引言 在这一章中，将研究积分的各种应用. 首先考虑消费者盈余与生产者盈余的经济学应用，然后研究涉及指数增长和指数衰减函数的积分. 我们将看到积分不只在商业上有应用，而且在诸如资源消耗和大气中放射性物质的累积这样的环境问题上也有应用. 积分法广泛应用于概率统计、求体积，以及许多涉及微分方程解的场合.

433 可按照学生和课程的需要选学本章的相关内容.

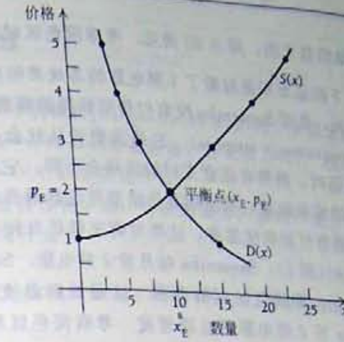
6.1 经济应用：消费者盈余与生产者盈余

要点

- 已知供给函数与需求函数，求在平衡点处的消费者盈余和生产者盈余.

为方便起见，前面把供给和需求看成是数量，该数量是价格的函数. 对于本节来说，也是为了方便，又把它们看成是价格，该价格是数量的函数：$p=D(x)$ 和 $p=S(x)$. 实际上，在经济学研究中这样解释是很常见的.

消费者需求曲线，如 $p=D(x)$，给出了消费者购买 x 件商品愿意支付的需求单价. 它通常是一个递减函数. 生产者供给曲线，如 $p=S(x)$，给出了经营者愿意供给 x 件商品的单价. 它通常是一个递增函数. 平衡点 (x_E, P_E) 是这两条曲线的交点.



上机技术演练

练习

1. 使用具有 Yscl=5 的视窗[0, 5, 0, 30]作出供给函数与需求函数

$$D(x) = (x-5)^2 \quad 与$$
$$S(x) = x^2 + x + 3$$

的图形. 利用 **INTERSECT** 选项求平衡点.

效用是经济学中经常考虑的一个函数. 当一个消费者获得 x 件产品时，也就得到了某种满意度或效用 U(见习题 2.3 中的 15 题). 例如，在一个月中你所看的电影数会给你某种效用. 如果你看了 4 部电影(假设没有不愉快的电影)，你得到的效用比没看电影要多. 同样的理念也适用于到饭店中进餐或支付你的取暖费.

为了有助于解释消费者盈余和生产者盈余的概念，我们将考虑在一定的时间内，比如 1 个月内，看电影的效用. 同时还假设所看的电影具有几乎相同的质量.

假设图 1 和图 2 给出的是大学生对电影的需求曲线. 我们仅对一位学生(例如 Samantha)考虑这条曲线，而且考察她从看电影所获得的效用. 如果价格是 10 美元，Samantha 每月去看 0 部电影. 如果价格是 8.80 美元，她每月去看 1 部电影. 假如她去看 1 部电影，则她的总支出是 8.80·1 美元，或 8.80 美元，如图 1 所示. 434

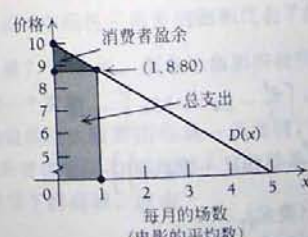


图 1

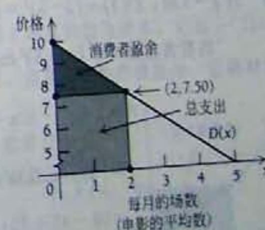
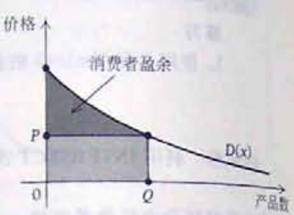


图 2

2007/08/16

浅色区域的面积表示她的总支出，即 8.80 美元. 考察深色区域的面积. 它是$\frac{1}{2}$(1)(1.20)
美元，或 0.60 美元. 曲线下的总面积是对看了 1 部电影的总效用的度量，且为 9.40 美元. 深色区域的面积，即 0.60 美元，是对 Samantha 没有付费而获得的满意程度的度量. 经济学家把这个量定义为**消费者盈余**(consumer's surplus). 它是消费者从社会生活中获得的效用；在社会生活中，当购买较多的商品时，消费者愿意支付的价格会下降. 它是从这次购买中获得的额外效用. 消费者盈余是商家的营业收益，商家用其价格差异优惠消费者，比如，对大学生、老人和儿童提供折价商品，或销售打折的优惠券，这些对商家都是有利可图的.

假设当价格是 7.50 美元时(图 2)，Samantha 每月看 2 部电影. Samantha 实际支付的总费用是 7.50(2)美元，或 15 美元，即浅色区域的面积. 这是她的总支出. 曲线下的总面积是 17.50 美元，这表示 Samantha 看 2 部电影的总满意度. 考察深色区域的面积. 它(消费者盈余)是$\frac{1}{2}$(2)(2.50)美元，或 2.50 美元. 它是 Samantha 没有付费所获得的效用的度量.



假设需求函数的图形是一个曲线，如右图所示. 如果当价格是 P 的时候，Samantha 去看了 Q 部电影，则 Samantha 的总支出是 QP. 曲线下的总面积是所获得的总效用或总满意度，它是

$$\int_0^Q D(x)\,dx.$$

消费者盈余是曲线下的总面积减总支出(数量乘价格，即 QP)，因此它是总效用减总成本，由

435

$$\int_0^Q D(x)\,dx - QP$$

给出.

定义 假设 $p=D(x)$ 描述了某种商品的需求函数，则关于点(Q, P)的**消费者盈余**(consumer's surplus)定义为

$$\int_0^Q D(x)\,dx - QP.$$

例 1 对于需求函数 $D(x)=(x-5)^2$，求当 $x=3$ 时的消费者盈余.

解 当 $x=3$ 时，$D(3)=(3-5)^2=(-2)^2=4$. 于是

$$\begin{aligned}\text{消费者盈余} &= \int_0^3 (x-5)^2\,dx - 3\cdot 4\\ &= \int_0^3 (x^2-10x+25)\,dx - 12 = \left[\frac{x^3}{3}-5x^2+25x\right]_0^3 - 12\\ &= \left[\left(\frac{3^3}{3}-5(3)^2+25(3)\right)-\left(\frac{0^3}{3}-5(0)^2+25(0)\right)\right]-12\\ &= (9-45+75)-0-12 = 27(\text{美元}).\end{aligned}$$

■

上机技术演练

探索

使用具有 Yscl=5 的视窗[0, 5, 0, 30]作出例 1 中需求函数 $D(x)=(x-5)^2$ 的图形. 为了求在 $x=3$ 时的消费者盈余，首先求 $D(3)$. 然后作出 $y=D(3)$的图形. $y=D(x)$和 $y=D(3)$的交点是什么?

由交点画一条竖直线到 x 轴. 得到的矩形的面积代表什么? 在水平线之上而曲线之下的面积代表什么?

现在来考察电影的供给曲线，如图 3 和图 4 所示. 当每场电影的价格是 0 美元时，放映者愿意供给 0 部电影.

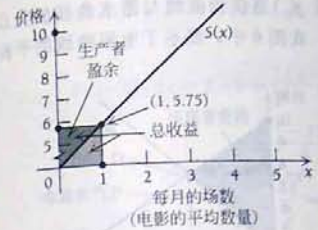


图 3

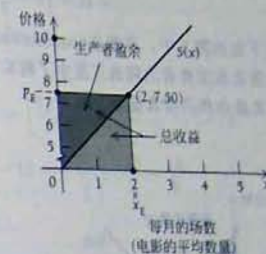
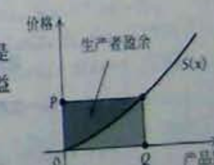


图 4

436

当每场电影价格为 5.75 美元时，放映者愿意供给 1 部电影，并且得到总收益 1(5.75)美元，或5.75 美元. 图 3 中浅色三角形的面积代表了放映者提供 1 部电影的总成本，它是$\frac{1}{2}$(1)(5.75)美元，或 2.875 美元. 深色三角形的面积也是 2.875 美元，而且它代表超出成本的盈余. 它是对利润的贡献. 经济学家把这个数称为**生产者盈余**(producer's surplus). 它是生产者的效用或满意度，当价格增长时社会生产者将会供给更多数量的商品. 当消费者沿着生产者的供给曲线不能购买到特定的商品时，它是生产者获得的额外收益.

当价格为 7.50 美元时，放映者愿意供给 2 部电影，并且得到总收益 2(7.50)美元，或 15 美元. 图 4 中浅色三角形的面积代表了放映者实际提供 2 部电影的总成本，它是$\frac{1}{2}$(2)(7.50)美元，或 7.50 美元. 深色三角形的面积也是 7.50 美元，而且它是生产者盈余. 它是对生产者利润的一个贡献.



假设供给函数的图形是一条曲线，如右图所示. 如果价格是 P，放映者将提供 Q 部电影. 总收益是 QP. 生产者盈余是总收益减去曲线下的面积，这由

$$QP - \int_0^Q S(x)\,dx$$

2007/08/16

给出.

定义 假设 $p=S(x)$ 是某商品的供给函数，则对于点 (Q, P) 的**生产者盈余**(producer's surplus)定义为

$$QP-\int_0^Q S(x)\,dx.$$

例2 对于 $S(x)=x^2+x+3$，求当 $x=3$ 时的生产者盈余.

解 当 $x=3$ 时，$S(3)=3^2+3+3=15$. 于是

$$\text{生产者盈余}=3\cdot 15-\int_0^3(x^2+x+3)\,dx=45-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^3$$

$$=45-\left[\left(\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+3(3)\right)-\left(\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}+3(0)\right)\right]$$

$$=45-\left(9+\frac{9}{2}+9-0\right)=22.50(\text{美元}).$$ ■

437 在下面的图5中，**平衡点**(equilibrium point)(x_E, p_E) 是供给曲线与需求曲线的交点. 此时，经营者和消费者之间真正发生了购买和销售活动. 在图6中，展示了电影曲线的平衡点以及生产者盈余和消费者盈余.

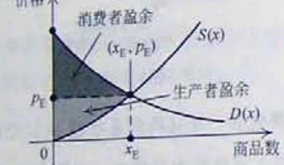


图 5

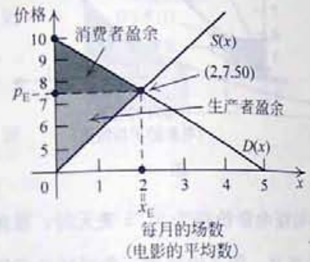


图 6

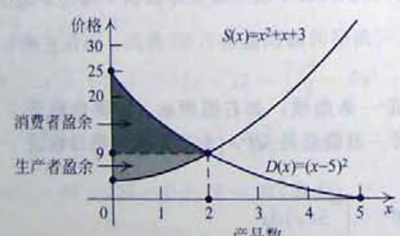
例3 已知

$$D(x)=(x-5)^2 \quad 和 \quad S(x)=x^2+x+3.$$

a)求平衡点.

b)求平衡点处的消费者盈余.

c)求平衡点处的生产者盈余.



■

解

a)为了求平衡点，令 $D(x)=S(x)$ 并求解：

$$\begin{aligned}(x-5)^2&=x^2+x+3\\ x^2-10x+25&=x^2+x+3\\ -10x+25&=x+3\\ 22&=11x\\ 2&=x.\end{aligned}$$

因此，$x_E=2$. 为了求 p_E，把 x_E 代入 $D(x)$ 或 $S(x)$. 如果选择 $D(x)$，则

$$p_E=D(x_E)=D(2)=(2-5)^2=(-3)^2=9(\text{美元/件}).$$

因此，平衡点是 $(2, 9)$.

b)在平衡点处的消费者盈余是

$$\int_0^{x_E}D(x)\,dx-x_E p_E,$$ 438

或

$$\int_0^2(x-5^2)\,dx-2\cdot 9=\left[\frac{(x-5)^3}{3}\right]_0^2-18=\left[\frac{(2-5)^3}{3}-\frac{(0-5)^3}{3}\right]-18$$

$$=\frac{(-3)^3}{3}-\frac{(-5)^3}{3}-18=-\frac{27}{3}+\frac{125}{3}-\frac{54}{3}$$

$$=\frac{44}{3}\approx 14.67(\text{美元}).$$

c)在平衡点处的生产者盈余是

$$x_E p_E-\int_0^{x_E}S(x)\,dx,$$

或

$$2\cdot 9-\int_0^2(x^2+x+3)\,dx=2\cdot 9-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^2$$

$$=18-\left[\left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+3\cdot 2\right)-\left(\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}+3\cdot 0\right)\right]$$

$$=18-\left(\frac{8}{3}+2+6\right)=\frac{22}{3}\approx 7.33(\text{美元}).$$ ■

习题 6.1

对1~14题，求(a)平衡点，(b)在平衡点处的消费者盈余，(c)在平衡点处的生产者盈余.

1. $D(x)=-\frac{5}{6}x+10$，$S(x)=\frac{1}{2}x+2$
2. $D(x)=-3x+6$，$S(x)=2x+1$
3. $D(x)=(x-4)^2$，$S(x)=x^2+2x+6$
4. $D(x)=(x-3)^2$，$S(x)=x^2+2x+1$
5. $D(x)=(x-6)^2$，$S(x)=x^2$
6. $D(x)=(x-8)^2$，$S(x)=x^2$
7. $D(x)=1\,000-10x$，$S(x)=250+5x$
8. $D(x)=8\,800-30x$，$S(x)=7\,000+15x$
9. $D(x)=5-x$，$0\leqslant x\leqslant 5$；$S(x)=\sqrt{x+7}$
10. $D(x)=7-x$，$0\leqslant x\leqslant 7$；$S(x)=2\sqrt{x+1}$
11. $D(x)=\frac{100}{\sqrt{x}}$，$S(x)=\sqrt{x}$
12. $D(x)=\frac{1\,800}{\sqrt{x+1}}$，$S(x)=2\sqrt{x+1}$

2007/08/16

综合题

13. $D(x)=e^{-x+4.5}$，$S(x)=e^{x-5.5}$
14. $D(x)=\sqrt{56-x}$，$S(x)=x$

*15. 对经济学书中关于消费者盈余的内容作一些研究，写一个简短的描述.

*16. 对经济学书中关于生产者盈余的内容作一些研究，写一个简短的描述.

上机技术演练

作出每一对供给函数和需求函数的图形．然后：

a)使用 **INTERSECT** 选项或其他能够求交点的选项求平衡点.

b)再作出 $y=D(x_E)$ 的图形，并画出消费者盈余和生产者盈余的阴影区域.

c)求消费者盈余.

d)求生产者盈余.

17. $D(x)=(x-4)^2$，$S(x)=x^2+2x+6$
18. $D(x)=5-x$，$S(x)=\sqrt{x+7}$
19. **蹦极跳**．Reggie 爱去蹦极跳．下面的表中给出了每月的次数(每次半小时)，这是 Reggie 所愿意的各种不同价格做蹦极跳的次数.

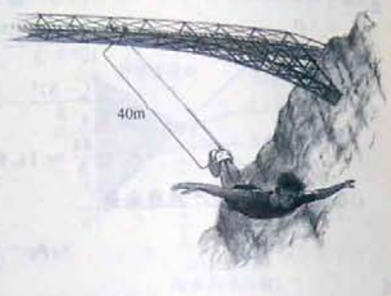
a)作这些数据的散点图，并且确定你认为能与这些数据拟合得最好的函数类型.

b)使用 **REGRESSION** 选项求一个函数与这些数据拟合.

c)如果 Reggie 选择每个月 6 次(每次半小时)的方案去做蹦极跳，他的消费者盈余是多少?

d)在每半小时 11.50 美元的价格下，Reggie 的消费者盈余是多少?

每月的次数 (每次半小时)	价格 (每半小时美元数)
8	2.50
7	5.00
6	7.50
5	10.00
4	12.50
3	15.00
2	17.50
1	20.00



6.2　模型 $\int_0^T P_0e^{kt}dt$ 和 $\int_0^T P_0e^{-kt}dt$ 的应用

要点

- 求永续复利和连续资金流量.
- 求自然资源的总消耗.
- 求投资的现值.
- 求投资的累积现值.

回顾指数增长的基本模型(见 4.3 节)：

$$P'(t)=2k\cdot P(t),\quad 或\quad \frac{dP}{dt}=kp,\quad 此处当\ t=0\ 时, P=P_0.$$

439 ~ 440

满足方程的函数是

$$P(t)=P_0e^{kt}. \tag{1}$$

式(1)的一个应用是计算一个储蓄账户按永续复利 k 的初始投资 P_0 在 t 年后的结存.

例 1　商业：投资的增长．初始投资 1 000 美元，永续复利是 8%，求 3 年后储蓄账户的结存.

解　利用式(1)，且 $k=0.08$，$t=3$ 和 $P_0=1\ 000$ 美元，得到

$$P(3)=1\ 000e^{0.08(3)}=1\ 000e^{0.24}=1\ 000(1.271\ 249)\approx 1\ 271.25(美元).$$

在 3 年后账户结存约为 1 271.25 美元. ■

上机技术演练

练习

1. 使用具有 Xscl=1 和 Yscl=100 的视窗[0, 3, 0, 1 500]作出例 1 中的函数 $f(x)=1\ 000e^{0.08x}$ 的图形．然后求 $x=0$，1，2 和 3 时的函数值.

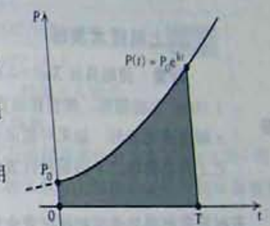
积分 $\int_0^T P_0e^{kt}dt$

考虑在区间[0, T]上 P_0e^{kt} 的积分：

$$\int_0^T P_0e^{kt}dt=\left[\frac{P_0}{k}\cdot e^{kt}\right]_0^T=\frac{P_0}{k}(e^{kT}-e^{k\cdot 0})=\frac{P_0}{k}(e^{kT}-1).$$

于是得到这个积分的一个公式

$$\int_0^T P(t)dt=\int_0^T P_0e^{kt}dt=\frac{P_0}{k}(e^{kT}-1). \tag{2}$$



我们知道这个公式表示在区间[0, T]上 $P(t)=P_0e^{kt}$ 的图形下的面积.

在这一节的余下部分，考虑这个积分的另外两个应用或解释.

连续资金流量

假设资金按 8%的永续复利以每年 1 000 美元的速率不断流入一个储蓄账户之内．这意味着，经过很短的时间 dt，银行就要付给直到此刻(因为 $t=0$)账户中累积的所有资金的利息．经过时间 dt 支付的金额是

$$1\ 000e^{0.08t}dt(美元).$$

假如需要求在 5 年期间中所有这些金额的累积．这个累积由下面积分给出：

$$\int_0^5 1\ 000e^{0.08t}dt=\left[\frac{1\ 000}{0.08}e^{0.08t}\right]_0^5=12\ 500(e^{0.08(5)}-e^{0.08(0)})$$
$$=12\ 500(e^{0.4}-1)=12\ 500(1.491\ 825-1)$$
$$\approx 6\ 147.81(美元).$$

441

上机技术演练

练习

1. 计算积分

$$\int_0^5 1\ 000e^{0.08x}dx.$$

说明答案表示什么.

2007/08/16

经济学家称 6 147.81 美元为连续资金流量．在这种情况下，资金依照常值函数 $R(t)=$ 1 000美元流动．资金也可以依照某个可变函数流动，比如，$R(t)=2t-7$ 或 $R(t)=t^2$．

定理 1 如果资金进入投资的流转率由某个常值函数 $R(t)$ 给出，则经过时间 T 后按永续复利 k 计息的**连续资金流量**(amount of continuous money flow)可表示为

$$\int_0^T R(t)e^{kt}\,dt.$$

例 2 商业：连续资金流量．每年投资 1 000 美元，永续复利为 8%，求 15 年的连续资金流量．

解

$$\int_0^{15} 1\,000e^{0.08t}\,dt = \frac{1\,000}{0.08}(e^{0.08(15)}-1) \quad \text{利用式(2)}$$

$$= 12\,500(e^{1.2}-1) = 12\,500(3.320\,117-1)$$

$$\approx 29\,001.46(\text{美元}).$$ ■

上机技术演练

探索 使用具有 Xscl=2 和 Yscl=1 000 的视窗[1, 15, 0, 5 000]作出 $f(x)=1\,000e^{0.08x}$ 的图形．然后作出直线 $y=f(0)$．考虑由直线 $y=f(0)$，$x=15$，y 轴和 x 轴围成的矩形．如果可能的话，画出它的图形．矩形的面积代表什么？在矩形之上而在曲线之下的面积代表什么？在曲线下的整个面积代表什么？

有时可能想要知道应如何把资金注入到投资中才能最终具有指定的总额．

例 3 商业：连续资金流量．考虑资金以每年 P_0 美元的常流转率连续注入到一项投资中．P_0 应该是多少才能使得经过 20 年后按永续复利 8%计息的连续资金流量是 10 000 美元？

解 求 P_0 使得

$$10\,000=\int_0^{20}P_0e^{0.08t}\,dt.$$

解方程：

$$10\,000=\frac{P_0}{0.08}(e^{0.08(20)}-1) \quad \text{利用式(2)}$$

$$800=P_0(e^{1.6}-1)$$

$$800=P_0(4.953\,032-1)$$

$$800=P_0(3.953\,032)$$

$$202.38\approx P_0.$$ ■

生命科学与物理学：自然资源的消耗

指数增长的积分的另一个应用是把

$$P(t)=P_0e^{kt}$$

看作自然资源的需求模型．假设 P_0 表示某种自然资源(例如煤或石油)在时间 $t=0$ 时所用的数量，而且使用这种资源的增长率是 k．因此，采取指数增长(许多资源的使用情况都是这样)，在时间 t 所用的数量 $P(t)$ 由

$$P(t)=P_0e^{kt}$$

给出．再利用式(2)，在区间[0，T]内所用的总量为

$$\int_0^T P(t)\,dt=\int_0^T P_0e^{kt}\,dt=\frac{P_0}{k}(e^{kT}-1). \quad (2)$$

例 4 物理学：铜的需求．在 1997($t=0$)年，世界上铜的消耗量是 11 300 000 吨，而铜的需求正在以每年 15%的比率呈指数增长．如果继续以这个比率增长，那么从 1997 年到 2010 年世界上将消耗多少吨铜？

解 利用式(2)，有

$$\int_0^{13} 11\,300\,000e^{0.15t}\,dt=\frac{11\,300\,000}{0.15}(e^{0.15(13)}-1) \quad \text{利用式(2)}$$

$$\approx 75\,333\,333(e^{1.95}-1)$$

$$\approx 75\,333\,333(7.028\,687\,581-1)$$

$$\approx 75\,333\,333(6.028\,687\,581)$$

$$\approx 454\,161\,000. \quad \text{四舍五入到千}$$

因此从 1997 年到 2010 年，世界上将消耗大约 454 161 000 吨铜. ■

例 5 物理学：铜矿石的消耗．1997 年世界上的铜矿石的储藏量估计为 2 300 000 000 吨．假设在例 4 的比率下连续增长而且没有发现新的储藏量，那么世界上储藏的铜矿石何时会被开采尽？

解 利用式(2)，求 T 满足

$$2\,300\,000\,000=\frac{11\,300\,000}{0.15}(e^{0.15T}-1).$$

解 T 如下：

$$2\,300\,000\,000\approx 75\,333\,333(e^{0.15T}-1)$$

$$\frac{2\,300\,000\,000}{75\,333\,333}\approx e^{0.15T}-1$$

$$30.530\,974\approx e^{0.15T}-1$$

$$31.530\,974=e^{0.15T}$$

$$\ln 31.530\,974\approx \ln e^{0.15T} \quad \text{两边取自然对数}$$

$$\ln 31.530\,974=0.15T \quad \text{回顾 } \ln e^k=k$$

$$\frac{\ln 31.530\,974}{0.15}=T$$

$$\frac{31.530\,974}{0.15}\approx T$$

$$23\approx T. \quad \text{四舍五入到最接近的 1}$$

因此由 1997 年起经过 23 年(或到 2020 年)，世界上储藏的铜矿石将被开采尽.

2007/08/16



在历史上，犹他州的宾翰峡谷矿山开采的铜矿石比任何其他矿山都多．然而，矿石的品质已经从 1906 年的 1.93% 的铜下滑到现在的 0.6%．目前，计划在铜的百分比到达 0.4 时停止开采．■

模型 $\int_0^T P_0 e^{-kt}dt$ 的应用

回顾在 4.4 节对现值的研究．如果没有在那里学习这个课题，你现在应该学习．t 年后到期的结存 P 的现值 P_0 可通过解下述方程来得到：

$$P_0 e^{kt} = P$$

$$P_0 = \frac{P}{e^{kt}} = Pe^{-kt}.$$

444 **定理 2** 按永续复利 k 计息，t 年后到期的结存 P 的现值 P_0 为

$$P_0 = Pe^{-kt}.$$

注意，这可以解释成由未来到现在的指数衰减．

例 6 商业：现值．求按永续复利 8.7% 计息，25 年后到期的 200 000 美元的现值．

解 在现值公式中用 200 000 美元替换 P，0.087 替换 k，25 替换 t，得

$$P_0 = 200\,000e^{-0.087(25)} = 22\,721.63(\text{美元}).$$

因此现值是 22 721.63 美元．■

假设由现在到未来的某时刻 T，连续资金流量将以每年 P 美元的常流转率注入到一项投资中．如果经过一段无限小的时间 dt，累积是

$$P \cdot dt$$

美元．这个结存的现值就是

$$(P \cdot dt)e^{-kt},$$

其中 k 是当前永续复利．所有的现值的累积由积分

$$\int_0^T Pe^{-kt}dt$$

给出，且称之为**累积现值**(accumulated present value)．计算这个积分得到

$$\int_0^T Pe^{-kt}dt = \frac{P}{-k}(e^{-kT} - e^{-k \cdot 0}) = \frac{P}{k}(1 - e^{-kT}). \tag{3}$$

在上述情况下，资金依照常值函数 $R(t) = P$ 流动．资金也可以依照某些可变函数流动，例如 $R(t) = 2t + 8$ 或 $R(t) = t^3$．

定义 由现在到未来的某时刻 T，连续资金流量以每年常流转率 $R(t)$ 美元注入到一项投资中的**累积现值**(accumulated present value)为

$$\int_0^T R(t)e^{-kt}dt,$$

其中 k 是当前永续复利．

例 7 商业：累积现值．如果每年有 2 400 美元的连续资金流量，且当前永续复利是 14%，求 5 年后这个投资的累积现值． 445

解 累积现值是

$$\int_0^5 2\,400e^{-0.14t}dt = \frac{2\,400}{0.14}(1 - e^{-0.14 \cdot 5}) \quad \text{利用式(3)}$$

$$\approx 17\,142.86(1 - e^{-0.7})$$

$$= 17\,142.86(1 - 0.496\,585)$$

$$\approx 8\,629.97(\text{美元}).$$ ■

上面的例子是模型

$$\int_0^T Pe^{-kt}dt = \frac{P}{k}(1 - e^{-kT})$$

的一个应用．这个模型可用来计算特定数量的放射性物质每年释放到大气中的累积量．一些物质衰退了，但是更多的物质仍在继续释放．上面的积分给出了到时间 T 时释放的总量．

习题 6.2

应用

商业与经济

1. 求按永续复利 9%，初始投资 100 美元的储蓄账户 3 年后的结存．
2. 求按永续复利 10%，初始投资 100 美元的储蓄账户 4 年后的结存．
3. 每年注入 100 美元，永续复利为 9%，求 20 年的连续资金流量．
4. 每年注入 100 美元，永续复利为 10%，求 20 年的连续资金流量．
5. 每年注入 1 000 美元，永续复利为 8.5%，求 40 年的连续资金流量．
6. 每年注入 1 000 美元，永续复利为 7.5%，求 40 年的连续资金流量．
7. 现值 P_0 应该是多少，才能使得经过 20 年后按永续复利 8.5% 计息的连续资金流量是 50 000 美元？
8. 现值 P_0 应该是多少，才能使得经过 20 年后按永续复利 7.5% 计息的连续资金流量是 50 000 美元？
9. 现值 P_0 应该是多少，才能使得经过 30 年后按永续复利 9% 计息的连续资金流量是 40 000 美元？
10. 现值 P_0 应该是多少，才能使得经过 30 年后按永续复利 10% 计息的连续资金流量是 40 000 美元？

11. 孩子出生以后，父母想要为孩子进行初始投资 P_0，希望在孩子 20 岁生日时该投资按永续复利 9%增长到 50 000 美元. 试问初始投资应该是多少?

12. 孩子出生以后，父母想要为孩子进行初始投资 P_0，希望在孩子 20 岁生日时该投资按永续复利 10%增长到 60 000 美元. 试问初始投资应该是多少?

13. 求按永续复利 5%计息的 10 年到期的 100 000 美元的现值.

14. 求按永续复利 7.4%计息的 16 年到期的50 000美元的现值.

15. 如果每年有 2 700 美元的连续资金流量，且现行的永续复利是 9%，求 10 年后这个投资的累积现值.

16. 如果每年有 2 700 美元的连续资金流量，且现行的永续复利是 10%，求 10 年后这个投资的累积现值.

17. 一位具有 MBA 学位的女士在 35 岁时接受某公司的总裁职位. 假设她到 65 岁退休，并且她的 85 000 美元年薪都投入到连续资金流中. 现行的永续复利是 8%. 试问这位总裁的累积现值是多少?

18. 一位退学的学生在 25 岁时找到了一个卡车司机的工作. 假设他到 65 岁退休，并且他的 34 000 美元年薪都投入到连续资金流中. 现行的永续复利是 7%. 试问这位司机的累积现值是多少?

资本化成本. 一种资产在其使用期限的资本化成本 c 是初始成本和未来的业务维持费的现值总和. 它按公式

$$c=c_0+\int_0^L m(t)e^{-rt}\,dt$$

计算，其中 c_0 是资产的初始成本，L 是它的使用期，r 是利率(永续复利)，$m(t)$是每年的业务维持费.

求下列假设下的资本化成本.

19. $c_0=500\ 000$ 美元，$r=5\%$，$m(t)=20\ 000$ 美元，$L=20$

20. $c_0=400\ 000$ 美元，$r=5.5\%$，$m(t)=10\ 000$ 美元，$L=25$

21. $c_0=600\ 000$ 美元，$r=4\%$，$m(t)=40\ 000+1\ 000e^{0.01t}$美元，$L=40$

22. $c_0=300\ 000$ 美元，$r=5\%$，$m(t)=30\ 000+500t$ 美元，$L=20$

生命科学与物理学

23. 铝矿(铝土矿)的需求. 在 2001($t=0$)年，铝土矿的需求是 135.7 百万吨，而且需求量正在以每年 3.9%的比率呈指数增长. 如果需求持续以这个比率增长，试问由 2001 年到 2030 年世界上将要消耗多少吨铝土矿?(资料来源：Roskill Consulting Group.)

24. 天然气的需求. 在 2000($t=0$)年，世界上天然气的消耗量大约是 86.3 兆立方英尺，并且正在以每年大约 2.5%的比率呈指数增长. 如果需求持续以这个比率增长，试问由 2000 年到 2020 年世界上将要消耗多少立方英尺天然气?(资料来源：Department of Energy.)

25. 铝矿(铝土矿)的消耗. 世界上铝矿的储藏量是 230 亿吨. 假定还是按 23 题的增长率，而且没有发现新的储藏量，试问世界上铝土矿的储藏量何时将被用尽?

26. 天然气的消耗. 世界上天然气的储藏量是 5 450 兆立方英尺. 假定还是按 24 题的增长率，而且没有发现新的储藏量，试问世界上天然气的储藏量何时将被用尽?(资料来源：Department of Energy.)

27. 放射性物质的累积. 钚每年有 0.003%的衰减率. 假设在 20 年中钚以每年 1 磅的速率释放到大气中. 试问在这 20 年中由此产生的放射性物质的累积总量是多少?

28. 放射性物质的累积. 铯-137 每年有 2.3%的衰减率. 假设在 20 年中铯-137 以每年 1 磅的速率释放到大气中. 试问在这 20 年中由此产生的放射性物质的累积总量是多少?

29. 石油的需求与消耗. 在 1970 年到 2001 年之间，每年世界上石油的需求量由 171 亿桶增长到 277 亿桶. (资料来源：Department of Energy.)
a)设定一个指数增长模型，计算增长率.
b)预测 2020 年的消费量.
c)在 2001 年 1 月 1 日世界上原油的储藏量是 10 040亿桶. 假设没有发现新的石油，世界上石油的储藏量何时被用尽?

综合题

对于非常值函数 $R(t)$，连续资金流量是

$$\int_0^T R(t)e^{k(T-t)}\,dt.$$

对于下面每道题求连续资金流量.

30. $R(t)=t^2$，$k=7\%$，$T=40$ 年

31. $R(t)=2\ 000t+7$，$k=8\%$，$T=30$ 年

对于非常值函数 $R(t)$，累积现值是

$$\int_0^T R(t)e^{-k(T-t)}\,dt.$$

对于下面每道题求累积现值.

32. $R(t)=e^t$，$k=7\%$，$T=10$ 年

33. $R(t)=t$，$k=8\%$，$T=20$ 年

*34. 对一个非主修商业的朋友叙述现值概念，然后叙述累积现值.

*35. 查找本节未考虑过的某种自然资源消耗率和世界储藏量的一些数据，预测世界储藏量何时将被用尽.

上机技术演练

36. 作出 23 题中铝矿需求所表示的曲线下的区域，然后计算它的面积，并将结果与习题答案相比较.

37. 作出 3 题中连续资金流量所表示的曲线下的区域，然后计算它的面积，并将结果与习题答案相比较.

6.3 广义积分

要点

- 确定一个广义积分是收敛还是发散.
- 解涉及广义积分的应用问题.

我们试图在区间$[1,\infty)$上求曲线 $y=1/x^2$ 下的区域面积.



注意这个区域是无限延展的. 我们还没有考虑过如何求这种区域的面积. 先求由 1 到 b 的区间上曲线下的面积，然后再看当 b 无限变大时会出现什么情况. 在区间$[1,b]$上曲线下的面积是

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\left(-\frac{1}{b}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)$$
$$=-\frac{1}{b}+1=1-\frac{1}{b}.$$

因此

$$\lim_{b\to\infty}[\text{由 1 到 } b \text{ 的区间上曲线下的面积}]=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1.$$ 446~448

我们把由 1 到无穷的面积定义为这个极限. 这是一个无限长的区域具有有限面积的例子.

上机技术演练

练习

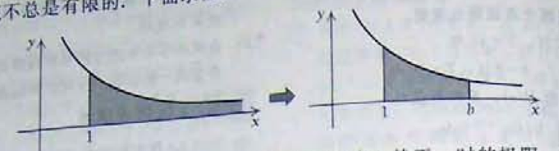
1. 作出 $y=1-1/x$ 的图形和一个输入-输出表. 考虑逐渐增大的输入. 作出关于

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

的推断.

2007/08/16

这样的面积不总是有限的. 下面求区间[1, ∞)上曲线 $y=1/x$ 下的区域面积.



根据定义，由 1 到无穷的面积 A 是由 1 到 b 的面积当 b 趋于∞时的极限，因此

$$A=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}[\ln x]_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\lim_{b\to\infty}\ln b.$$

在 4.2 节中，我们知道当 b 增大时 $\ln b$ 无限地增大. 因此，极限不存在. 于是，还有一个无限长的区域具有无限面积的例子. 注意 $y=1/x^2$ 和 $y=1/x$ 的图形有类似的形状，但是，在它们之下的区域一个有有限面积，而另一个则无有限面积.

上机技术演练

练习

1. 作出 $y=\ln x$ 的图形和一个输入-输出表. 考虑逐渐增大的输入. 作出关于

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x)$$

的推断.

具有无穷大上限的积分

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,$$

称为**广义积分**(improper integral). 它的值定义为下面的极限.

定义

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

如果极限存在，则称广义积分**收敛**(converge)，或是**收敛的**(convergent). 如果极限不存在，则称广义积分**发散**(diverge)，或是**发散的**(divergent). 因此，

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=1\ \text{收敛，}\quad \text{而}\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x}\ \text{发散.}$$

例 1　确定下面的积分是收敛还是发散，如果是收敛的，计算它的值：

449

$$\int_0^\infty 2e^{-2x}\,dx.$$

解　我们有

$$\int_0^\infty 2e^{-2x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b 2e^{-2x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{2}{-2}e^{-2x}\right]_0^b$$
$$=\lim_{b\to\infty}[-e^{-2x}]_0^b=\lim_{b\to\infty}[-e^{-2b}-(-e^{-2\cdot 0})]$$

$$=\lim_{b\to\infty}(-e^{-2b}+1)=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^{2b}}\right).$$

现在当 b 趋于∞时，我们知道 e^{2b} 趋于∞(由第 4 章)，因此

$$\frac{1}{e^{2b}}\to 0,\quad \left(1-\frac{1}{e^{2b}}\right)\to 1.$$

于是

$$\int_0^\infty 2e^{-2x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^{2b}}\right)=1.$$

积分是收敛的. ■

下面是关于两个其他类型的广义积分的定义.

定义

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx=\int_{-\infty}^c f(x)\,dx+\int_c^\infty f(x)\,dx.$

为使 $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ 收敛，上面定义 2 中右边的两个积分都必须收敛.

应用

在 6.2 节中我们知道，由现在到未来的某时刻 T，每年 P 美元连续资金流量的累积现值为

$$\int_0^T Pe^{-kt}\,dt=\frac{P}{k}(1-e^{-kT}),$$

其中 k 是现行的利率. 假设资金流量是连续不间断的. 在这个假设下，在无限时间周期上的累积现值是 450

$$\int_0^\infty Pe^{-kt}\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T Pe^{-kt}\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{P}{k}(1-e^{-kT})=\lim_{T\to\infty}\frac{P}{k}\left(1-\frac{1}{e^{kT}}\right)=\frac{P}{k}.$$

上机技术演练

探索　用绘图器考察例 2. 为了计算

$$\int_0^\infty 2\,000e^{-0.08x}\,dx,$$

首先考虑

$$\int_0^t 2\,000e^{-0.08x}\,dx=\frac{2\,000}{0.08}(1-e^{-0.08t}).$$

考察当 t 增大时会发生什么情况. 使用具有 Xscl=1 和 Yscl=5 000 的视窗[1, 10, 0, 30 000]作出

$$f(x)=\frac{2\,000}{0.08}(1-e^{-0.08x})$$

2007/08/16

的图形. 使用相同坐标系作出 $y=25\ 000$ 的图形. 然后把视窗变为具有 Xscl=10 和 Yscl=5 000 的视窗[0, 50, 0, 30 000]. 最后把视窗变为[0, 100, 0, 30 000]. 当 x 增大时会出现什么情况? 25 000 的意义是什么?

定理 3 以每年流转率 P 美元的连续资金流量持续不断地注入到某项投资中的累积现值(accumulated present value)为

$$\frac{P}{k},$$

其中 k 是现行的永续复利.

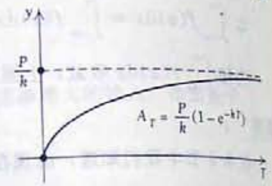
例 2 商业：累积现值. 以每年流转率 2 000 美元的连续资金流量持续注入到某项投资中，现行的永续复利是 8%，求累积现值.

解 累积现值是 2 000/0.08，或 25 000 美元. ∎

当数量为 P 的放射性物质每年都在向大气中释放的时候，由现在到时间 T 释放的总量由

$$\int_0^T Pe^{-kt}\,dt = \frac{P}{k}(1-e^{-kT})$$

给出. 当 T 趋于∞时(放射性物质持续地在释放)，放射性物质的累积趋于极限值 P/k. 难怪科学家和环保人士如此关心连续的核爆炸. 最终累积"在这里扎根."



451

习题 6.3

确定下面的积分是收敛还是发散；如果收敛，计算它的值.

1. $\int_3^\infty \frac{dx}{x^2}$
2. $\int_4^\infty \frac{dx}{x^2}$
3. $\int_3^\infty \frac{dx}{x}$
4. $\int_4^\infty \frac{dx}{x}$
5. $\int_0^\infty 3e^{-3x}dx$
6. $\int_2^\infty 4e^{-4x}dx$
7. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$
8. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$
9. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}$
10. $\int_0^\infty \frac{4dx}{1+x}$
11. $\int_1^\infty 5x^{-2}dx$
12. $\int_1^\infty 7x^{-2}dx$
13. $\int_0^\infty e^x dx$
14. $\int_0^\infty e^{2x} dx$
15. $\int_0^\infty x^2 dx$
16. $\int_0^\infty x^4 dx$
17. $\int_0^\infty xe^x dx$
18. $\int_1^\infty \ln x dx$
19. $\int_0^\infty me^{-mx}dx, m>0$
20. $\int_0^\infty Qe^{-kt}dt, k>0$
21. $\int_e^\infty \frac{dt}{t^{1.001}}$
22. $\int_1^\infty \frac{2t}{t^2+1}dt$
23. $\int_{-\infty}^\infty t dt$
24. $\int_1^\infty \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}dx$
25. 求区间[2, ∞)上曲线 $y=1/x^2$ 下的区域面积，如果它存在的话.
26. 求区间[2, ∞)上曲线 $y=1/x$ 下的区域面积，如果它存在的话.
27. 求以 $y=2xe^{-x^2}$ 和直线 $x=0$ 及 $y=0$ 为边界的区域面积，如果它存在的话.
28. 求以 $y=1/\sqrt{(3x-2)^3}$ 和直线 $x=6$ 及 $y=0$ 为边界的区域面积，如果它存在的话.

应用

商业与经济

29. **累积现值.** 求以每年 3 600 美元的连续资金流量不断注入到某项投资中的累积现值，现行利率是 8%.
30. **累积现值.** 求以每年 3 500 美元的连续资金流量不断注入到某项投资中的累积现值，现行利率是 7%.

31. **由边际利润确定总利润.** 某厂商测定，其边际利润可表示为
$$P'(x) = 200e^{-0.032x}.$$
假设厂商有可能无限多地生产这种产品，试问其总利润是多少?
32. **由边际利润确定总利润.** 在 31 题中，如果
$$P'(x) = 200x^{-1.032}，\quad 其中 x \geq 1.$$
求总利润.
33. **由边际成本确定总成本.** 某公司测定，生产 x 件产品的边际成本可表示为
$$C'(x) = 3\ 600x^{-1.8}，\quad 其中 x \geq 1.$$
假设公司有可能无限多地生产这种产品，试问其总成本是多少?
34. **总产量.** 某厂商测定，它能以速率
$$r(t) = 2\ 000e^{-0.42t}$$
生产轮胎，其中 t 是时间，单位为年. 假定厂商持久地生产下去，它能生产多少轮胎?
35. **累积现值.** 求以每年 5 000 美元的连续资金流量不断注入到某项投资中的累积现值，现行利率是 8%.
36. **累积现值.** 求以每年 $2\ 000e^{-0.01t}$ 美元的连续资金流量不断注入到某项投资中的累积现值，现行利率是 7%.

资本化成本. 一种资产在其使用期限的资本化成本 c 是初始成本和未来的业务维持费的现值总和. 它按公式

$$c = c_0 + \int_0^\infty m(t)e^{-rt}\,dt$$

计算. 其中 c_0 是资产的初始成本，r 是利率(永续复利)，$m(t)$是每年的业务维持费.

求下列假设下的资本化成本.

37. c_0=500 000 美元，r=5%，$m(t)$=20 000 美元
38. c_0=700 000 美元，r=5%，$m(t)$=30 000 美元

生命科学与物理学

39. **放射性物质的累积.** 钚每年有 0.003%的衰减率. 假设一次核事故导致钚以每年 1 磅的速率持续地释放到大气中. 放射性物质的累积的极限值是多少?
40. **放射性物质的累积.** 铯-137 每年有 2.3%的衰减率. 假设一次核事故导致铯-137 以每年 1 磅的速率持续地释放到大气中. 放射性物质的累积的极限值是多少?

放射性注入疗法. 在前列腺癌的治疗中，经常使用放射性注入疗法. 注入器放在患者体内且不再取出. 由注入器传输到体内的能量用雷姆[⊖]单位来度量，它由

$$E = \int_0^a P_0 e^{-kt}\,dt$$

给出，其中 k 是放射性物质的衰减常数，a 是注入器放置的年数，P_0 是能量传输的初始速度. 对于 41 题和 42 题使用上述资料.

41. 假设治疗使用碘-125，它的半衰期是 60.1 天.
    a) 求碘-125 的衰减率 k.
    b) 如果初始能量速率是每年 10 雷姆，第一个月发射出多少能量(按雷姆测量)?
    c) 注入器传输到体内的总能量是多少?
42. 假设治疗使用钯-103，它的半衰期是 16.99 天.
    a) 求钯-103 的衰减率 k.
    b) 如果初始能量速率是每年 10 雷姆，第一个月发射出多少能量(按雷姆测量)?
    c) 注入器传输到体内的总能量是多少?

综合题

确定下面的积分是收敛还是发散；如果收敛，计算它的值.

43. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{2/3}}$
44. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$
45. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^{3/2}}$
46. $\int_{-\infty}^0 e^{2x}dx$
47. $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$
48. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx$

生命科学：药物剂量. 假设服下一剂口服药. 从这时起，药被身体吸收并通过尿液排出. 到时间 T 通过身体的药物总量为

$$\int_0^T E(t)\,dt,$$

其中 E 是药物的排泄速率. 一个典型的排泄速率函数是 $E(t)=te^{-kt}$，此处 $k>0$ 而 t 是时间(以小时计). (现在做 49 题和 50 题.)

49. 求 $\int_0^\infty E(t)dt$ 并解释答案，即说明该积分表示什么?
50. 某医师开出了一剂 100 毫克的药量，求 k.

*51. 考虑函数
$$y=\frac{1}{x^2} \quad 和 \quad y=\frac{1}{x}.$$

⊖ 雷姆：度量被吸收的辐射数量单位，相当于一伦……

2007/08/16

假设你到油漆商店购买油漆来喷涂区间 $[1, \infty)$ 上每个曲线下的区域. 讨论你能否成功, 为什么?

452~453 *52. 假设你是一个大厦的业主, 并且可以获得源源不断的租金, 而你决定要销售大厦. 说明如何使用源源不断的连续资金流量的累积现值概念确定一个令人满意的销售价格.

上机技术演练

53. 对于 49 题和 50 题, 作出函数 E 的图形并将曲线下的区域涂上阴影.

近似计算积分.

54. $\int_1^{\infty} \frac{4}{1+x^2}dx$

55. $\int_1^{\infty} \frac{6}{5+e^x}dx$

6.4 概率

要点

- 检验概率密度函数的某些性质.
- 解涉及概率密度函数的应用问题.

刻画事件发生的可能性大小的介于 0 和 1 之间的数称为该事件的**概率**(probability). 概率有**试验概率**和**理论概率**两种.

试验概率和理论概率

如果多次投掷一枚硬币, 比如 1 000 次, 统计它落地后正面朝上的次数, 便可确定它落地后正面朝上的概率. 如果它落地后正面朝上 503 次, 则计算出落地后正面朝上的概率是

$$\frac{503}{1\ 000}, \quad 或 \quad 0.503.$$

这是一个由**试验**(experimental)确定的概率. 这种确定概率的方法依赖于观察和对数据的研究, 很常见也很有用. 下面是一些由试验确定概率的例子:

1. 如果一个人心脏病发作, 则他的死亡概率是 $\frac{1}{3}$.
2. 如果你吻了一个患感冒的人, 则你被传染上感冒的概率是 0.07.
3. 一个刚刚从监狱释放出来的人有 80% 的概率重返监狱.

如果考虑一枚硬币, 由于在投掷时正如它有可能落地后正面朝上一样, 它也有可能落地后反面朝上, 因此可计算出落地后正面朝上的概率是 $\frac{1}{2}$. 这是一个由**理论**(theoretical)确定的概率. 下面是一些使用数学知识由理论确定概率的例子:

1. 如果在一个房间中有 30 个人, 则他们中有两人生日相同(不包括年度)的概率是 0.706.
2. 在一次旅途中你遇见某个人, 经过一席交谈后发现这是曾与你谋面的熟人. 典型的反应是"这个世界真小!"如今这样看不切实际, 因为这种事件发生的概率是相当高的——几乎超过 22%.

概括地讲, 试验概率是通过观察和收集数据确定的. 理论概率是通过数学推理确定的. 像上面那些试验概率和理论概率的例子, 特别是出现我们不期望结果的那些例子, 启发我们去注意研究概率的值. 你可能要问, "真实的概率是多少?"其实, 一个也没有. 在一定范围内可以由试验确定概率. 这与从理论上得到的概率可能一致, 也可能不一致. 在有些情况下, 确定一种类型的概率比确定另一种类型的概率要容易. 例如, 想用理论概率获得传染上感冒的概率是相当困难的.

在下面的讨论中, 将主要考虑理论概率. 最终, 微积分将在讨论中起重要作用.

例 1 从一副洗好的纸牌中抽出 A 的概率是多少?



想计算导致概率理论的机会游戏中的几率

解 因为有 52 个可能的结果, 而每张纸牌抽出的机会是相同的. 又因为有 4 个 A, 所以抽出一个 A 的概率是 $\frac{4}{52}$, 或 $\frac{1}{13}$, 大约等于 7.7%.

实际上, 我们不可能一次抽出 A 的 7.7%. 但是在大量的试验中, 洗牌后抽出一张, 放回原处重新洗牌后再抽出一张, 预计每次抽出 A 的可能性大约是 7.7%. 也就是说, 进行多次抽取, 可以期望接近于 7.7%. ■

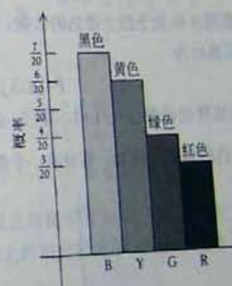
例 2 一个广口瓶内装有 7 个黑球、6 个黄球、4 个绿球和 3 个红球. 广口瓶被充分摇动后, 闭眼从中拿出 1 个球. 这个球是红球的概率是多少? 是白球的概率是多少?



解 这里总共有 20 个球, 其中 3 个是红的, 因此取出一个红球的概率是 $\frac{3}{20}$. 没有白球, 因此取出一个白球的概率是 $\frac{0}{20}$, 或 0. ■

考察例 2 的一个概率表. 注意, 这些概率的和是 1. 毫无疑问, 我们一定会取出黑球、黄球、绿球或红球中的某一个. 因此这个事件的概率是 1. 把表中的数据排列成一个称为**相对频率图**(relative frequency graph)或**柱状图**(histogram)的图形, 它展示了每个事件发生次数的比例(每个事件的概率).

颜色	概率
黑色(B)	$\frac{7}{20}$
黄色(Y)	$\frac{6}{20}$
绿色(G)	$\frac{4}{20}$
红色(R)	$\frac{3}{20}$

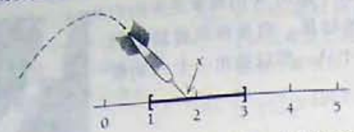


如果每个矩形的宽都是 1, 则这些矩形面积的和是 1. 也就是说, 你必定要从这些颜色的球中取出一个.

连续随机变量

假设我们向一个数轴上投掷飞镖, 让它总是落在区间 $[1, 3]$ 上. 设 x 是飞镖命中的次数, 或 x 是可以反复被观察(或测量)到的量, 且它的可能数值由 x 有无穷多个可能的数值. 注意, x 是一个能反复被观察(或测量)到的量, 且它的可能数值由

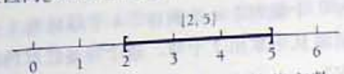
整个实数区间组成．这样的变量称为**连续随机变量**(continuous random variable)．



假如我们投掷飞镖很多次，而且有 43% 落在区间[1，3]的子区间[1.6，2.8]上，则飞镖落在区间[1.6，2.8]上的概率是 0.43．

考虑一些其他的连续随机变量的例子．

例 3 假设 x 是从下午 2：00 到下午 5：00 的 3 个小时内各巴士抵达某巴士站的次数．区间是[2，5]，则 x 是分布在区间[2，5]上的连续随机变量．



■

例 4 假设 x 是美国或加拿大的任一农场种植玉米的英亩数．区间是[0，a]，其中 a 是最高的英亩数．(可能不知道最高的英亩数是多少，为了照顾到所有可能的情况，可以说区间是[0，∞)．注意：可能有人会说，在[0，a]或[0，∞)中存在这样的值，而它不是任何农场种植玉米的英亩数．但是为了应用方便，我们还是把所有的值都包括在内．)

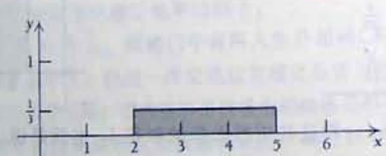


456 于是，x 是区间[0，a]或[0，∞)上的一个连续随机变量．■

考虑例 3 中关于巴士抵达的次数，假设想知道下午 4：00 和下午 5：00 之间巴士抵达的概率，将其表示为

$$P([4,5]) \quad 或 \quad P(4 \leqslant x \leqslant 5).$$

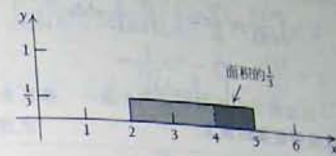
可能存在这样的函数 $y=f(x)$，在[2，5]的子区间上该函数的图形下的面积给出在这个子区间内巴士抵达的概率．例如，假设有一个提供这些概率的常值函数 $f(x)=\frac{1}{3}$．考察它的图形．



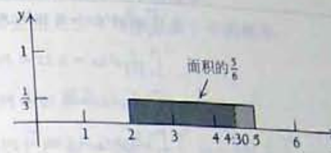
曲线下的面积是 $3\cdot\frac{1}{3}$，或 1．巴士在下午 4：00 和下午 5：00 之间抵达的概率是位于区间[4，5]之上的那块粗长条面积．即

$$P([4,5])=\frac{1}{3}=33\frac{1}{3}\%.$$

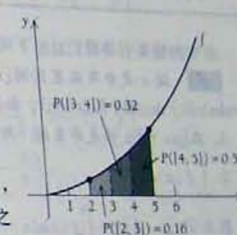
这是[4，5]上矩形的面积．



巴士在下午 2：00 和下午 4：30 之间抵达的概率是 $\frac{5}{6}$，或 $83\frac{1}{3}\%$．这是[2，4.5]上矩形的面积．



注意，在上述例子中，$f(x)=\frac{1}{3}$，在下午 2：00 和下午 5：00 之间的长度为 1 的任何区间上都有概率 1/3．不可能总是这样．假设换为



$$f(x)=\frac{3}{117}x^2.$$

如右图所示，在 $f(x)$ 的图形下从 4 到 5 的面积由区间[4，5]上的定积分给出，并且得到了下午 4：00 和下午 5：00 之间巴士抵达的概率． 457

于是，

$$P([4,5])=\int_4^5 f(x)\mathrm{d}x=\int_4^5\frac{3}{117}x^2\mathrm{d}x=\frac{3}{117}\left[\frac{x^3}{3}\right]_4^5$$

$$=\frac{1}{117}\left[x^3\right]_4^5=\frac{1}{117}(5^3-4^3)=\frac{61}{117}\approx 0.52.$$

因此在下午 4：00 和下午 5：00 之间至少有一辆巴士抵达的概率是 0.52．函数 f 称为**概率密度函数**(probability density function)．它在任何子区间上的积分给出了 x"抵达"那个子区间的概率．

上机技术演练

探索 使用视窗[0，5，0，1]作函数

$$f(x)=\frac{3}{117}x^2$$

的图形．然后依此计算下列各个积分，如果可能，画出适当的阴影区域．

$$\int_2^3 \frac{3}{117}x^2\,dx, \quad \int_3^4 \frac{3}{117}x^2\,dx$$

和

$$\int_4^5 \frac{3}{117}x^2\,dx.$$

进而讲述你的结果并且说明答案的意义.

类似的计算方法展示在下面的表中.

时间区间	一辆巴士在该区间抵达的概率
下午 2:00 到下午 3:00	$\int_2^3 \frac{3}{117}x^2dx = 0.16 = P([2,3])$
下午 3:00 到下午 4:00	$\int_3^4 \frac{3}{117}x^2dx = 0.32 = P([3,4])$
下午 4:00 到下午 5:00	$\int_4^5 \frac{3}{117}x^2dx = 0.52 = P([4,5])$
下午 2:00 到下午 5:00	$\int_2^5 \frac{3}{117}x^2dx = 1.00 = P([2,5])$

458

表中的结果引导我们给出下列概率密度函数的定义.

定义 设 x 是分布在某区间 $[a, b]$ 上的连续随机变量. 函数 f 称为 x 的**概率密度函数** (probability density function)，如果：

1. 在 $[a, b]$ 上 f 是非负的. 即对一切 $x\in[a, b]$，都有 $f(x)\geqslant 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx = 1$.

因为 $P([a, b]) = \int_a^b f(x)dx = 1$，所以 x 落在区间上是“必然的”(见图 1).

3. 对于 $[a, b]$ 的任何子区间 $[c, d]$(见图 2)，x 落在该子区间上的概率 $P([c, d])$ 或 $P(c\leqslant x\leqslant d)$ 为

$$P([c,d]) = \int_c^d f(x)dx.$$

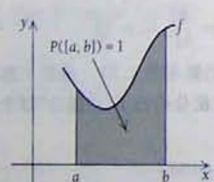


图 1

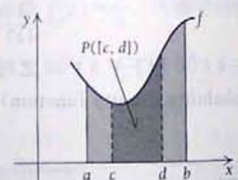


图 2

例 5 对于

$$f(x) = \frac{3}{117}x^2, \quad 2\leqslant x\leqslant 5,$$

验证上面定义中的性质 2.

解

$$\int_2^5 \frac{3}{117}x^2dx = \frac{3}{117}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^5 = \frac{1}{117}\left[x^3\right]_2^5$$
$$= \frac{1}{117}(5^3 - 2^3) = \frac{117}{117} = 1.$$

■

例 6 商业：产品的使用期. 一家生产晶体管的公司测定出一个晶体管的使用期 t 是 3～6 年，并且 t 的概率密度函数为

$$f(t) = \frac{24}{t^3}, \quad 3\leqslant t\leqslant 6.$$

a)验证性质 2.

b)求一个晶体管能持续使用不超过 4 年的概率.

c)求一个晶体管能持续使用至少 4 年和最多 5 年的概率.

459

解

a)需要验证 $\int_3^6 f(t)dt = 1$. 现在

$$\int_3^6 \frac{24}{t^3}dt = 24\int_3^6 t^{-3}dt = 24\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_3^6 = -12\left[\frac{1}{t^2}\right]_3^6 = -12\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{3^2}\right)$$
$$= -12\left(\frac{1}{36} - \frac{1}{9}\right) = -12\left(-\frac{3}{36}\right) = 1.$$

b)一个晶体管能持续使用不超过 4 年的概率是

$$P(3\leqslant t\leqslant 4) = \int_3^4 \frac{24}{t^3}dt = 24\int_3^4 t^{-3}dt = 24\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_3^4 = -12\left[\frac{1}{t^2}\right]_3^4$$
$$= -12\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{3^2}\right) = -12\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{9}\right)$$
$$= -12\left(-\frac{7}{144}\right) = \frac{7}{12} \approx 0.58.$$

c)一个晶体管能持续使用至少 4 年和最多 5 年的概率是

$$P(4\leqslant t\leqslant 5) = \int_4^5 \frac{24}{t^3}dt = 24\int_4^5 t^{-3}dt = 24\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_4^5 = -12\left[\frac{1}{t^2}\right]_4^5$$
$$= -12\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{4^2}\right) = -12\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{16}\right)$$
$$= -12\left(-\frac{9}{400}\right) = \frac{27}{100} = 0.27.$$

■

构造概率密度函数

假如有一个任意的非负函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分是 K. 则

$$\int_a^b f(x)dx = K.$$

两边都乘以 $1/K$ 得

$$\frac{1}{K}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{K}\cdot K = 1, \quad 或 \quad \int_a^b \frac{1}{K}\cdot f(x)dx = 1.$$

460

于是当用 $1/K$ 乘函数 $f(x)$ 时，我们有了一个在给定区间上的面积是 1 的函数.

2007/08/16

例7 求 k 使得

$$f(x)=kx^2$$

是区间[2，5]上的一个概率密度函数．然后写出这个概率密度函数．

解 我们有

$$\int_2^5 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5=\frac{5^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{125}{3}-\frac{8}{3}=\frac{117}{3}.$$

于是，

$$k=\frac{1}{\frac{117}{3}}=\frac{3}{117},$$

而概率密度函数是

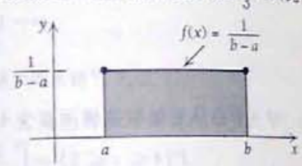
$$f(x)=\frac{3}{117}x^2.$$ ■

均匀分布

假设连续随机变量的概率密度函数是常数．那么如何来描述它？考虑下面的图形．



矩形阴影的长是区间[2，5]的长度3．为了使阴影的面积是1，矩形的高必须是 $\frac{1}{3}$．因此，$f(x)=\frac{1}{3}$．



右图所示显示的矩形阴影的长是区间 $[a, b]$ 的长度 $b-a$．为了使阴影的面积是1，矩形的宽必须是 $1/(b-a)$．

461 因此，$f(x)=1/(b-a)$．

定义 连续随机变量 x 称为在区间 $[a, b]$ 上是**均匀分布的**(uniformly distributed)，如果它有一个由

$$f(x)=\frac{1}{b-a},\quad a\leqslant x\leqslant b$$

给出的概率密度函数 f．

例8 数 x 是从区间[40，50]上随机选取的．x 的概率密度函数由

$$f(x)=\frac{1}{10},\quad 40\leqslant x\leqslant 50$$

给出．求所选取的数在子区间[42，48]上的概率．

解 概率是

$$P(42\leqslant x\leqslant 48)=\int_{42}^{48}\frac{1}{10}\,dx=\frac{1}{10}[x]_{42}^{48}$$

$$=\frac{1}{10}(48-42)=\frac{6}{10}=0.6.$$ ■

例9 商业：质量控制．某公司生产龙卷风预告警报器．警报器的最大响度 L 的范围是70～100分贝．L 的概率密度函数是

$$f(L)=\frac{1}{30},\quad 70\leqslant L\leqslant 100.$$

在生产线上随机选择一个警报器．求它的最大响度是70～92分贝的概率．

解 概率是

$$P(70\leqslant L\leqslant 92)=\int_{70}^{92}\frac{1}{30}\,dL=\frac{1}{30}[L]_{70}^{92}$$

$$=\frac{1}{30}(92-70)=\frac{22}{30}=\frac{11}{15}\approx 0.73.$$ ■

指数分布

电话通话的持续时间，公路上相继的汽车之间的距离，学习一项工作任务所需时间的总和，这些都是指数分布随机变量的例子．也就是说，它们的概率密度函数都是指数函数．

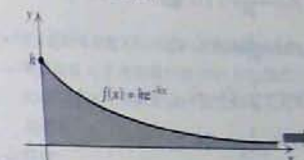
定义 一个连续随机变量是**指数分布的**(exponentially distributed)，如果它有一个由

$$f(x)=ke^{-kx},\quad 在区间[0,\infty)上$$

给出的概率密度函数． 462

函数 $f(x)=2e^{-2x}$ 是一个这样的概率密度函数．在6.3节中已经给出

$$\int_0^\infty 2e^{-2x}\,dx=1.$$



一般情况

$$\int_0^\infty ke^{-kx}\,dx=1$$

可用类似的方法来证明．

为什么可以假设汽车之间的距离是指数分布呢？部分理由是，许多汽车之间的距离是很小的，虽然也可以找到其他的分布，但都是这样"弯曲"的．相同的理由也适用于电话通话的持续时间，即较短通话多于较长通话．其余的理由取决于涉及诸如距离或电话通话数据的分析．

例10 商业：运输规划．在一条公路的某一路段上相继行驶的汽车之间的距离 x(英尺)有一个概率密度函数

$$f(x)=ke^{-kx},\quad 0\leqslant x<\infty,$$

其中 $k=1/a$，a 是在某个时间段上相继的汽车之间的平均距离．

一个运输规划者测定在公路的某一路段上汽车之间的平均距离是166英尺．如果随机地选择两辆相继行驶的汽车，它们之间的距离是50英尺或者更小的概率是多少？



一个运输规划者能够测定汽车相距某一距离的概率

2007/08/16

解 首先确定 k：

$$k=\frac{1}{166}\approx 0.006\,024.$$

x 的概率密度函数是

$$f(x)=0.006\,024e^{-0.006\,024x},\quad 0\leqslant x<\infty.$$

汽车之间的距离是 50 英尺或更小的概率是

$$P(0\leqslant x\leqslant 50)=\int_0^{50}0.006\,024e^{-0.006\,024x}dx=\left[\frac{0.006\,024}{-0.006\,024}e^{-0.006\,024x}\right]_0^{50}$$
$$=[-e^{-0.006\,024x}]_0^{50}=(-e^{-0.006\,024\cdot 50})-(-e^{-0.006\,024\cdot 0})$$
$$=-e^{-0.301\,200}+1=1-e^{-0.301\,200}=1-0.739\,930\approx 0.260.$$ ■

463

习题 6.4

在给定区间上检验概率密度函数定义中的性质 2.

1. $f(x)=2x$, $[0, 1]$
2. $f(x)=\frac{1}{4}x$, $[1, 3]$
3. $f(x)=\frac{1}{5}$, $[3, 8]$
4. $f(x)=3$, $\left[0, \frac{1}{3}\right]$
5. $f(x)=\frac{3}{26}x^2$, $[1, 3]$
6. $f(x)=\frac{3}{64}x^2$, $[0, 4]$
7. $f(x)=\frac{1}{x}$, $[1, e]$
8. $f(x)=\frac{1}{e-1}e^x$, $[0, 1]$
9. $f(x)=\frac{3}{2}x^2$, $[-1, 1]$
10. $f(x)=\frac{1}{3}x^2$, $[-2, 1]$
11. $f(x)=3e^{-3x}$, $[0, \infty)$
12. $f(x)=4e^{-4x}$, $[0, \infty)$

求 k 使得函数是在给定区间上的一个概率密度函数. 然后写出概率密度函数.

13. $f(x)=kx$, $[1, 3]$
14. $f(x)=kx$, $[1, 4]$
15. $f(x)=kx^2$, $[-1, 1]$
16. $f(x)=kx^2$, $[-2, 2]$
17. $f(x)=k$, $[2, 7]$
18. $f(x)=k$, $[3, 9]$
19. $f(x)=k(2-x)$, $[0, 2]$
20. $f(x)=k(4-x)$, $[0, 4]$
21. $f(x)=\frac{k}{x}$, $[1, 3]$
22. $f(x)=\frac{k}{x}$, $[1, 2]$
23. $f(x)=ke^x$, $[0, 3]$
24. $f(x)=ke^x$, $[0, 2]$

25. 向一个数轴上投掷飞镖，让它总是落在区间[0, 10]上. 设 x 是飞镖命中的次数. 假设 x 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{50}x,\quad 0\leqslant x\leqslant 10.$$

a)求 $P(2\leqslant x\leqslant 6)$，即它的击中点在[2, 6]上的概率.

*b)解释你在 a)中的答案的意义.

26. 在 25 题中，假设飞镖总是落在区间[0, 5]上，且 x 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{3}{125}x^2,\quad 0\leqslant x\leqslant 5.$$

a)求 $P(1\leqslant x\leqslant 4)$，即它的击中点在[1, 4]上的概率.

*b)解释你在 a)中的答案的意义.

27. 数 x 从区间[4, 20]上随机选取. x 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{16},\quad 4\leqslant x\leqslant 20.$$

求一个数是从子区间[9, 17]中选出的概率.

28. 数 x 从区间[5, 29]上随机选取. x 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{24},\quad 5\leqslant x\leqslant 29.$$

求一个数是从子区间[13, 29]中选出的概率.

应用

商业与经济

29. **运输规划.** 一个运输规划者测定，在某一公路上汽车之间的平均距离是 100 英尺. 如果随机选择两辆相继行驶的汽车，它们之间的距离是 40 英尺或更小的概率是多少?

30. **运输规划.** 一个运输规划者测定，在某一公路上汽车之间的平均距离是 200 英尺. 如果随机选择两辆相继行驶的汽车，它们之间的距离是 10 英尺或更小的概率是多少?

31. **电话通话的持续时间.** 某家电话公司确定，电话通话的持续时间 t 是具有概率密度函数

$$f(t)=2e^{-2t},\quad 0\leqslant t<\infty$$

的一个指数分布的随机变量. 求电话通话的持续时间不超过 5 分钟的概率.

32. **电话通话的持续时间.** 再讨论 31 题，求电话通话的持续时间不超过 2 分钟的概率.

33. **发生故障的时间.** 通常可以假设某种机器发生故障的时间 t(以小时计)服从概率密度函数为

$$f(t)=ke^{-kt},\quad 0\leqslant t<\infty$$

的指数分布，其中 $k=1/a$，而 a 是发生故障之前运行的平均时间数. 假设发生故障之前运行的平均时间是 100 小时. 那么在 50 小时或更短时间内发生故障的概率是多少?

34. **机器的可靠性.** 在 33 题中机器的可靠性(它正常工作的概率)定义为

$$R(T)=1-\int_0^T 0.01e^{-0.01t}dt,$$

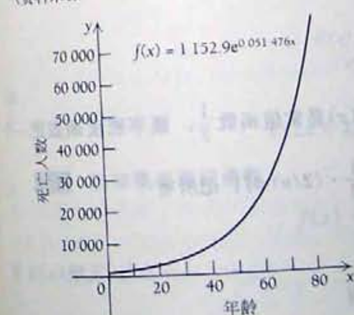
其中 $R(T)$是在时间 T 的可靠性. 求 $R(T)$.

生命科学与物理学

35. **死亡率.** 在美国 1～85 岁之间的任一年龄 x 的人中，死于 2000 年的人数近似为函数

$$f(x)=1\,152.9e^{0.051\,476x}.$$

(资料来源：Centers for Disease Control.)



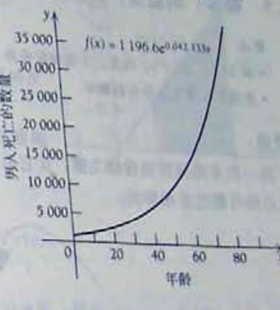
a)求 k 值使得函数 $kf(x)$成为一个概率密度函数.

b)利用你在 a)中的答案计算 2000 年已知的 1～85 岁的人中年龄在 20～30 之间的人死亡的概率.

36. **死亡率.** 在美国 1～85 岁之间的任一年龄 x 的男人中，死于 2000 年的人数近似为函数

$$f(x)=1\,196.6e^{0.042\,133x}.$$

(资料来源：Centers for Disease Control.)



a)求 k 值使得函数 $kf(x)$成为一个概率密度函数.

b)利用你在 a)中的答案计算 2000 年已知的 1～85 岁的男人中年龄在 20～30 之间的男人死亡的概率.

社会科学

37. **在迷宫中的时间.** 在心理学试验中，老鼠学习过迷宫的时间 t(秒)是具有概率密度函数

$$f(t)=0.02e^{-0.02t},\quad 0\leqslant t<\infty$$

的一个指数分布的随机变量. 求老鼠经过 150 秒或更少的时间通过迷宫的概率.



老鼠学习过迷宫的时间是一个指数分布的随机变量

2007/08/16

38. 在迷宫中的时间．使用 37 题的陈述和方程，求老鼠经过 50 秒或更少的时间通过迷宫的概率．

综合题

464/465

39. 函数 $f(x)=x^2$ 是$[0,\ b]$上的一个概率密度函数．试问 b 是多少？

40. 函数 $f(x)=12x^2$ 是$[-a,\ a]$上的一个概率密度函数．试问 a 是多少？

*41. 解释概率密度函数概念．

*42. 举出你在日常生活中用到概率的众多例子．

上机技术演练

43—54. 对于 1～12 题中的每一个函数验证概率密度函数定义中的性质 2．

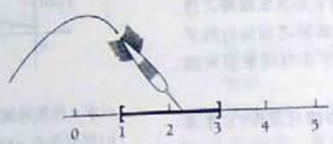
6.5　概率：期望值；正态分布

要点

- 求 $E(x)$、$E(x^2)$、均值、方差和标准差．
- 使用表计算正态分布的概率．

期望值

再一次考虑向数轴投掷飞镖，让它总是落在区间$[1,\ 3]$上．这次假设飞镖落在该区间的任何一点的可能性是相等的．



假设向数轴上投掷飞镖 100 次，并记录下落点的数值．然后，计算这些数的算术平均值(或平均数)$\bar{x}$：

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{100}}{100}=\frac{\sum_{i=1}^{100}x_i}{100}=\sum_{i=1}^{100}x_i\cdot\frac{1}{100}.$$

表达式

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{n},\quad 或\quad \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}$$

类似于积分

$$\int_1^3 x\cdot f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 f 称为 x 的概率密度函数，而在这种情况下，$f(x)$是常值函数$\frac{1}{2}$．概率密度函数把一个"权"给予 x．同时，可把 $2/n$ 看作 Δx．当求 $\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{2}\cdot(2/n)$ 时，把所有

$$x_i\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)$$

的值加起来；而这类似于在求 $\int_1^3 x\cdot f(x)\mathrm{d}x$ 时，把所有

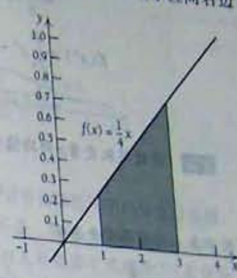
$$x\cdot f(x)\cdot\Delta x$$

的值加起来．

假设区间$[1,\ 3]$上的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{4}x$．正如从图形可看到的，这个函数给予区间右边的"权"多于左边．当飞镖落在右边时或许会有更多的点被击中．于是

466

$$\int_1^3 x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3 x\cdot\frac{1}{4}x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_1^3 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{12}(3^3-1^3)=\frac{26}{12}\approx 2.17.$$



假设我们连续投掷飞镖并计算平均数．投掷飞镖的次数越多，越可期望平均数接近于 2.17．

设 x 是区间$[a,\ b]$上的具有概率密度函数 f 的连续随机变量．

定义　x 的**期望值**(expected value)定义为

$$\mathrm{E}(x)=\int_a^b x\cdot f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 f 是 x 的概率密度函数．

随机变量期望值的概念可推广到其他随机变量的函数．假设 $y=g(x)$是随机变量 x 的一个函数，则有下面的定义．

定义　$g(x)$的**期望值**(expected value)定义为

$$\mathrm{E}(g(x))=\int_a^b g(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 f 是 x 的概率密度函数．

467

例如，

$$\mathrm{E}(x)=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{E}(x^2)=\int_a^b x^2f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^x)=\int_a^b \mathrm{e}^xf(x)\mathrm{d}x$$

和

$$\mathrm{E}(2x+3)=\int_a^b(2x+3)f(x)\mathrm{d}x.$$

例 1　已知概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{2}x,\quad 在[0,2]上,$$

求$\mathrm{E}(x)$和 $\mathrm{E}(x^2)$．

2007/08/16

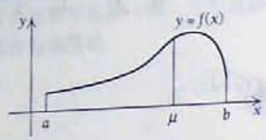
解

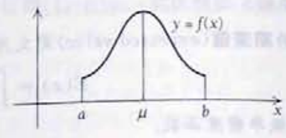
$$E(x)=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}x\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}x^2\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{1}{6}[x^3]_0^2$$
$$=\frac{1}{6}(2^3-0^3)=\frac{1}{6}\cdot 8=\frac{4}{3};$$
$$E(x^2)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}x\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}x^3\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{8}[x^4]_0^2=\frac{1}{8}(2^4-0^4)=\frac{1}{8}\cdot 16=2.$$ ■

定义 连续随机变量x的**均值**(mean)μ定义为$E(x)$. 即,

$$\mu=E(x)=\int_a^b xf(x)\,dx,$$

468 其中f是x的概率密度函数.





我们在纸板上作出概率密度函数的图形, 然后剪下区间$[a, b]$上该曲线下的区域, 可以得到随机变量均值的物理解释. 在x轴上试着求一个支点或平衡点. 那个平衡点就是均值.

定义 连续随机变量x的**方差**(variance)σ^2定义成

$$\sigma^2=E(x^2)-\mu^2=E(x^2)-[E(x)]^2=\int_a^b x^2f(x)\,dx-\left[\int_a^b xf(x)\,dx\right]^2.$$

连续随机变量的**标准差**(standard deviation)σ定义成

$$\sigma=\sqrt{方差}.$$

例2 已知概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{2}x,\quad 在[0,2]上,$$

求均值、方差和标准差.

解 由例1有

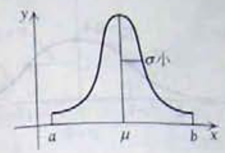
$$E(x)=\frac{4}{3}\quad 和\quad E(x^2)=2.$$

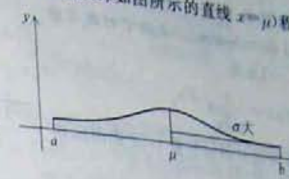
于是,

$$均值=\mu=E(x)=\frac{4}{3};$$
$$方差=\sigma^2=E(x^2)-[E(x)]^2$$
$$=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=2-\frac{16}{9}=\frac{18}{9}-\frac{16}{9}=\frac{2}{9};$$

$$标准差=\sigma=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{2}\approx 0.47.$$

不精确地说, 标准差是对f的图形接近于均值(即如图所示的直线$x=\mu$)程度的度量. ■ 469





正态分布

假设在一次测验中的平均分数是70. 通常在平均分数附近有许多低于平均分数的成绩; 而离平均分数较远的分数则不多. 在这一个例子中, 成绩为80多分的人可能多于成绩为90多分的人, 而成绩为60多分的人可能多于成绩为50多分的人. 测验的分数、人的身高和体重都是随机变量的例子, 通常都是正态分布的.

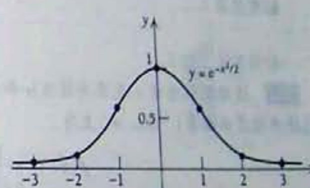
考虑区间$(-\infty, \infty)$上的函数

$$g(x)=e^{-x^2/2}$$

这个函数把全体实数的集合作为它的定义域. 它的图形是下面所示的铃形曲线. 我们可用计算器求函数值:

$$y=e^{-x^2/2}.$$

x	y
0	1
1	0.6
2	0.1
3	0.01
−1	0.6
−2	0.1
−3	0.01



这个函数有原函数, 但是原函数没有初等的形式. 不过已经证明, 在区间$(-\infty, \infty)$上它的广义积分收敛于由

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{2\pi}$$

给出的数. 这说明, 虽然无法求出不定积分的初等表达式, 但是该广义积分的数值是存在的, 已在实数集上计算出这个值. 注意, 因为面积不是1, 所以函数g不是一个概率密度函数, 但是下面的函数是概率密度函数:

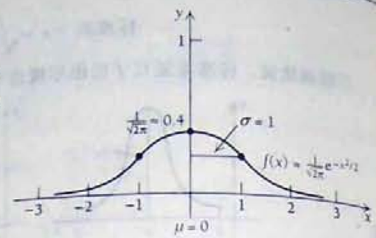
2007/08/16

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

470

定义 连续随机变量 x 有标准正态分布(standard normal distribution)，是指它的概率密度函数在$(-\infty,\ \infty)$上为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$



这个分布具有均值 0 和标准差 1. 它的图形如右图所示.

上机技术演练

探索 对于 $b=10$, $b=100$ 和 $b=1\ 000$，使用绘图器近似计算

$$\int_{-b}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx.$$

这个结果对于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$$

有何启示？这是验证

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

是否为概率密度函数的一种方法. 然后，使用类似的近似步骤说明均值是 0，而标准差是 1.

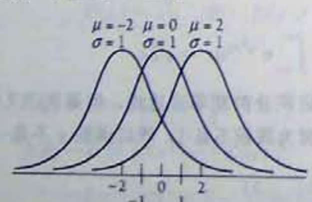
一般情况定义如下.

定义 连续随机变量 x 是具有均值 μ 和标准差 σ 的正态分布(normally distributed)，是指它的概率密度函数在$(-\infty,\ \infty)$上为

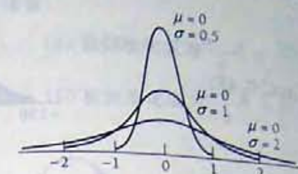
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}.$$

它的图形是标准密度函数图形的一个变换. 这可以通过沿着 x 轴平移图形和改变图形在均值附近聚集的方式来说明. 下面是一些例子.

471



具有相同的标准差和不同的均值的正态分布



具有相同的均值和不同的标准差的正态分布

正态分布在统计学中非常重要：它为行为科学和社会科学中所研究的许多问题奠定了基础. 因此，已经利用数值逼近方法(例如，习题 5.3 中给出的梯形法则)精心制作出关于标准密度函数的定积分近似值表. 本书后面的表 2 就是这样的一个表. 它包含了

$$P(0\leqslant x\leqslant t)=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx.$$

的值. 图形关于均值的对称性使得许多类型的概率可以由表来计算.

例 3 设 x 是具有标准正态分布的一个连续随机变量. 使用表 2，求下面各值.

a) $P(0\leqslant x\leqslant 1.68)$ b) $P(-0.97\leqslant x\leqslant 0)$

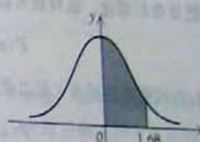
c) $P(-2.43\leqslant x\leqslant 1.01)$ d) $P(1.90\leqslant x\leqslant 2.74)$

e) $P(-2.98\leqslant x\leqslant -0.42)$ f) $P(x\geqslant 0.61)$

解

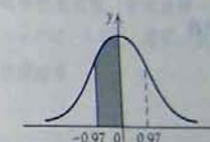
a) $P(0\leqslant x\leqslant 1.68)$是以标准正态曲线和直线 $x=0$ 及 $x=1.68$ 为边界的面积. 在表 2 中左边一列由上向下找到 1.6，然后向右移到表头为 0.08 的一列. 在那里读到 0.453 5. 因此，

$$P(0\leqslant x\leqslant 1.68)=0.453\ 5.$$



b) 因为图形的对称性，

$$P(-0.97\leqslant x\leqslant 0)$$
$$=P(0\leqslant x\leqslant 0.97)$$
$$=0.334\ 0.$$



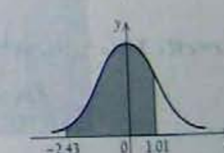
c) $P(-2.43\leqslant x\leqslant 1.01)$

$=P(-2.43\leqslant x\leqslant 0)+P(0\leqslant x\leqslant 1.01)$

$=P(0\leqslant x\leqslant 2.43)+P(0\leqslant x\leqslant 1.01)$

$=0.492\ 5+0.343\ 8$

$=0.836\ 3.$



472

d) $P(1.90\leqslant x\leqslant 2.74)$

$=P(0\leqslant x\leqslant 2.74)-P(0\leqslant x\leqslant 1.90)$

$=0.496\ 9-0.471\ 3$

$=0.025\ 6.$



2007/08/16

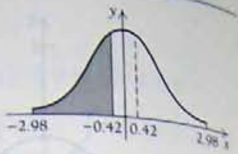
e) $P(-2.98 \leqslant x \leqslant -0.42)$

$= P(0.42 \leqslant x \leqslant 2.98)$

$= P(0 \leqslant x \leqslant 2.98) - P(0 \leqslant x \leqslant 0.42)$

$= 0.498\,6 - 0.162\,8$

$= 0.335\,8.$

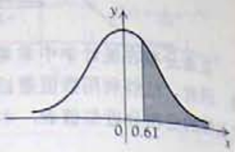


f) $P(x \geqslant 0.61)$

$= P(x \geqslant 0) - P(0 \leqslant x \leqslant 0.61)$

$= 0.500\,0 - 0.229\,1$

$= 0.270\,9.$



(因为关于直线 $x=0$ 对称，所以在直线的每一边各有一半的面积．又因为整个面积是 1，所以 $P(x \geqslant 0) = 0.500\,0$.) ■

在许多应用中，正态分布不是标准的．不能指望对所有的均值 μ 和标准差 σ 都作出表．在这种情况下，通过变换

$$X = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

可把分布标准化，这样就可以使用书后的表 2 了．也就是

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant X \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right),$$

而右边的概率使用表 2 可以求得．为了说明这种方法，考虑

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}\,dx.$$

作代换

$$X = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}.$$

则

473 $$dX = \frac{1}{\sigma}dx.$$

当 $x=a$ 时，$X=(a-\mu)/\sigma$；而当 $x=b$ 时，$X=(b-\mu)/\sigma$．于是

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}\,dx$$

而

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)X^2}\,dX \qquad \text{被积函数现在是标准密度形式}$$

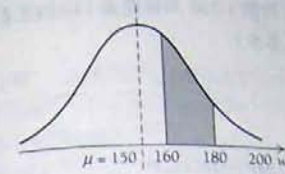
$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant X \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right). \qquad \text{这在表 2 中可以查到}$$

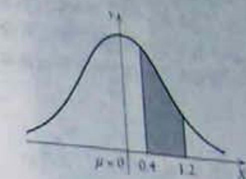
例 4 在一个班级中学生的体重 w 是具有均值 150 磅和标准差 25 磅的正态分布．求体重为 160 磅到 180 磅的学生的概率．

解 首先标准化体重：

$$180 \text{ 被标准化成为} \frac{b-\mu}{\sigma} = \frac{180-150}{25} = 1.2,$$

$$160 \text{ 被标准化成为} \frac{a-\mu}{\sigma} = \frac{160-150}{25} = 0.4.$$





于是

$$P(160 \leqslant w \leqslant 180) = P(0.4 \leqslant X \leqslant 1.2) \qquad \text{现在可以使用表 2}$$

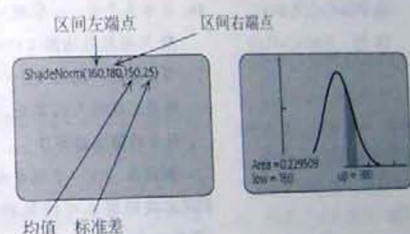
$$= P(0 \leqslant X \leqslant 1.2) - P(0 \leqslant X \leqslant 0.4)$$

$$= 0.384\,9 - 0.155\,4 = 0.229\,5.$$

因此体重为 160 磅到 180 磅的学生的概率是 0.229 5．即体重为 160 磅到 180 磅的学生大约有 23%. ■ 474

上机技术演练

绘图器上的统计学 许多新的绘图器具有广泛的统计功能．其中大部分内容在其他课程或应用中对你是有益的．这里我们将使用 TI-83 作出例 4 的一个近似值，而不需要执行标准化转换、使用表 2 或输入正态概率密度函数．首先选择一个具有 Xscl=50 和 Yscl=0.01 的适当视窗[0，300，−0.002，0.02]．然后，使用 ShadeNorm 指令，按 [2nd] [DISTR] [▷] [ENTER] 得到结果．



面积被涂上了阴影，且它是 0.229 509，或约为 23%．如果输入的是不包含端点的无限大的区间，则使用特别大的数，如 1 E 99 或 −1 E 99，将可得到充分的逼近．

2007/08/16

练习

1. 在一个班级中学生的体重是具有均值 150 磅和标准差 25 磅的正态分布.
   a)体重为 125 磅到 170 磅的学生的概率是多少?
   b)体重大于 200 磅的学生的概率是多少?
2. SAT[⊖] 分数. SAT 测验的分数是具有均值 1 020 和标准差 140 的正态分布.
   a)分数在 270 和 500 之间的百分比是多少?
   b)分数在 840 以上的百分比是多少?

习题 6.5

对于给定区间上的每个概率密度函数，求 $E(x)$、$E(x^2)$、均值、方差和标准差.

1. $f(x)=\frac{1}{5}$, $[3, 8]$
2. $f(x)=\frac{1}{4}$, $[3, 7]$
3. $f(x)=\frac{2}{9}x$, $[0, 3]$
4. $f(x)=\frac{1}{8}x$, $[0, 4]$
5. $f(x)=\frac{2}{3}x$, $[1, 2]$
6. $f(x)=\frac{1}{4}x$, $[1, 3]$
7. $f(x)=\frac{1}{3}x^2$, $[-2, 1]$
8. $f(x)=\frac{3}{2}x^2$, $[-1, 1]$
9. $f(x)=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{x}$, $[1, 3]$
10. $f(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x}$, $[1, 2]$

设 x 是具有标准正态分布的连续随机变量. 使用表 2，求下列各题.

11. $P(0\leqslant x\leqslant 2.69)$
12. $P(0\leqslant x\leqslant 0.04)$
13. $P(-1.11\leqslant x\leqslant 0)$
14. $P(-2.61\leqslant x\leqslant 0)$
15. $P(-1.89\leqslant x\leqslant 0.45)$
16. $P(-2.94\leqslant x\leqslant 2.00)$
17. $P(1.76\leqslant x\leqslant 1.86)$
18. $P(0.76\leqslant x\leqslant 1.45)$
19. $P(-1.45\leqslant x\leqslant -0.69)$
20. $P(-2.45\leqslant x\leqslant -1.69)$
21. $P(x\geqslant 3.01)$
22. $P(x\geqslant 1.01)$
23. a) $P(-1\leqslant x\leqslant 1)$
    b)由 −1 到 1 的面积的百分比是多少?
24. a) $P(-2\leqslant x\leqslant 2)$
    b)由 −2 到 2 的面积的百分比是多少?

设 x 是具有均值 $\mu=22$ 和标准差 $\sigma=5$ 的正态分布的连续随机变量. 使用表 2，求下列各题.

25. $P(24\leqslant x\leqslant 30)$
26. $P(22\leqslant x\leqslant 27)$
27. $P(19\leqslant x\leqslant 25)$
28. $P(18\leqslant x\leqslant 26)$

29～46. 使用绘图器作 11～28 题.

应用

商业与经济

47. 邮购订单. 一家邮购公司每日接到的订单数 N 是具有均值 250 和标准差 20 的正态分布. 当接到的订单数是 300 或更多时，公司必须在该天雇用额外的工人或支付加班费. 试问公司雇用额外的工人或支付加班费的日子的百分比是多少?
48. 立体声产品. 一家唱片公司每天的立体声产品数量 N 是具有均值 1 000 和标准差 50 的正态分布. 当立体声产品是 1 100 或更多时，公司承诺支付给员工这些天的奖金. 试问公司必须支付奖金的日子的概率是多少?

制造业. 在一个汽车车身的焊接线上，制造加工期间出现的延期可用各种不同的概率分布来建模. (资料来源：R. R. Inman,"Empirical Evaluation of Exponential and Independence Assumptions in Queueing Models of Manufacturing Systems," *Production and Operations Management*, Vol. 8, 409-432(1999).)

⊖ SAT 是 Scholastic Assessment Test 的缩写，是相当于中国高考的美国考试. ——译者注

49. robogate[⊖] 的处理时间是具有均值 38.6 秒和标准差 1.729 秒的正态分布. 求 robogate 的下一次操作时间为 40 秒或更少的概率.
50. 自动打孔站的处理时间是具有均值 36.2 秒和标准差 2.108 秒的正态分布. 求打孔站下一次操作时间在 35 秒和 40 秒之间的概率.

社会科学

51. 测验分数的分布. 一次心理学测验的分数 S 是具有均值 65 和标准差 20 的正态分布. 80 到 89 分为 B. 试问得 B 的概率是多少?



百分点. 设 x 是一个连续随机变量. 其分布的 p 个百分点由一个数 t 确定，它使得 x 小于或等于 t 的概率是 $p\%$：

$$P(x\leqslant t)=\frac{p}{100}.$$

例如，如果 x 有标准正态密度，则利用表 2 有

$$P(x\leqslant 1.28)\approx 90\%.$$

因此，我们说 1.28 是标准正态分布的 90 个百分点. 使用上述信息做 52 和 53 题.

52. 求标准正态分布的下列各百分点的值.
    a)30 个百分点.
    b)50 个百分点.
    c)95 个百分点.
53. SAT 的测验分数是具有均值 1 020 和标准差 140 的正态分布. 求符合下列各百分点的分数.
    a)35 个百分点.
    b)60 个百分点.
    c)92 个百分点.

一般兴趣

54. 保龄球分数. 在写本书的时候，作者的保龄球分数 S 是具有均值 201 和标准差 23 的正态分布.
    a)求分数在 190～213 间的概率，并解释你的结果.
    b)求分数在 160～175 间的概率，并解释你的结果.
    c)求分数超过 200 的概率，并解释你的结果.

综合题

对于每个在给定区间上的概率密度函数，求 $E(x)$、$E(x^2)$、均值、方差和标准差.

55. 均匀概率密度
$$f(x)=\frac{1}{b-a}\quad 在[a,b]上.$$
56. 概率密度
$$f(x)=\frac{3a^3}{x^4}\quad 在[a,\infty)上.$$

中值. 设 x 是 $[a, b]$ 上具有概率密度函数 f 的连续随机变量，则 x 的中值是使得
$$\int_a^m f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$
的数 m. 对于下列各题求中值.

57. $f(x)=\frac{1}{2}x$, $[0, 2]$
58. $f(x)=\frac{3}{2}x^2$, $[-1, 1]$
59. $f(x)=ke^{-kx}$, $[0, \infty)$
60. 商业：食糖生产. 假设装入袋中的糖数量有一个均值 μ，该值在装袋机械上是可调整的. 又假设分装的数量是具有 $\sigma=0.1$ 盎司的正态分布. 试问为了确保在 20 袋中仅有一袋少于 60 盎司，μ 应该设置为多少?
61. 商业：你的咖啡外溢了吗? 假设用咖啡机分发咖啡的均值 μ 是可以调整的. 如果一个杯子容纳 6.5 盎司，而分发咖啡的数量是具有 $\sigma=0.3$ 盎司

⊖ 一种能够自动灵活装配车身外壳的新机器人系统. ——译者注

2007/08/16

的正态分布，为了确保在 100 次中仅有一次外溢，μ 应该设置为多少？

*62. 解释在概率研究中积分法的使用.

*63. 你知道"函数 $f(x)=e^{-x^2/2}$ 的不定积分没有初等公式"，试猜想一些函数，它们看似可以作为这个函数的不定积分，然后，说明它们为什么不是.

上机技术演练

64. 近似计算积分

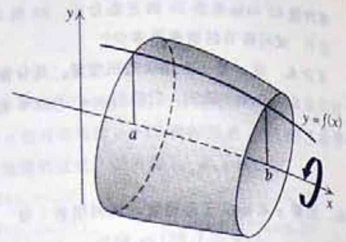
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

6.6 体积

要点

• 求旋转体的体积.

考虑 $y=f(x)$ 的图形，如果上半平面绕 x 轴旋转，则图形上的每个点都有一个圆形的轨迹，整个图形就扫描出一个曲面，称其为*旋转曲面*.



以图形、x 轴和区间$[a, b]$为边界的平面区域扫掠出一个*旋转体*，为了计算这个旋转体的体积，首先用薄的正圆柱体的有限和作为它的近似(图 1)，把区间$[a, b]$分为每个长均为 Δx 的相等的子区间，每个圆柱体的半径是 $f(x_i)$，或一般地是 $|f(x_i)|$，此处 x_i 是确定那个圆柱体的子区间的右端点. 如果 f 是非负的，于是每个圆柱体的高都是 Δx(图 2).

475
~
477

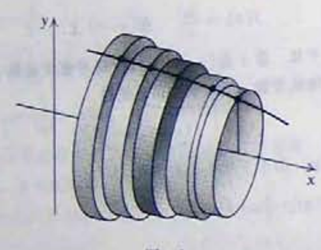


图 1

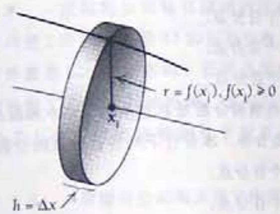


图 2

因为正圆柱体的体积为

$$V=\pi r^2 h,$$

所以每个近似的圆柱体的体积为

$$\pi\,|\,f(x_i)\,|^2\Delta x=\pi[f(x_i)]^2\Delta x.$$

旋转体的体积可近似表示成所有圆柱体的体积之和：

$$V\approx\sum_{i=1}^{n}\pi[f(x_i)]^2\Delta x.$$

实际的体积是当各圆柱体的厚度趋于零或它们的个数趋于无穷时的极限：

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi[f(x_i)]^2\Delta x=\int_a^b\pi[f(x)]^2\,dx.$$

(见 5.3 节.)这就是说，体积是函数 $y=\pi[f(x)]^2$ 由 a 到 b 的定积分.

定理 4 对于定义在区间$[a, b]$上的连续函数 f，由$[a, b]$上 f 的图形下的区域旋转得到的旋转体的体积 V 为

$$V=\int_a^b\pi[f(x)]^2\,dx.$$

例 1 求 $y=\sqrt{x}$ 的图形下由 $x=0$ 到 $x=1$ 的区域绕 x 轴旋转所生成的旋转体的体积. 478

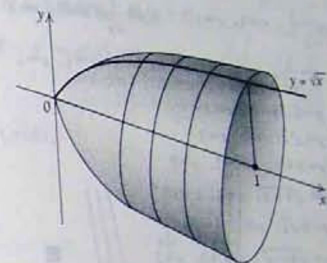
解

$$V=\int_0^1\pi[f(x)]^2\,dx=\int_0^1\pi[\sqrt{x}]^2\,dx=\int_0^1\pi x\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}[x^2]_0^1=\frac{\pi}{2}(1^2-0^2)=\frac{\pi}{2}.$$



说明如何把这解释成一个旋转体



■

例 2 求

$$y=e^x$$

的图形下由 $x=-1$ 到 $x=2$ 的区域绕 x 轴旋转生成的"喇叭"形旋转体的体积.

解

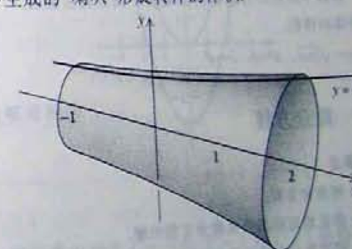
$$V=\int_{-1}^{2}\pi[f(x)]^2\,dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\pi[e^x]^2\,dx=\int_{-1}^{2}\pi e^{2x}\,dx$$

$$=\left[\frac{\pi}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{2}=\frac{\pi}{2}[e^{2x}]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^{2\cdot 2}-e^{2(-1)})$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^4-e^{-2}).$$



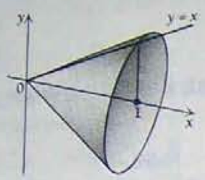
■ 479

2007/08/16

习题 6.6

求以下面的方程为边界的区域绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积.

1. $y=x$, $x=0$, $x=1$



2. $y=\sqrt{x}$, $x=0$, $x=2$
3. $y=x$, $x=1$, $x=2$
4. $y=2x$, $x=1$, $x=4$
5. $y=e^x$, $x=-2$, $x=5$
6. $y=e^x$, $x=-3$, $x=2$
7. $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=3$
8. $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=4$
9. $y=\frac{2}{\sqrt{x}}$, $x=1$, $x=3$
10. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x=1$, $x=4$
11. $y=4$, $x=1$, $x=3$
12. $y=5$, $x=1$, $x=3$
13. $y=x^2$, $x=0$, $x=2$
14. $y=x+1$, $x=-1$, $x=2$
15. $y=\sqrt{1+x}$, $x=2$, $x=10$
16. $y=2\sqrt{x}$, $x=1$, $x=2$
17. $y=\sqrt{4-x^2}$, $x=-2$, $x=2$
18. $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $x=-r$, $x=r$

对于 18 题作出图形. 在这里你将得到球的体积的一般公式.

综合题

求以下面图形为边界的区域绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积.

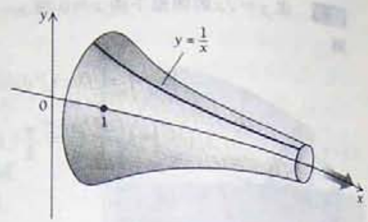
480 19. $y=\sqrt{\ln x}$, $x=e$, $x=e^2$

20. $y=\sqrt{xe^{-x}}$, $x=1$, $x=2$

21. 考虑在区间$[1, \infty)$上的函数 $y=1/x$. 在 6.3 节中证明了曲线下的面积不存在, 即

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

发散.



求区间$[1, \infty)$上 $y=1/x$ 的图形下的区域绕 x 轴旋转形成的旋转体的体积, 即求

$$\int_1^{\infty} \pi\left[\frac{1}{x}\right]^2 \mathrm{d}x.$$

这个旋转体有时称为 Gabriel[⊖] 的喇叭.

上机技术演练

22. Gabriel 的喇叭或无穷的油漆罐的悖论. 尽管我们在这里不能证明它, 但是还是给出 Gabriel 的喇叭(见 21 题)的表面面积为

$$S=\int_1^{\infty} \frac{2\pi}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\mathrm{d}x.$$

这说明 Gabriel 的喇叭的表面积不存在. 因为喇叭的体积存在, 但是表面积不存在, 这就出现了悖论. 这像是有一个油漆罐, 它具有有限体积, 但却没有充足的油漆去涂抹罐的表面.

6.7 微分方程

要点

- 解微分方程.
- 验证给定的函数是微分方程的解.
- 用变量分离法解微分方程.

⊖ 基督教(圣经)中传递上帝佳音的七大天使之一. ——译者注

微分方程(differential equation)是一个涉及导数或微分的方程. 在第 4 章中, 学习过一个非常重要的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP,$$

其中 P 或 $P(t)$ 是在时间 t 的人口. 这个方程是一个无约束人口增长的模型. 它的解是函数

$$P=P_0e^{kt},$$

其中 P_0 是初始人口数, 即在 $t=0$ 时的人口数. 正如这个方程所显现的, 微分方程具有广泛的应用.



波浪可用微分方程来描述

解某些微分方程

在本章中, 将经常使用符号 y' 表示导数, 这主要是因为它简单. 因此, 如果 $y=f(x)$, 则

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

当求出定积分或不定积分时, 就已经求出了某些微分方程的解. 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x) \quad 或 \quad y'=g(x)$$

有解

$$y=\int g(x)\mathrm{d}x.$$

例 1 解 $y'=2x$.

解

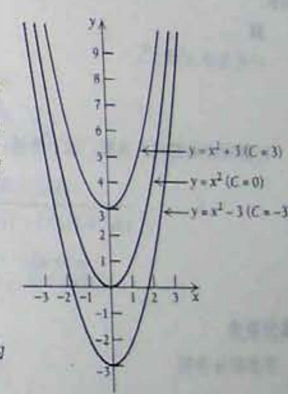
$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C.$$ ■

再考察例 1 的解. 注意其积分常数. 这个解称为通解, 因为取 C 的所有值就得到所有的解. 取 C 的特定值得到特解. 例如, 下列函数都是 $y'=2x$ 的特解:

$$y=x^2+3,$$

$$y=x^2,$$

$$y=x^2-3.$$



右边的图中展示了少数几个特解的曲线. 通解可视为所有特解的集合, 它是一个曲线族. 481

上机技术演练

探索 对于 $y'=3x^2$, 写出通解. 然后作出对于 $C=-2$, $C=0$ 和 $C=1$ 的特解的图形.

2007/08/16

知道函数在一个特定点的值，我们就可以从通解中选择出一个特解.

例 2 已知 $f(0)=8$，解

$$f'(x)=e^x+5x-x^{1/2}.$$

解

a)首先求通解：

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=e^x+\frac{5}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{3/2}+C.$$

b)因为 $f(0)=8$，代入求 C：

$$8=e^0+\frac{5}{2}\cdot 0^2-\frac{2}{3}\cdot 0^{3/2}+C$$

$$8=1+C$$

$$7=C.$$

于是特解是

$$f(x)=e^x+\frac{5}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{3/2}+7.$$

■

检验解

482 为了检验一个函数是微分方程的解，我们必须求导数并代入方程.

例 3 证明 $y=4e^x+5e^{3x}$ 是

$$y''-4y'+3y=0$$

的解.

解

a)首先求 y' 和 y''：

$$y'=4e^x+15e^{3x},$$

$$y''=4e^x+45e^{3x}.$$

b)然后把导数代入方程，如下所述：

$y''-4y'+3y=0$	
$(4e^x+45e^{3x})-4(4e^x+15e^{3x})+3(4e^x+5e^{3x})$	0
$4e^x+45e^{3x}-16e^x-60e^{3x}+12e^x+15e^{3x}$	
0	

■

变量分离法

考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx}=2xy. \qquad (1)$$

像第 5 章那样，把 dy/dx 看成一个商. 用 dx 乘方程(1)，然后再乘以 $1/y$ 得到

$$\frac{dy}{y}=2x\,dx,\quad y\neq 0. \qquad (2)$$

我们说，已经分离了变量，这意味着所有涉及 y 的表达式都在一边而所有涉及 x 的表达式都在

另一边. 然后积分方程(2)的两边：

$$\int\frac{dy}{y}=\int 2x\,dx$$

$$\ln y=x^2+C,\quad y>0.$$

因为任何两个原函数仅相差一个常数，所以我们只使用一个常数. 回顾对数的定义，如果 $\log_a b=t$，则 $b=a^t$. 现在 $\ln y=\log_e y=x^2+C$，因此根据对数定义，我们有

$$y=e^{x^2+C}=e^{x^2}\cdot e^C.$$

于是微分方程(1)的解是

$$y=C_1e^{x^2},\quad 其中\quad C_1=e^C.$$

事实上，C_1 仍然是一个任意常数.



在 1968 年墨西哥城的奥运会上，Bob Beamon 创造了奇迹般的 29 英尺 $2\frac{1}{2}$ 英寸的跳远记录. 许多人认为这是由于高海拔，这里的海拔高度是7 400英尺. 用微分方程来分析，M. N. Bearley 在"墨西哥城的跳远奇迹"中反驳了海拔理论(*Mathematics Magazine*, Vol.45, 241-246(November 1972)). Bearley 反驳道，Beamon 的跳远世界纪录是其不寻常的速度(100 码短跑的速度是 9.5 秒)和成功地踏在起跳板的理想位置的结果. 483

例 4 解

$$3y^2\frac{dy}{dx}+x=0,$$

当 $x=0$ 时，$y=5$.

解

a)首先分离变量如下：

$$3y^2\frac{dy}{dx}=-x$$

$$3y^2\,dy=-x\,dx.$$

然后两边积分：

$$\int 3y^2\,dy=\int -x\,dx$$

$$y^3=-\frac{x^2}{2}+C=C-\frac{x^2}{2}$$

$$y=\sqrt[3]{C-\frac{x^2}{2}}.\quad 取立方根$$

b)因为当 $x=0$ 时 $y=5$，代入求 C：

$$5=\sqrt[3]{C-\frac{0^2}{2}}\qquad 5\ 替换\ y，而\ 0\ 替换\ x$$

$$5=\sqrt[3]{C}$$

$$125=C.\qquad 两边立方$$

特解是

$$y=\sqrt[3]{125-\frac{x^2}{2}}.$$

■

例 5 解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}.$$

解 首先分离变量：

$$y\frac{dy}{dx}=x$$
$$y\,dy=x\,dx.$$

然后两边积分：

$$\int y\,dy=\int x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C$$
$$y^2=x^2+2C$$
$$y^2=x^2+C_1,$$

此处 $C_1=2C$. 作这个代换是为了简化公式. 最后得到解

484

$$y=\sqrt{x^2+C_1}$$

和

$$y=-\sqrt{x^2+C_1}.$$ ■

例6 解 $y'=x-xy$.

解 在分离变量之前，还原 y' 为 dy/dx：

$$\frac{dy}{dx}=x-xy.$$

然后分离变量：

$$dy=(x-xy)dx$$
$$dy=x(1-y)dx$$
$$\frac{dy}{1-y}=x\,dx.$$

接下来，两边积分：

$$\int\frac{dy}{1-y}=\int x\,dx$$
$$-\ln(1-y)=\frac{x^2}{2}+C,\quad 1-y>0$$
$$\ln(1-y)=-\frac{x^2}{2}-C$$
$$1-y=e^{-x^2/2-C}$$
$$-y=e^{-x^2/2-C}-1$$
$$y=-e^{-x^2/2-C}+1$$
$$=-e^{-x^2/2}\cdot e^{-C}+1.$$

因此，

$$y=1+C_1e^{-x^2/2},\quad 其中\quad C_1=-e^{-C}.$$ ■

上机技术演练

探索 解 $y'=2x+xy$. 作出关于 $C_1=-2$，$C_1=0$ 和 $C_1=1$ 的特解的图形.

经济应用：弹性

例7 假设对于某种产品，对一切 $p>0$ 需求弹性都是 1. 也就是说，对一切 $p>0$ 都有 $E(p)=1$. 求需求函数 $x=D(p)$.（见 4.6 节.）

解 因为对一切 $p>0$ 都有 $E(p)=1$，

$$1=E(p)=-\frac{pD'(p)}{D(p)}=-\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}.$$

因此

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{x}{p}. \tag{3}$$ 485

分离变量得到

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dx}{x}.$$

现在两边积分：

$$\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln p=-\ln x+C.$$ $p>0$ 和 $dx/dp<0$，因为需求函数是递减的，所以 $x>0$（见(3)式）

因此

$$\ln p+\ln x=C$$
$$\ln px=C$$
$$px=e^C.$$

令 $C_1=e^C=px$，则

$$p=\frac{C_1}{x}\quad 和\quad x=\frac{C_1}{p}.$$ ■

这反映了弹性总是 1 的需求函数的特征.

心理学应用：对于刺激的反应

Weber-Fechner 定律

在心理学中，刺激-反应模型断言，反应 R 关于刺激 S 的变化率 dR/dS 是与刺激成反比例，即

2007/08/16

$$\frac{dR}{dS} = \frac{k}{S},$$

其中 k 是某个正常数.

为了解这个方程，首先分离变量：

$$dR = k \cdot \frac{dS}{S}.$$

然后两边积分：

$$\int dR = \int k \cdot \frac{dS}{S}$$

$$R = k\ln S + C. \tag{4}$$

现在假设 S_0 是可以持续察觉到的刺激的最低水平. 这是阈值或检测阈. 例如，在非常安静条件下能够持续察觉到的声音的最低水平是放在 20 英尺处的钟表发出的滴答声. 如果 S_0 是
486 能够察觉到的声音的最低水平，那么对它的反应是 0 的假设似乎是合理的. 即有 $R(S_0)=0$. 把这个条件代入(4)式得到

$$0 = k\ln S_0 + C,$$

或

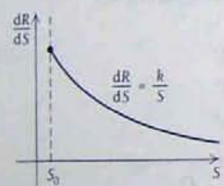
$$-k\ln S_0 = C.$$

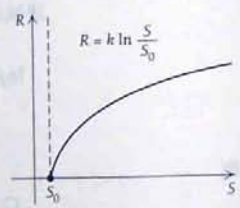
用 $-k\ln S_0$ 替换(4)式中的 C 得到

$$R = k \cdot \ln S - k \cdot \ln S_0 = k(\ln S - \ln S_0).$$

利用对数性质，我们有

$$R = k \cdot \ln \frac{S}{S_0}.$$





看上面 dR/dS 和 R 的图形. 注意，当刺激增大时，变化率减小. 也就是说，当受到的刺激较强时反应的变化较小. 例如，假设你在一个具有一只 50 瓦灯泡的室内. 如果灯泡突然变成了 100 瓦，你可能会很强烈地意识到它们的差别，即你的反应是强烈的. 如果此后灯泡又变成了 150 瓦，你的反应就不像它从 50 瓦变到 100 瓦那样强烈. 灯泡从 150 瓦变到 200 瓦将会引起更小的反应，如此等等.

下面是几种不同的检测阈.

刺激	检测阈
光	在黑暗的夜晚距离 30 英里的烛光
味道	用 1 汤匙糖兑 2 加仑水的比例稀释的糖水
气味	一滴香水扩散到三个通常大小的房间中
接触	一只蜜蜂的翅膀落在距你的面颊 1 厘米（约等于 $\frac{3}{8}$ 英寸）处

习题 6.7

求下列方程的通解和三个特解.

1. $y' = 4x^3$
2. $y' = 6x^2$
3. $y' = e^{2x} + x$
4. $y' = e^{4x} - x + 1$
5. $y' = \frac{3}{x} - x^2 + x^5$
6. $y' = \frac{5}{x} + x^2 - x^4$

求下列方程由已知条件确定的特解.

7. $y' = x^2 + 2x - 3$；当 $x=0$ 时 $y=4$
8. $y' = 3x^2 - x + 5$；当 $x=0$ 时 $y=6$
9. $f'(x) = x^{2/3} - x$；$f(1) = -6$
10. $f'(x) = x^{2/3} + x$；$f(1) = -7$
11. 证明 $y = x\ln x + 3x - 2$ 是
$$y'' - \frac{1}{x} = 0$$
的解.
12. 证明 $y = x\ln x - 5x + 7$ 是
$$y'' - \frac{1}{x} = 0$$
的解.
13. 证明 $y = e^x + 3xe^x$ 是
$$y'' - 2y' + y = 0$$
的解.
14. 证明 $y = -2e^x + xe^x$ 是
$$y'' - 2y' + y = 0$$
的解.

求解.

15. $\frac{dy}{dx} = 4x^3 y$
16. $\frac{dy}{dx} = 5x^4 y$
17. $3y^2 \frac{dy}{dx} = 5x$
18. $3y^2 \frac{dy}{dx} = 7x$
19. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$
20. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$
21. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{y}$
22. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}$
23. $y' = 3x + xy$；当 $x=0$ 时 $y=5$
24. $y' = 2x - xy$；当 $x=0$ 时 $y=9$
25. $y' = 5y^{-2}$；当 $x=2$ 时 $y=3$
26. $y' = 7y^{-2}$；当 $x=1$ 时 $y=3$
27. $\frac{dy}{dx} = 3y$
28. $\frac{dy}{dx} = 4y$
29. $\frac{dP}{dt} = 2P$
30. $\frac{dP}{dt} = 4P$
31. 已知 $f(1) = \frac{23}{3}$，解
$$f'(x) = \frac{1}{x} - 4x + \sqrt{x}.$$

应用

商业与经济

32. **由边际收益确定总收益.** 某种产品的边际收益为 $R'(x) = 300 - 2x$. 假设 $R(0)=0$，求总收益函数 $R(x)$.
33. **由边际成本确定总成本.** 某种产品的边际成本为 $C'(x) = 2.6 - 0.02x$. 假设固定成本是 120 美元，即 $C(0) = 120$ 美元，求总成本函数 $C(x)$ 和平均成本 $A(x)$.
34. Domar 的资本扩展模型是
$$\frac{dI}{dt} = hkI,$$
其中 I 是投资，h 是投资生产率(常数)，k 是对消费者的边际生产率(常数)，而 t 是时间.
a) 使用变量分离法解微分方程.
b) 根据条件 $I_0 = I(0)$ 重写这个解.
35. **由边际利润确定总利润.** 某公司的边际利润 P 是(作为总成本 C 的函数)
$$\frac{dP}{dC} = \frac{-200}{(C+3)^{3/2}},$$
a) 如果当 $C=61$ 美元时 $P=10$ 美元，求利润函数 $P(C)$.

2007/08/16

b)在成本是多少时公司将收支相抵($P=0$)?

36. 股票的增长. 某种股票的增长率模型为

$$\frac{dV}{dt}=k(L-V),\quad 当 t=0 时 V=20 美元,$$

其中 V 是在时间 t(月)后每股股票的价格, $L=$ 24.81 美元是每股股票的极限价格, 而 k 是一个常数. 求微分方程依赖于 t 和 k 的解.

37. 效用. 消费者获得 S 件产品的满意度 R 用微分方程模型可表示为

$$\frac{dR}{dS}=\frac{k}{S+1},$$

其中 k 是一个正的常数.

a)使用变量分离法解这个微分方程.

b)根据初始条件 $R(0)=0$ 重写解.

c)解释条件 $R(0)=0$ 为什么是合理的.

弹性. 已知需求函数 $p=D(x)$ 的下列弹性条件, 求需求函数.

38. $E(p)=\frac{4}{p}$; 当 $p=4$ 时 $x=e$

39. $E(p)=\frac{p}{200-p}$; 当 $p=10$ 时 $x=190$

40. $E(p)=2$, 对一切 $p>0$

41. $E(p)=n$, 对某个常数 n 和一切 $p>0$

生命科学与物理学

42. 指数增长.

a)使用变量分离法解无约束增长的微分方程模型

$$\frac{dP}{dt}=kP.$$

b)根据条件 $P_0=P(0)$ 重写解.

社会科学

43. Brentano-Stevens 定律. 关于 Weber-Fechner 定律的有效性, 已经成为心理学家争论不休的课题. 模型

$$\frac{dR}{dS}=k\cdot\frac{R}{S}$$

也是一个猜测的并且经过试验的模型, 其中 k 是一个正的常数. 求这个方程的通解. (这也称为刺激-反应的幂法则.)

综合题

*44. 讨论在这一章的诸多应用中你所能使用的积分法.

上机技术演练

45. 解 $dy/dx=5/y$. 作出对于 $C_1=5$, $C_1=-200$ 和 $C_1=100$ 的特解的图形.

概要与复习

关键术语

Consumer's surplus(消费者盈余), 436
Producer's surplus(生产者盈余), 437
Equilibrium point(平衡点), 437
Continuous money flow(连续资金流), 441
Amount of a continuous money flow(连续资金流量), 442
Present value(现值), 444
Accumulated present value(累积现值), 445
Improper integral(广义积分), 449
Convergent integral(收敛积分), 449
Divergent integral(发散积分), 449
Probability(概率), 454
Continuous random variables(连续随机变量), 456
Probability density function(概率密度函数), 459
Uniform distribution(均匀分布), 462
Exponential distribution(指数分布), 462
Expected value(期望值), 467
Mean(均值), 468
Variance(方差), 469
Standard deviation(标准差), 469
Standard normal distribution(标准正态分布), 471
Normal distribution(正态分布), 471
Volume(体积), 478
Differential equation(微分方程), 481
Separation of variables(变量分离法), 483

复习题

这些复习题是为测验准备的, 它们也可以用作不限时间的练习测验. 答案在书后, 答案中还包括方括号内的参考章节. 它告诉你, 如果你的答案不正确, 应该再学习哪个章节.

已知 $p=D(x)=(x-6)^2$ 和 $p=S(x)=x^2+12$. 求下列各题.

1. 平衡点.

2. 在平衡点处的消费者盈余.

3. 在平衡点处的生产者盈余.

4. 商业: 连续资金流量. 如果每年按永续复利 10% 投资 2 400 美元, 求 15 年后的连续资金流量.

5. 商业: 连续资金流量. 考虑资金以每年 P_0 美元的常流转率连续注入到一项投资中. P_0 应该是多少才能使 25 年后按永续复利 12% 计息的连续资金流量是 40 000 美元?

6. 物理学: 碳酸钾的需求. 1997($t=0$)年, 全世界碳酸钾的消耗量是 24 000 千吨, 而对碳酸钾的需求正在以每年 3% 的速度增长. 如果需求继续以这个速度增长, 试问从 1997 年到 2002 年全世界需要消耗碳酸钾多少吨?

7. 物理学: 碳酸钾的消耗. 全世界碳酸钾可供应量是 8 400 000 千吨. 按 6 题中的增长速度继续下去, 且没有发现新的储藏量, 世界上碳酸钾的储藏量何时将消耗尽?

8. 商业: 现值. 求按永续复利 12% 计息, 50 年后到期的结存为 100 000 美元的现值.

9. 商业: 累积现值. 如果每年有 4 800 美元的连续资金流量, 且现行的利率是 9%, 求 20 年后这项投资的累积现值.

10. 商业: 累积现值. 在 9 题中的连续资金流量是持续注入的情况下, 求投资的累积现值.

确定下列广义积分是收敛还是发散, 如果收敛, 请计算它的值.

11. $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$　　12. $\int_1^{\infty}e^{4x}dx$

13. $\int_0^{\infty}e^{-2x}dx$

14. 求 k 使得 $f(x)=k/x^3$ 是在区间[1, 2]上的一个概率密度函数, 然后写出概率密度函数.

15. 商业: 等候时间. 一个人随机地抵达一个巴士车站, 在那里等候巴士的时间 t 不超过 25 分钟. t 的概率密度函数是 $f(t)=\frac{1}{25}$, $0\leqslant t\leqslant 25$. 求这个人不超过 15 分钟等到一辆巴士的概率.

已知[0, 1]上的概率密度函数为

$$f(x)=6x(1-x),$$

求下列各题.

16. $E(x^2)$　　17. $E(x)$

18. 均值　　19. 方差

20. 标准差

设 x 是有标准正态密度的连续随机变量. 使用表 2, 求下列各题.

21. $P(0\leqslant x\leqslant 1.85)$

22. $P(-1.74\leqslant x\leqslant 1.43)$

23. $P(-2.08\leqslant x\leqslant -1.18)$

24. $P(x\geqslant 0)$

25. 商业: 比萨饼的销售. 在 Benito 比萨饼店每天销售的比萨饼数量是正态分布的, 它具有均值 400 和标准差 60, 试问在一天中销售数量是 480 或更多的概率是多少?

求以下列各图形为边界的区域绕 x 轴旋转所生成的旋转体的体积.

26. $y=x^2$, $x=1$, $x=2$

27. $y=\frac{1}{x+2}$, $x=0$, $x=1$

解下列微分方程.

28. $\frac{dy}{dx}=11x^{10}y$　　29. $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$

30. $\frac{dy}{dx}=4y$; 当 $x=0$ 时 $y=5$.

31. $\frac{dv}{dt}=5v^{-2}$, 当 $t=3$ 时 $v=4$.

32. $y'=\frac{3x}{y}$　　33. $y'=8x-xy$

34. 经济学: 弹性. 已知下列弹性条件:

$$E(p)=\frac{p}{p-100};\quad 当 p=30 时 x=70,$$

求需求函数.

35. 商业: 股票的增长. 某种股票的增长率模型是

$$\frac{dV}{dt}=k(L-V),\quad 当\ t=0\ 时\ V=30\ 美元.$$

其中 V 是在时间 t(月)后每股股票的价格，$L=36.37$ 美元是每股股票的极限价格，而 k 是一个常数. 求微分方程依赖于 t 和 k 的解.

综合题

36. 函数 $f(x)=x^2$ 是区间$[-c, c]$上的一个概率密度函数. 求 c.

测验

已知供给函数和需求函数

$$p=D(x)=(x-7)^2$$

和

$$p=S(x)=x^2+x+4,$$

求下列各题.

1. 平衡点.
2. 在平衡点处的消费者盈余.
3. 在平衡点处的生产者盈余.
4. **商业：连续资金流量.** 如果每年按永续复利 6% 投资 1 200 美元，求 15 年后的连续资金流量.
5. **商业：连续资金流量.** 考虑资金以每年 P_0 美元的常流转率连续注入到一项投资中. P_0 应该是多少才能使 25 年后按永续复利 6% 计息的连续资金流量是 20 000 美元?
6. **物理学：铁矿石的需求.** 1997($t=0$)年，全世界铁矿石的消耗量是 1 030 000 千吨，而对铁矿石的需求正在以每年 6% 的指数率增长. 如果需求继续以这个速度增长，试问从 1997 年到 2002 年全世界需要消耗铁矿石多少吨?
7. **物理学：铁矿石的消耗.** 全世界铁矿石可供应量是 270 000 000 千吨. 假设铁矿石的需求量以每年 6% 的速度继续增长，且没有发现新的储藏量. 试问世界上铁矿石的储藏量何时将被消耗尽?
8. **商业：现值.** 孩子出生以后，父母想要为孩子作初始投资 P_0，希望在孩子 20 岁生日时该投资按永续复利 7% 增长到 10 000 美元. 试问初始投资应该是多少?
9. **商业：累积现值.** 如果每年有 3 800 美元的连续资金流量，且现行的利率是 11%，求 20 年后这项投资的累积现值.
10. **商业：累积现值.** 在 9 题中的连续资金流量是持续注入的情况下，求投资的累积现值.

确定下列广义积分是收敛还是发散，如果收敛，请计算它的值.

11. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$

12. $\int_0^{\infty}\frac{2}{1+3x}dx$

13. 求 k 使得 $f(x)=kx^3$ 是在区间$[0, 2]$上的一个概率密度函数. 然后写出概率密度函数.
14. **商业：通话时间.** 某电话公司测定，通话持续时间 t 是具有概率密度函数

$$f(t)=2e^{-2t},\quad 0\leqslant t<\infty$$

的指数分布随机变量. 求通话持续时间不超过 1 分钟的概率.

已知$[1, 3]$上的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{4}x$，求下列各题.

15. $E(x)$ 16. $E(x^2)$
17. 均值 18. 方差
19. 标准差

设 x 是有标准正态密度的连续随机变量. 使用表 2，求下列各题.

20. $P(0\leqslant x\leqslant 1.5)$
21. $P(-2.31\leqslant x\leqslant -1.05)$
22. $P(-1.61\leqslant x\leqslant 1.76)$
23. 在某个城市中各种商店内每磅 T 字牛排[①]的价格 p 是具有均值 4.75 美元和标准差 0.25 美元的正态分布. 试问每磅价格是 4.80 美元或更高的概率是多少?

求以下列各图形为边界的区域绕 x 轴旋转所生成的旋转体的体积.

24. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x=1$, $x=5$
25. $y=\sqrt{2+x}$, $x=0$, $x=1$

解下列微分方程.

26. $\frac{dy}{dx}=8x^7y$ 27. $\frac{dy}{dx}=\frac{9}{y}$
28. $\frac{dy}{dx}=6y$, 当 $x=0$ 时 $y=11$
29. $y'=5x^2-x^2y$ 30. $\frac{dv}{dt}=2v^{-3}$
31. $y'=4y+xy$
32. **经济学：弹性.** 已知下列弹性条件：

$$E(p)=4,\quad 对一切\ p>0,$$

求需求函数.
33. **商业：股票的增长.** Glamour 工业股票的增长率模型是

$$\frac{dV}{dt}=k(L-V),$$

其中 V 是在时间 t(月)后每股股票的价格，$L=36$ 美元是每股股票的极限价格，而 k 是一个常数，$V(0)=0$ 美元.

a)写出依赖于 L 和 k 的解 $V(t)$.

b)如果 $V(6)=18$ 美元，试确定 k，近似到百分之一.

c)利用 b)中求出的 k 值重新写出依赖于 t 的 $V(t)$.

d)使用 c)中的公式求 12 个月后股票的价格 $V(12)$.

e)在多少个月后价格是 30 美元?

综合题

34. 函数 $f(x)=x^3$ 是区间$[0, b]$上的一个概率密度函数. 试问 b 是多少?
35. 确定下列广义积分是收敛还是发散，如果收敛，请计算它的值.

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^3e^{-x^4}dx.$$

上机技术演练

36. 近似计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx.$$

① 从牛腰部细小的末端提取的含有 T 形骨的厚的上等牛排. ——编辑注

上机技术的深入应用

曲线拟合与汽水瓶的体积

考虑下面的花瓶. 如何计算它的体积?

一种方法是用液体完全装满这个容器，然后再将液体倒入一个可测量的装置内. 另一种方法是使用微积分和曲线拟合法或绘图器的 REGRESSION 选项. 将花瓶翻转使其侧面向上，如下图所示. 作一系列由中心到顶部的垂直距离的测量，再使用绘图器作曲线拟合或运行 REGRESSION 程序，然后使用绘图器的积分法计算体积.



487～492

确定下列广义积分是收敛还是发散，如果收敛，请计算它的值.

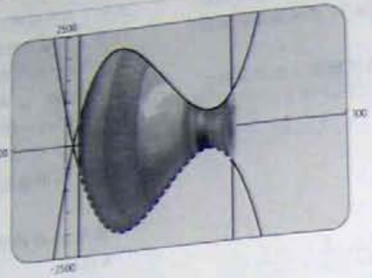
37. $\int_{-\infty}^{\infty}x^3e^{-x^4}dx$ 38. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^{3/2}}$

上机技术演练

39. 近似计算积分

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx.$$

2007/08/16



假设下面是花瓶外轮廓曲线的数值表.

x	y	x	y
5	547.5	40	1 020.0
10	1 440.0	45	687.5
15	1 932.5	50	480.0
20	2 100.0	55	472.5
25	2 017.5	60	740.0
30	1 760.0	61	833.1
35	1 402.5		

练习

1. 使用绘图器上的 **REGRESSION** 选项作一个三次多项式函数与这组数据拟合.

2. 使用 1 题中求出的函数，在区间[5，61]上用积分求花瓶的体积.



现在考虑右面所示的汽水瓶. 用相似的方式求它的体积. 把瓶子翻转成侧面向上，且如对花瓶所做的那样使用测量装置作垂直高度的测量.

493



测量的表如下.

x	y	x	y
1	0.938	6	1.313
2	1.375	7	1.281
3	1.156	8	0.813
4	1.250	9	0.500
5	1.313	9.875	0.625

练习

3. 使用绘图器上的 **REGRESSION** 选项作一个四次多项式函数与这组数据拟合.

4. 使用 3 题中求出的函数，用积分求汽水瓶的体积. 你的答案以立方英寸为单位. 利用 1 立方英寸＝0.554 24 液体盎司，将答案转换成以液体盎司为单位.

5. 这个瓶子有 20 盎司的容量. 曲线拟合过程应该如何进行才可计算出此容量？

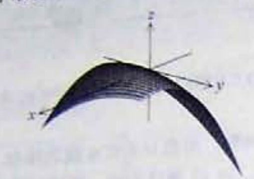
6. 试求一条曲线，它可以给出体积较好的估计. 这条曲线是什么？计算出的体积又是多少？ 494

第7章 多元函数

应用 某公司生产两种高尔夫球，一种售价3美元，另一种售价2美元. 生产和销售3美元的球x千个和2美元的球y千个的总利润是

$$P(x,y)=-2x^2+2xy-y^2+12x-4y-7\text{(千美元)}.$$

这是多元函数的一个例子. 为了取得最大利润，求必须生产和销售每类球的总数.



$z=P(x,y)=-2x^2+2xy-y^2+12x-4y-7$

为了解这个问题，必须学习求所谓的偏导数和使用一个类似于第3章中用过的极大-极小值检验法. 结果证明生产和销售4 000个3美元的球和2 000个2美元的球可使利润最大.

这个问题出现在7.4节的例3中.

引言 具有多个输入的函数称为多元函数. 在这一章里，我们介绍这些函数，并且为了求偏导数而学习如何求这些函数的导数. 然后利用这些函数及其偏导数求解极大-极小值问题.
495 最后，讨论这些函数的积分.

7.1 多元函数

要点

- 求多元函数的函数值.

假设某厂商生产一种产品x件，每件产品的利润为4美元，则它的总利润$P(x)$为

$$P(x)=4x.$$

这是一个变量的函数.

假设厂商生产两种产品，每件利润为4美元的产品生产x件，每件利润为6美元的产品生产y件，则它的总利润P是两个变量x和y的函数，而且由

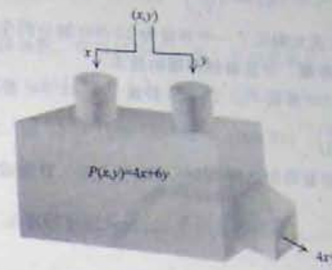
$$P(x,y)=4x+6y$$

给出. 这个函数规定输入对(x,y)对应于唯一的输出数$4x+6y$.

定义 二元函数(function of two variables)规定每个输入对(x,y)恰好对应于一个输出数$f(x,y)$.

二元函数也可看成是具有两个输入的机器. 二元函数的定义域是平面上的数对(x,y)组

成的集合. 当函数由一个公式给出时，如果没有其他限制，它的定义域由代入公式有意义的一切有序对(x,y)组成.



例1 对于$P(x,y)=4x+6y$，求$P(25,10)$.

解 $P(25,10)$是用25替换x和10替换y求得的函数的值：

$$P(25,10)=4\cdot 25+6\cdot 10=100+60=160\text{(美元)}.$$

这意味着销售25件第一种产品和10件第二种产品，这个生产两种产品的厂商将得到160美元的利润. 496

■

下面是**多元函数**(functions of several variables)的例子，即两个或更多个变量的函数. 如果有n个变量，则该函数有n个输入.

例2 商业：总成本. 某公司的总成本(以千美元计)为

$$C(x,y,z,w)=4x^2+5y+z-\ln(w+1).$$

其中x是员工工资，y是原料的开销，z是广告宣传的开销，w是机器的开销. 这是一个四元函数(所有的变量都以千美元计). 求$C(3,2,0,10)$.

解 用3替换x，2替换y，0替换z，10替换w：

$$\begin{aligned}C(3,2,0,10)&=4\cdot 3^2+5\cdot 2+0-\ln(10+1)\\&=4\cdot 9+10+0-2.397\ 895\\&\approx 43.6\text{(千美元)}.\end{aligned}$$

■



例3 商业：储存设备的成本. 一个商行购买了一件成本为C_1美元而容量为V_1的储存设备. 后来他又想用一件成本为C_2美元而容量为V_2的新设备取代原有的设备. 新容量与原容量的比是

$$\frac{V_2}{V_1}=k.$$

因此，

$$V_2=kV_1.$$

从工业经济学角度来看，在这种情况下，新设备的成本可

2007/08/16

用三元函数

$$C_2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{0.6} C_1 = k^{0.6} C_1 \tag{1}$$

计算. 某饮料公司用 45 000 美元购买了一个容量为 10 000 加仑的生产储存罐，后来又决定购买一个容量为原来两倍的储存罐，计算新储存罐的成本.

解 在(1)式中，用 20 000 替换 V_2，10 000 替换 V_1，45 000 替换 C_1，得到

$$C_2 = \left(\frac{20\,000}{10\,000}\right)^{0.6}(45\,000) = 2^{0.6}(45\,000) \approx 68\,207.25(\text{美元}).$$

注意成本增加大约 52%将使容量增加达到 100%. 这与人力、管理或购买储存罐产生的其他设

497 备等成本的增加无关. ■

上机技术演练

练习

1. 依照最近的人口普查，旧金山的总人口是 1 149 000，而奥克兰的总人口是 373 000. 两个城市之间的距离是 8 英里. 在这两个城市之间每天打电话的平均次数是多少?



这一张 NASA(美国国家航空与航天管理局)照片展示了在高空观察到的旧金山和奥克兰. 社会学家说，当两个城市合并时，它们之间的通信联络将增加.

例 4 社会科学：引力模型. 两个城市之间每天打电话的平均次数为

$$N(d, P_1, P_2) = \frac{2.8 P_1 P_2}{d^{2.4}},$$

其中 d 是城市间以英里为单位的距离，P_1 和 P_2 是它们的总人口. ■

一个常数也可看成是一个多元函数.

例 5 常值函数 f 为

$$f(x, y) = -3, \quad \text{对一切的输入 } x \text{ 和 } y.$$

求 $f(5, 7)$ 和 $f(-2, 0)$.

解 因为这是一个常值函数，所以对任何 x 和 y 它的值都是 -3. 因此，

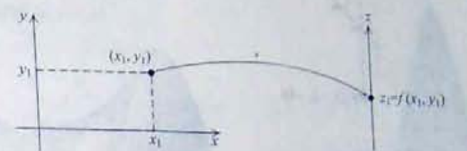
$$f(5,7) = -3, \quad f(-2,0) = -3.$$ ■

几何解释

考虑二元函数

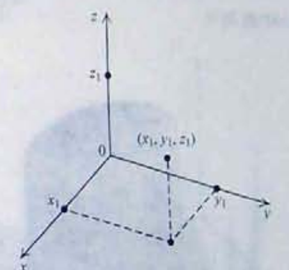
$$z = f(x, y).$$

作为一个映射，一个二元函数可看成是由 xy 平面上的点(x_1, y_1)到数轴上的点 z_1 的映射.



498

为了作出二元函数的图形，需要一个三维的坐标系. 轴的放置通常如下图所示. 直线 z 称为 z 轴，它在原点与 xy 平面垂直.



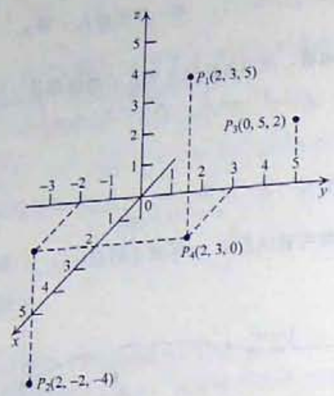
为了把它形象化，把它想象成房间的一个角落，地板是 xy 平面，而 z 轴是两个墙壁的交线. 为了描出点(x_1, y_1, z_1)，先在 xy 平面上找出点(x_1, y_1)，再按照 z_1 的值将该点在空间中向上或向下移动.

例 6 描出点：

$$P_1(2,3,5), P_2(2,-2,-4), P_3(0,5,2) \text{ 和 } P_4(2,3,0).$$

解 解如下所示.

2007/08/16

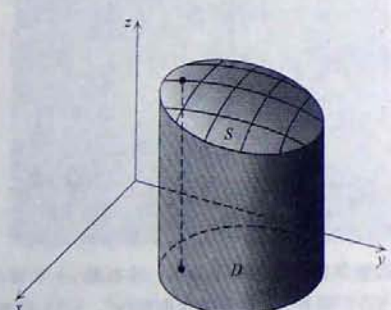


一个二元函数

$$z = f(x, y)$$

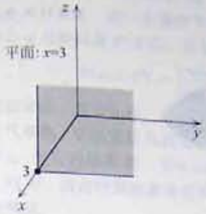
的图形由有序的三元数组(x_1, y_1, z_1)组成，其中$z_1 = f(x_1, y_1)$. f 的定义域是 xy 平面上的

499 一个区域 D，而 f 的图形是一个曲面 S.

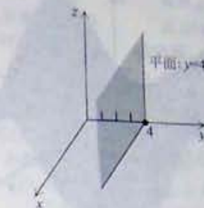


采用称为 Mathematica 的计算机绘图程序，根据方程生成了下列图形. 有许多优秀的生成二元函数图形的绘图程序. 图形可通过少许的按键而生成. 通常，从这些图形要比看其表达式更能观察出函数的特征.

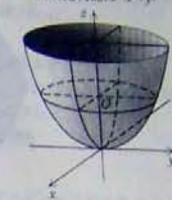
平面: $x=3$



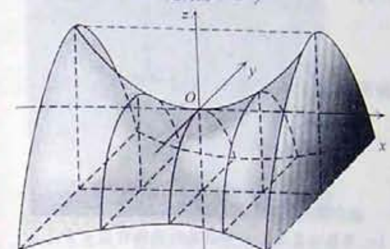
平面: $y=4$

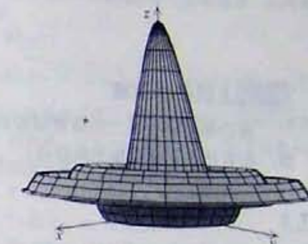


椭圆抛物面: $z=x^2+y^2$

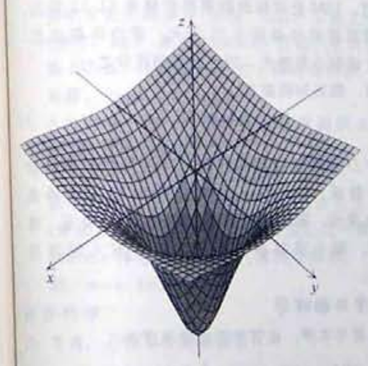


双曲抛物面: $z=x^2-y^2$

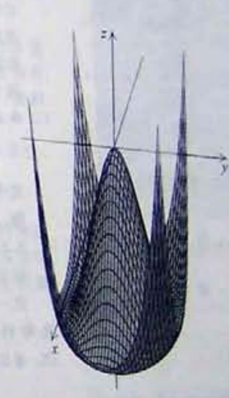




宽边帽
(方程涉及本书未讨论的函数) 500



$z = \frac{-4}{1+x^2+2y^2}$

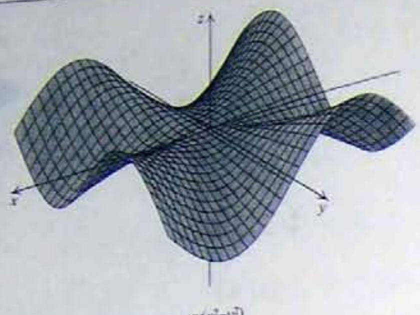


$z = (x^2+y^2)^{3/2}-4(x^2+y^2)$



$z = x^2+y^2+\frac{1}{x^2+y^2}$

2007/08/16



$z=\frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}$

上机技术演练

有许多能够生成二元函数图形的 3D 绘图器．用绘图器检验这里所展示的图形．你有什么观察视窗的问题吗？

习题 7.1

1. 对于 $f(x,y)=x^2-2xy$，求 $f(0,-2)$，$f(2,3)$和$f(10,-5)$．
2. 对于 $f(x,y)=(y^2+3xy)^2$，求 $f(-2,0)$，$f(3,2)$和 $f(-5,10)$．
3. 对于 $f(x,y)=3^x+7xy$，求 $f(0,-2)$，$f(-2,1)$和 $f(2,1)$．
4. 对于 $f(x,y)=\log_{10}(x+y)+3x^2$，求 $f(3,7)$，$f(1,99)$和 $f(2,-1)$．
5. 对于 $f(x,y)=\ln x+y^3$，求 $f(e,2)$，$f(e^2,4)$和$f(e^3,5)$．
6. 对于 $f(x,y)=2^x-3^y$，求 $f(0,0)$，$f(1,1)$和$f(2,2)$．
7. 对于 $f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2$，求 $f(-1,2,3)$和$f(2,-1,3)$．
8. 对于 $f(x,y,z)=2^x+5zy-x$，求 $f(0,1,-3)$和$f(1,0,-3)$．

应用

商业与经济

9. *储存设备的成本*．考虑例 3 的储存模型．某公司用 100 000 美元购买了一个容量为 80 000 加仑的储存罐，后来又决定购买一个容量为原来两倍的储存罐，计算新储存罐的成本．
10. *价格收益比*．一种股票的价格收益比为
$$R(P,E)=\frac{P}{E},$$
其中 P 是股票的价格，而 E 是每股股票的收益．最近，IBM 公司每股股票的价格是 61.55 美元，每股股票的收益是 3.25 美元．求价格收益比．用十进制小数给出，四舍五入到百分之一．
11. *收益*．股票的收益为
$$Y(D,P)=\frac{D}{P},$$
其中 D 是每股股票的红利，P 是每股股票的价格．最近，Goodyear 公司每股股票的价格是 8.33 美元，而每股股票的红利是 0.47 美元．求收益．用十进制小数给出，四舍五入到百分之一．

生命科学与物理学

12. *普瓦瑟耶定律*．血管中的血流速度为
$$V(L,p,R,r,v)=\frac{p}{4Lv}(R^2-r^2),$$
其中 R 是血管的半径，r 是由血管的中心到测量点血液的距离，L 是血管的长度，p 是压力，v 是粘度．求 $V(1,100,0.0075,0.0025,0.05)$．

13. *龙卷风的风速*．在一定条件下，龙卷风在距离其中心 d 处的风速 S(单位，英里/小时)可用函数
$$S(a,d,V)=\frac{aV}{0.51d^2}$$
近似表示，其中 a 是一个依赖于特定大气条件的大气常数，V 是龙卷风的近似体积(以立方英尺计)．当它的体积是 1 600 000 立方英尺和 $a=0.78$ 时，近似计算距离龙卷风的中心 100 英尺处的风速．



14. *人体的表面积*．近似计算人体表面积 S(单位：m^2)的 Mosteller 公式为
$$S(h,w)=\frac{\sqrt{hw}}{60},$$
其中 h 是人的身高(单位：cm)，w 是人的体重(单位：kg)．使用 Mosteller 近似公式计算身高是 165cm、体重是 80kg 的人体的表面积．(资料来源：www.halls.md.)
15. *人体的表面积*．近似计算人体表面积 S(单位：m^2)的 Haycock 公式为
$$S(h,w)=0.024\,265h^{0.3964}w^{0.5378},$$
其中 h 是人的身高(单位：cm)，w 是人的体重(单位：kg)．使用 Haycock 近似公式计算身高是 165cm，体重是 80kg 的人体的表面积．(资料来源：www.halls.md.)

社会科学

16. *智商*．心理学中的智商为
$$Q(m,c)=100\cdot\frac{m}{c},$$
其中 m 是人的智力年龄，而 c 是他的实际年龄．求 $Q(21,20)$和 $Q(19,20)$．

综合题

*17. 说明二元函数和一元函数之间的差别．

*18. 找一些课本中没有讨论过的多元函数的例子，甚至有些可能还没有表达式．

上机技术演练

一般兴趣

风寒[1]*温度*．因为风加快了皮肤热量的流失，所以有风时比没风时感觉冷．风寒温度相当于无风情况给出相同的寒冷效应所要达到的温度．风寒温度 W 为

$$W(v,T)=91.4-\frac{(10.45+6.68\sqrt{v}-0.447v)(457-5T)}{110},$$

其中 T 是温度计所记录的实际温度，以华氏度数计；而 v 是风速，以每小时英里数计．在下列各种情况下求风寒温度．四舍五入到 1 度．

19. $T=30$℉，$v=25$ 英里/小时
20. $T=20$℉，$v=20$ 英里/小时
21. $T=20$℉，$v=40$ 英里/小时
22. $T=-10$℉，$v=30$ 英里/小时



使用 3D 绘图器绘制下列函数的图形．

23. $f(x,y)=y^2$
24. $f(x,y)=x^2+y^2$
25. $f(x,y)=(x^4-16x^2)e^{-y^2}$
26. $f(x,y)=4(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2$
27. $f(x,y)=x^3-3xy^2$
28. $f(x,y)=\frac{1}{x^2+4y^2}$

[1] 风寒是指人类对低温和风的一种感觉程度．——编辑注

2007/08/16

7.2 偏导数

要点

- 求已知函数的偏导数.
- 计算偏导数的值.

求偏导数

考虑由

$$z=f(x,y)=x^2y^3+xy+4y^2$$

给出的函数 f. 假设暂时把 y 固定在值 3 处，则

$$f(x,3)=x^2(3^3)+x(3)+4(3^2)=27x^2+3x+36.$$

501–503 注意，现在得到仅有一个变量的函数. 取关于 x 的一阶导数，得到

$$54x+3.$$

一般地，不用特殊的数替换 y，而让 y 固定，则 f 成为仅是 x 的函数. 计算它关于 x 的导数. 这个导数称为 f 关于 x 的偏导数. 这个偏导数的记号是

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad 或 \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

再来考虑函数

$$z=f(x,y)=x^2y^3+xy+4y^2.$$

当固定 y 并把它视为一个常数时，y^3，y 和 y^2 都是常数. 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3+y.$$

类似地，固定 x(把它当成一个常数来处理)并计算关于 y 的导数，求 $\partial f/\partial y$ 或 $\partial z/\partial y$. 对于

$$z=f(x,y)=x^2y^3+xy+4y^2,$$

我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2+x+8y.$$

偏导数的定义如下.

定义 对于 $z=f(x,y)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}.$$

可以求任意多个变量函数的偏导数.

例1 对于 $w=x^2-xy+y^2+2yz+2z^2+z$，求

$$\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad 和 \quad \frac{\partial w}{\partial z}.$$

解 为了求 $\partial w/\partial x$，考虑 x 为变量，而其他都是常数. 由

$$w=x^2-xy+y^2+2yz+2z^2+z,$$

得到

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2x-y.$$ 504

由

$$w=x^2-xy+y^2+2yz+2z^2+z,$$

得到

$$\frac{\partial w}{\partial y}=-x+2y+2z;$$

而由

$$w=x^2-xy+y^2+2yz+2z^2+z,$$

得到

$$\frac{\partial w}{\partial z}=2y+4z+1.$$ ■

我们将经常使用简单的记号 f_x 表示 f 关于 x 的偏导数，而用 f_y 表示 f 关于 y 的偏导数. 也就是说，如果 $z=f(x,y)$，则 z_x 表示 z 关于 x 的偏导数，而 z_y 表示 z 关于 y 的偏导数.

例2 对于 $f(x,y)=3x^2y+xy$，求 f_x 和 f_y.

解 我们有

$$f_x=6xy+y,$$

$$f_y=3x^2+x.$$ ■

对于上述例子中的函数，计算 f_x 在 $(2,-3)$ 处的值：

$$f_x(2,-3)=6\cdot 2\cdot(-3)+(-3)=-39.$$

如果使用记号 $\partial f/\partial x=6xy+y$，此处 $f=3x^2y+xy$，则在 $(2,-3)$ 处偏导数的值为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,-3)}=6\cdot 2\cdot(-3)+(-3)=-39.$$

但是这个记号不如 $f_x(2,-3)$ 简便.

> **上机技术演练**
>
> 用求一元函数导数的绘图器求 $f(x,y)=3x^3y+2xy$ 的偏导数的值. 如何求 $f_x(-4,1)$? 又如何求 $f_y(2,6)$?

例3 对于 $f(x,y)=e^{xy}+y\ln x$，求 f_x 和 f_y.

解

$$f_x=y\cdot e^{xy}+y\cdot\frac{1}{x}=ye^{xy}+\frac{y}{x},$$ 505

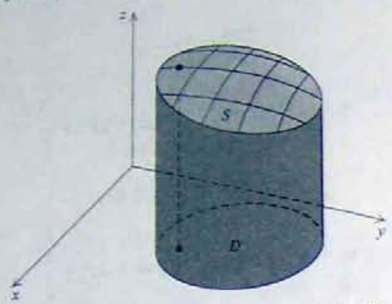
$$f_y=x\cdot e^{xy}+1\cdot\ln x=xe^{xy}+\ln x.$$ ■

偏导数的几何解释

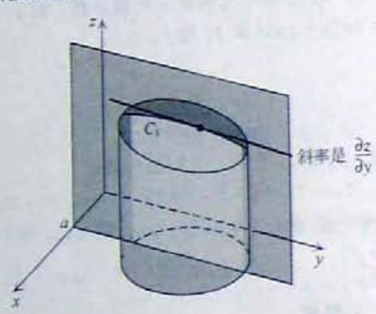
二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形是一个类似于下面图形所示的曲面 S，其中每个输入对

2007/08/16

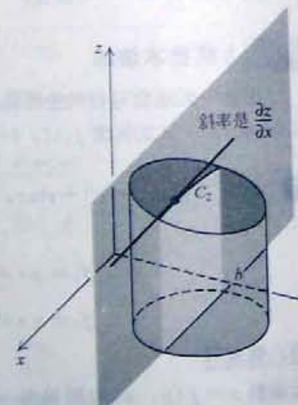
(x, y) 只有一个输出 $z=f(x, y)$.



现在假设 x 固定，比如说固定在值 a. $x=a$ 的所有点的集合是一个平行于 yz 平面的平面. 因此当 x 固定在 a 时，y 和 z 沿着平面变化，如下图所示. 图中的平面与曲面相交于某个曲线 C_1. 偏导数 f_y 给出了这条曲线的切线的斜率.



类似地，如果把 y 固定，比如说固定在值 b，得到曲线 C_2，如右图所示. 偏导数 f_x 给出了这条曲线的
506 切线的斜率.



经济应用：科布-道格拉斯生产函数

在商业与经济中经常要考虑的一个生产模型是科布-道格拉斯(Cobb-Douglas)生产函数：

$$p(x,y) = Ax^a y^{1-a}, \quad A>0 \quad 且 \quad 0<a<1,$$

其中 p 是由 x 个人力单位和 y 个资本单位生产出的产品数量.（资本是机器、建筑物、工具和其他用品的成本.）偏导数

$$\frac{\partial p}{\partial x} \quad 和 \quad \frac{\partial p}{\partial y}$$

分别称为人力的边际生产力和资本的边际生产力.

例 4 某移动电话公司的某种产品有下面的生产函数：

$$p(x,y) = 50x^{2/3}y^{1/3}.$$

a) 求由 125 个人力单位和 64 个资本单位生产的产品数量.

b) 求边际生产力.

c) 计算在 $x=125$ 和 $y=64$ 时的边际生产力.

解

a) $p(125, 64)=50(125)^{2/3}(64)^{1/3}=50(25)(4)=5\ 000.$

b) $\frac{\partial p}{\partial x}=50\left(\frac{2}{3}\right)x^{-1/3}y^{1/3}=\frac{100y^{1/3}}{3x^{1/3}}$, 或 $\frac{100}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$；

$\frac{\partial p}{\partial y}=50\left(\frac{1}{3}\right)x^{2/3}y^{-2/3}=\frac{50x^{2/3}}{3y^{2/3}}$, 或 $\frac{50}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{2/3}$.

c) $\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{(125,64)}=\frac{100(64)^{1/3}}{3(125)^{1/3}}=\frac{100(4)}{3(5)}=26\frac{2}{3}$；

$\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{(125,64)}=\frac{50(125)^{2/3}}{3(64)^{2/3}}=\frac{50(25)}{3(16)}=26\frac{1}{24}$. ■

如何解释这些边际生产力？假设所花费的资本总数固定为 64，则如果人力的总数由 125 改变了一个单位时，产量将会改变大约 27 个单位. 假设人力的总数固定为 125，则如果花费的资本总数由 64 改变一个单位，产量将会改变大约 26 个单位.

科布-道格拉斯生产函数与递减报酬律是一致的. 也就是说，如果固定一个输入(人力或资本)而另一个无限增加，则产量最终将以一个递减率增加. 借助这些函数也可以证明，如果某个最大生产量是可能的，那么，为了这个可以达到的最大输出，更多的花费(例如更多的人力) 507
将是不可避免的.

习题 7.2

求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-2,-3)}$ 和 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,-5)}$.

1. $z=2x-3xy$
2. $z=(x-y)^3$
3. $z=3x^2-2xy+y$
4. $z=2x^3+3xy-x$

求 f_x, f_y, $f_x(-2, 4)$ 和 $f_y(4, -3)$.

5. $f(x, y)=2x-3y$
6. $f(x, y)=5x+7y$

求 f_x, f_y, $f_x(-2, 1)$ 和 $f_y(-3, -2)$.

7. $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$
8. $f(x, y)=\sqrt{x^2-y^2}$

求 f_x 和 f_y.

9. $f(x, y)=e^{2x-y}$
10. $f(x, y)=e^{3x-2y}$
11. $f(x, y)=e^{xy}$
12. $f(x, y)=e^{2xy}$
13. $f(x, y)=y\ln(x+y)$
14. $f(x, y)=x\ln(x-y)$
15. $f(x, y)=x\ln(xy)$
16. $f(x, y)=y\ln(xy)$
17. $f(x, y)=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$
18. $f(x, y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$
19. $f(x, y)=3(2x+y-5)^2$
20. $f(x, y)=4(3x+y-8)^2$

求 $\frac{\partial f}{\partial b}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial m}$.

2007/08/16

21. $f(b, m)=(m+b-4)^2+(2m+b-5)^2+(3m+b-6)^2$

22. $f(b, m)=(m+b-6)^2+(2m+b-8)^2+(3m+b-9)^2$

求 f_x、f_y 和 f_λ.

23. $f(x, y, \lambda)=3xy-\lambda(2x+y-8)$

24. $f(x, y, \lambda)=4xy-\lambda(3x-y+7)$

25. $f(x, y, \lambda)=x^2+y^2-\lambda(10x+2y-4)$

26. $f(x, y, \lambda)=x^2-y^2-\lambda(4x-7y-10)$

应用

商业与经济

27. **科布-道格拉斯模型.** 某出版公司的某种产品有下列的生产函数：

$$p(x,y)=1\,800x^{0.621}y^{0.379},$$

其中 p 是由 x 个人力单位和 y 个资本单位所生产的产品的数量.

a)求由 2 500 个人力单位和 1 700 个资本单位生产的产品数量.

b)求边际生产力.

*c)说明在 b)中求出的边际生产力的意义.

d)计算在 $x=2\,500$ 和 $y=1\,700$ 时的边际生产力.

28. **科布-道格拉斯模型.** 某体育用品公司的某种产品有下列的生产函数：

$$p(x,y)=2\,400x^{2/3}y^{1/3},$$

其中 p 是由 x 个人力单位和 y 个资本单位所生产的产品的数量.

a)求由 32 个人力单位和 1 024 个资本单位生产的产品数量.

b)求边际生产力.

*c)说明在 b)中求出的边际生产力的意义.

d)计算在 $x=32$ 和 $y=1\,024$ 时的边际生产力.

护理机构. 在得克萨斯护理疗养院的一项研究中，市内选址的赢利性独立护理疗养院的年利润 P（单位：美元）为下面的函数：

$$P(w,r,s,t)=0.007\,955w^{-0.638}r^{1.038}s^{0.873}t^{2.468}.$$

在这个函数中，w 是护士和助手每小时的平均工资（单位：美元），r 是入住率（百分比），而 s 是护理机构的总面积（单位：平方英尺）．同时，t 是关于得克萨斯工作量级别指数(TILE)的评级指标，这个数在 1 和 11 之间，以此数确定州医疗补偿．（资料来源：K. J. Knox, E. C. Blankmeyer, and J. R. Stutzman, "Relative Economic Efficiency in Texas Nursing Facilities," *Journal of Economics and Finance*, Vol. 23, 199-213(1999).）对于 29 和 30 题使用上述信息.

29. 设置在得克萨斯的赢利性独立护理疗养院有护士和助手，他们每小时的平均工资为 20 美元，TILE 指数是 8，入住率是 70%，而护理机构的面积为400 000 平方英尺．计算它的利润.

30. a)求 P 的四个偏导数.

*b)解释偏导数的意义.

c)当其他变量保持不变而由于 w 的改变引起 P 的改变近似为

$$\Delta P=\frac{\partial P}{\partial w}\Delta w.$$

使用 29 题中的 w，r，s 和 t 的值，并假设现在护理疗养院给护士和助手每小时的平均工资增加到 20.25 美元．近似计算它的利润改变了多少？

生命科学与物理学

温度-湿度的热指标. 在夏天，湿度影响真实的温度，使人感觉比较热的原因在于较高的湿度减少了从皮肤损耗的热量．温度-湿度的指标 T_h 相当于无湿度情况下给出的相同的热效应要达到的温度．一个常用的指标为

$$T_h=1.98T-1.09(1-H)(T-58)-56.9,$$

其中 T 是空气的温度，以华氏计；而 H 是相对湿度，它是空气中水蒸气的总量与在此温度下空气中水蒸气的最大可能量的比．H 通常用百分比表示．在下列各种情况下求温度-湿度指标，四舍五入到十分之一度.



31. $T=85°$ 和 $H=60\%$

32. $T=90°$ 和 $H=90\%$

33. $T=90°$ 和 $H=100\%$

34. $T=78°$ 和 $H=100\%$

*35. 求 $\frac{\partial T_h}{\partial H}$，并说明它的意义.

*36. 求 $\frac{\partial T_h}{\partial T}$，并说明它的意义.

37. **人体的表面积.** 人体表面积 S（单位：m^2）的 Mosteller 近似公式为

$$S=\frac{\sqrt{hw}}{60},$$

其中 h 是人的身高（单位：cm），而 w 是人的体重（单位：kg）．（资料来源：www.halls.md.）

a)计算 $\frac{\partial S}{\partial h}$.

b)计算 $\frac{\partial S}{\partial w}$.

c)当 h 不变时，由于 w 的改变而引起 S 的改变可近似表示为

$$\Delta S=\frac{\partial S}{\partial w}\Delta w.$$

已知一个男人身高 150cm，体重 80kg，体重减少 2kg．利用这个公式近似计算他的表面积的改变量.

38. **人体的表面积.** 人体表面积 S（单位：m^2）的 Haycock 近似公式为

$$S=0.024\,265h^{0.396\,4}w^{0.537\,8},$$

其中 h 是人的身高（单位：cm），而 w 是人的体重（单位：kg）．（资料来源：www.halls.md.）

a)计算 $\frac{\partial S}{\partial h}$.

b)计算 $\frac{\partial S}{\partial w}$.

c)当 h 不变时由于 w 的改变而引起 S 的改变可近似表示为

$$\Delta S=\frac{\partial S}{\partial w}\Delta w.$$

已知一个男人身高 150cm，体重 80kg，体重减少 2kg．利用这个公式近似计算他的表面积的改变量.

社会科学

易读程度. 心理学家和教育学家用下列公式来预测一段话的易读程度 E：

$$E=206.835-0.846\,w-1.015s,$$

其中 w 是 100 个词中的音节数，而 s 是每个句子所含单词的平均数．在下列每种情况下求易读程度.

39. $w=146$ 和 $s=5$

40. $w=180$ 和 $s=6$

41. 求 $\frac{\partial E}{\partial w}$.

42. 求 $\frac{\partial E}{\partial s}$.

综合题

求 f_x 和 f_t.

43. $f(x, t)=\frac{x^2+t^2}{x^2-t^2}$

44. $f(x, t)=\frac{x^2-t}{x^2+t}$

45. $f(x, t)=\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{t}}{1+2\sqrt{t}}$

46. $f(x, t)=\sqrt[4]{x^3t^2}$

47. $f(x, t)=6x^{2/3}-8x^{1/4}t^{1/2}-12x^{-1/3}t^{3/2}$

48. $f(x, t)=\left(\frac{x^2+t^2}{x^2-t^2}\right)^5$

*49. 做一些科布-道格拉斯生产函数的图书资料的调研．你能找出它是如何建立的吗？

*50. 利用切线斜率解释二元函数的一阶偏导数的意义.

7.3　高阶偏导数

要点

- 求二元函数的四个二阶偏导数.

考虑

$$z=f(x,y)=3xy^2+2xy+x^2.$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=3y^2+2y+2x$$

2007/08/16

假设继续求 $\partial z/\partial x$ 关于 y 的一阶偏导数. 这将是原来的函数 z 的一个二阶偏导数(second-order partial derivative). 它的表示法如下:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=6y+2.$$

也可用记号 f_{xy} 表示上述偏导数. 这时

$$f_{xy}=6y+2.$$

注意, 在记号 f_{xy} 中, x 和 y 的次序(左到右)是微分的次序, 但是在

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

508~510 中, x 和 y 的次序是倒过来的. 在两种表示法中, 都是首先对 x 微分, 然后再对 y 微分.

四个二阶偏导数的记号如下.

定义

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}$ 求关于 x 的偏导数, 然后再求关于 x 的偏导数.
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy}$ 求关于 x 的偏导数, 然后再求关于 y 的偏导数.
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx}$ 求关于 y 的偏导数, 然后再求关于 x 的偏导数.
4. $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}$ 求关于 y 的偏导数, 然后再求关于 y 的偏导数.

例1 对于

$$z=f(x,y)=x^2y^3+x^4y+xe^y,$$

求四个二阶偏导数.

解

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(2xy^3+4x^3y+e^y)$

$=2y^3+12x^2y$ 　　关于 x 微分两次.

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3+4x^3y+e^y)$

$=6xy^2+4x^3+e^y$ 　　关于 x 微分, 然后关于 y 微分.

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2+x^4+xe^y)$

$=6xy^2+4x^3+e^y$ 　　关于 y 微分, 然后关于 x 微分.

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2+x^4+xe^y)$

$=6x^2y+xe^y$ 　　关于 y 微分两次. ■

比较例1中的b)和c)可知

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad \text{即}\quad f_{xy}=f_{yx}.$$

虽然这对于本书中所讨论的几乎所有函数都是正确的, 但是它并不是对所有的函数都正确. 在习题7.3的19题中给出了一个这样的函数. 511

习题 7.3

求下列函数的四个二阶偏导数.

1. $f(x,y)=3x^2-xy+y$
2. $f(x,y)=x^2-10xy+3y^2$
3. $f(x,y)=7xy$
4. $f(x,y)=4xy$
5. $f(x,y)=x^3y^4+x^3y^2$
6. $f(x,y)=x^4y^2-x^2y^3$

求 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} 和 f_{yy}. (记住 f_{yx} 是指先关于 y 微分, 然后再关于 x 微分.)

7. $f(x,y)=2x-3y$
8. $f(x,y)=3x+5y$
9. $f(x,y)=e^{2xy}$
10. $f(x,y)=e^{xy}$
11. $f(x,y)=x+e^y$
12. $f(x,y)=y-e^x$
13. $f(x,y)=y\ln x$
14. $f(x,y)=x\ln y$

综合题

求 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} 和 f_{yy}.

15. $f(x,y)=\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}$
16. $f(x,y)=\frac{xy}{x-y}$
17. 考虑 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, 证明 f 是偏微分方程
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$
的解.
18. 考虑 $f(x,y)=x^3-5xy^2$. 证明 f 是偏微分方程
$$xf_{xy}-f_y=0$$
的解.
19. 考虑如下定义的函数 f:
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
a) 通过计算极限
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}$$
求 $f_x(0,y)$.
b) 通过计算极限
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h}$$
求 $f_y(x,0)$.
c) 现在求 $f_{yx}(0,0)$ 和 $f_{xy}(0,0)$, 并进行比较.
20. 对于 $f=[\ln(x^2+e^y)]^5$, 求 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} 和 f_{yy}.

7.4 极大-极小值问题

要点

- 求二元函数的相对极值.

现在来求二元函数的极大值和极小值.

定义 给定二元函数 f:

1. 如果对于一个包含点 (a,b) 的矩形区域内的所有点都有
$$f(x,y)\leqslant f(a,b),$$
则 f 在点 (a,b) 有**相对极大值**(relative maximum).
2. 如果对于一个包含点 (a,b) 的矩形区域内的所有点都有
$$f(x,y)\geqslant f(a,b),$$ 512
则 f 在点 (a,b) 有**相对极小值**(relative minimum).

2007/08/16

这个定义可用图1和图2来说明. 相对极大值(极小值)可以不是"绝对"极大值(极小值), 如图3所示.

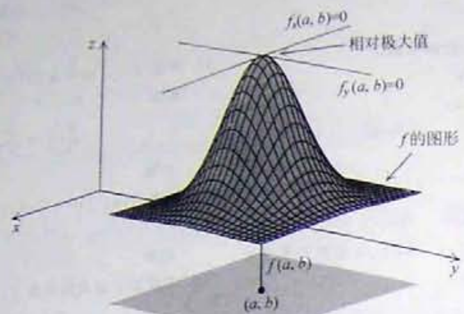


图 1

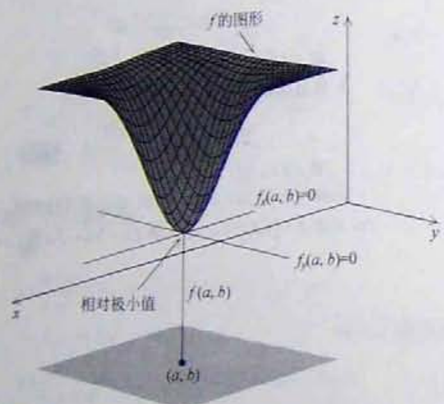


图 2

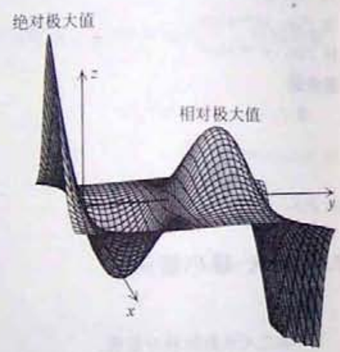


图 3

确定极大值和极小值

设函数 f 在其定义域内的某点(a, b)取相对极大值(或极小值). 假设在它的定义域内 f 是"连续"的, 它的偏导数存在而且是"连续"的, 不过我们将不去定义连续性. 如果把 y 固定在值 b, 则 $f(x, b)$是一个变量 x 的函数 f 的输出, 而且所生成的函数在 $x=a$ 有相对极大值. 于是在这里它的导数一定是0, 即在点(a, b)处 $f_x=0$. 同样地, 在(a, b)处 $f_y=0$. 因此在出现极大值的点(a, b), 满足方程

$$f_x=0 \quad 和 \quad f_y=0. \tag{1}$$

513

两个偏导数都是0的点(a, b)称为**临界点**. 这类似于原先对一元函数所做的定义. 于是求相对极大值或极小值的一种方法是解上面的方程组(1)去找临界点. 正如一元函数那样, 这种方法并不保证有相对极大值或极小值. 我们只是证明了, 如果 f 在(a, b)处有极大值或极小值, 则它的两个偏导数一定都是0. 看图1和图2. 然后注意图4, 它所说明的情况是, 在(a, b)处偏导数都是0, 但函数没有相对极大值或相对极小值.

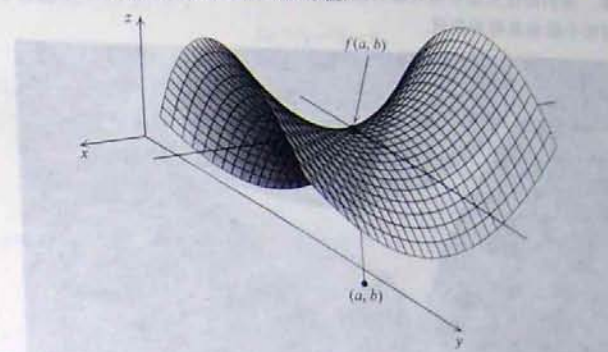


图 4

在图4中, 假设把 y 固定在 b 值. 然后把 $f(x, b)$当作一个变量 x 的函数的输出来考虑, 它在 a 点有极小值, 但是 f 却没有. 同样地, 如果把 x 固定在 a 值, 然后把 $f(a, y)$当作一个变量 y 的函数的输出来考虑, 它在 b 点有极大值, 但是 f 却没有. 点 $f(a, b)$称为**鞍点**(saddle point). 换言之, $f_x(a, b)=0$ 和 $f_y(a, b)=0$[点(a, b)是临界点], 但是在(a, b)处 f 不能达到相对极大值或相对极小值. 二元函数的鞍点类似于一元函数的拐点(它同时又是临界点).



鞍点在哪里?

涉及利用一阶偏导数和二阶偏导数来求相对极大值和相对极小值的判别法叙述如下. 我们不证明这个定理.

定理1　D判别法

为了求 f 的相对极大值和极小值:

1. 求 f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}和 f_{xy}.　514
2. 解方程组 $f_x=0$, $f_y=0$. 设(a, b)是一个解.
3. 计算 D, 此处 $D=f_{xx}(a, b)\cdot f_{yy}(a, b)-[f_{xy}(a, b)]^2$.
4. 则:

a) 当 $D>0$ 且 $f_{xx}(a, b)<0$ 时, f 在(a, b)处有极大值.

b) 当 $D>0$ 且 $f_{xx}(a, b)>0$ 时, f 在(a, b)处有极小值.

2007/08/16

c)当 $D<0$ 时，在 (a, b) 处 f 既没有极大值也没有极小值. 函数在 (a, b) 处有**鞍点**. 见图4.

d)当 $D=0$ 时，这种判别法不适用.

D 判别法有点类似于一元函数的二阶导数判别法(3.2节). 鞍点类似于凹性改变的拐点，而且不是相对极大值或相对极小值.

相对极大值或相对极小值可能不是绝对极大值或绝对极小值. 绝对极大值或绝对极小值的判别相当复杂. 我们将仅关注求相对极大值或相对极小值. 所幸的是，在大部分应用中，相对极大值或相对极小值也是绝对极值.

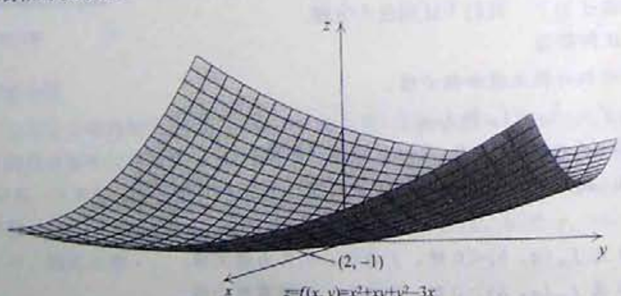


完美的帐篷形状. 为了赋予帐篷顶最大可能的强度，设计者把一块编织物拉成一个三维形状，从侧面观察它类似一个马鞍，而数学家称其为鞍形面曲线. 两个人用一块弹性编织物，例如合成弹性纤维，就可复制出这样的形状，如上图所示. 一个人向上且向外拉两个相对的角；另一个人向下且向外拉另外两个角. 相反的拉力拉扯着编织物的每个点使之达到刚性平衡. 曲线的抗弯曲程度决定了曲面的抗弯曲程度.

例1 求

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$$

515 的相对极大值或相对极小值.



解

1. 求 f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} 和 f_{xy}：

$$f_x = 2x + y - 3,\quad f_y = x + 2y,$$
$$f_{xx} = 2;\quad f_{yy} = 2;$$
$$f_{xy} = 1.$$

2. 解方程组 $f_x = 0$, $f_y = 0$：

$$2x + y - 3 = 0, \tag{1}$$
$$x + 2y = 0. \tag{2}$$

解出方程(2)中的 x，得 $x = -2y$. 在方程(1)中用 $-2y$ 代换 x 并求解，得到

$$2(-2y) + y - 3 = 0$$
$$-4y + y - 3 = 0$$
$$-3y = 3$$
$$y = -1.$$

为了求当 $y = -1$ 时的 x，在方程(1)或方程(2)中用 -1 代换 y. 我们选择方程(2)：

$$x + 2(-1) = 0$$
$$x = 2.$$

于是，$(2, -1)$ 是唯一的临界点，而 $f(2, -1)$ 是极大值或极小值的候选点.

3. 我们必须检验，看 $f(2, -1)$ 是否为极大值或极小值：

$$D = f_{xx}(2, -1) \cdot f_{yy}(2, -1) - [f_{xy}(2, -1)]^2 = 2 \cdot 2 - [1]^2 = 3.$$

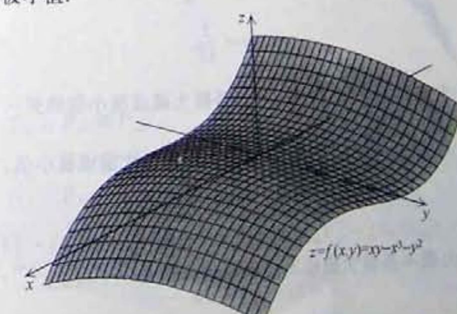
4. 因此，$D = 3$，$f_{xx}(2, -1) = 2$. 因为 $D > 0$ 且 $f_{xx}(2, -1) > 0$，所以 f 在 $(2, -1)$ 处有 516
相对极小值. 求出极小值如下：

$$f(2, -1) = 2^2 + 2(-1) + (-1)^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 2 + 1 - 6 = -3.$$ ■

例2 求

$$f(x, y) = xy - x^3 - y^2$$

的相对极大值或相对极小值.



2007/08/16

解

1. 求 f_x，f_y，f_{xx}，f_{yy} 和 f_{xy}：

$$f_x = y - 3x^2,\quad f_y = x - 2y,$$
$$f_{xx} = -6x;\quad f_{yy} = -2;$$
$$f_{xy} = 1.$$

2. 解方程组 $f_x=0$，$f_y=0$：

$$y - 3x^2 = 0, \qquad (1)$$
$$x - 2y = 0. \qquad (2)$$

解出方程(1)中的 y，得 $y=3x^2$. 在方程(2)中用 $3x^2$ 代换 y 并求解，得到

$$x - 2(3x^2) = 0$$
$$x - 6x^2 = 0$$
$$x(1-6x) = 0. \qquad \text{分解因式}$$

设每个因式等于0并求解，我们有

$$x = 0 \quad 或 \quad 1-6x = 0$$
$$x = 0 \quad 或 \quad x = \frac{1}{6}.$$

为了求当 $x=0$ 时的 y，在方程(1)或方程(2)中用0代换 x. 我们选择方程(2)：

$$0 - 2y = 0$$
$$-2y = 0$$
$$y = 0.$$

517 因此，(0, 0)是一个临界点，而 $f(0,0)$是极大值或极小值的候选点. 为了求另一个临界点，在方程(1)或方程(2)中用$\frac{1}{6}$代换 x. 我们选择方程(2)：

$$\frac{1}{6} - 2y = 0$$
$$-2y = -\frac{1}{6}$$
$$y = \frac{1}{12}.$$

因此，$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$是另一个临界点，而 $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$是极大值或极小值的另一个候选点.

34. 我们必须检验(0, 0)和$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$，看它们是否为极大值或极小值：

对于(0, 0)：

$$D = f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = (-6\cdot 0)\cdot(-2) - [1]^2 = -1.$$

因为 $D<0$，所以 $f(0,0)$既不是极大值也不是极小值，但是一个鞍点.

对于$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$：

$$D = f_{xx}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)\cdot f_{yy}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right) - \left[f_{xy}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)\right]^2 = \left(-6\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot(-2) - [1]^2$$
$$= -1(-2) - 1 = 1.$$

因此，$D=1$，$f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = -1$. 因为 $D>0$ 且 $f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)<0$，所以 f 在$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$处有相对极大值. 求出极大值如下：

$$f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12} - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{72} - \frac{1}{216} - \frac{1}{144} = \frac{1}{432}.$$ ■

例3 商业：利润最大化. 某公司生产两种高尔夫球，一种以3美元销售，另一种以2美元销售. 销售 x 千个3美元的球和 y 千个2美元的球的总收入(以千美元计)为

$$R(x,y) = 3x + 2y.$$

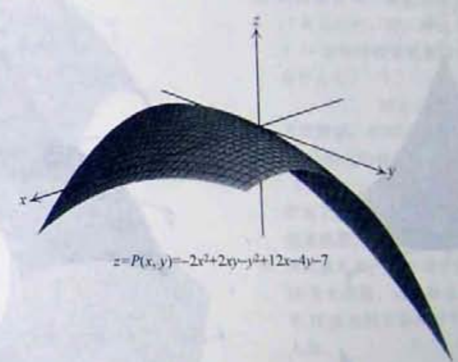
公司测定，生产 x 千个3美元的球和 y 千个2美元的球的总成本(以千美元计)为

$$C(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 9x + 6y + 7.$$

求为了获得最大的利润必须生产和销售每种类型的球的总数.

解 总利润 $P(x, y)$为

$$P(x,y) = R(x,y) - C(x,y)$$
$$= 3x + 2y - (2x^2 - 2xy + y^2 - 9x + 6y + 7)$$
$$= -2x^2 + 2xy - y^2 + 12x - 4y - 7. \quad 518$$



$z=P(x,y)=-2x^2+2xy-y^2+12x-4y-7$

1. 求 P_x，P_y，P_{xx}，P_{yy} 和 P_{xy}：

$$P_x = -4x + 2y + 12,\quad P_y = 2x - 2y - 4,$$
$$P_{xx} = -4,\quad P_{yy} = -2,$$
$$P_{xy} = 2.$$

2. 解方程组 $P_x=0$，$P_y=0$：

$$-4x + 2y + 12 = 0, \qquad (1)$$
$$2x - 2y - 4 = 0. \qquad (2)$$

2007/08/16

两个方程相加，得到

$$-2x+8=0.$$

因此

$$-2x=-8$$
$$x=4.$$

在方程(1)或方程(2)中用4代换 x. 我们选择方程(2)：

为了求当 $x=4$ 时的 y，

$$2\cdot 4-2y-4=0$$
$$-2y+4=0$$
$$-2y=-4$$
$$y=2.$$

于是，(4，2)是唯一的临界点，而 $P(4,2)$ 是极大值或极小值的候选点.

3. 我们必须检验，看 $P(4,2)$ 是否为极大值或极小值：

519

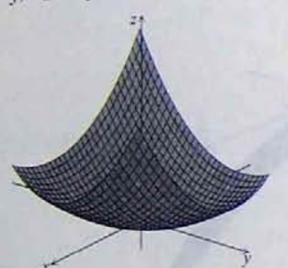
$$D=P_{xx}(4,2)\cdot P_{yy}(4,2)-[P_{xy}(4,2)]^2=(-4)\cdot(-2)-2^2=4.$$

4. 因此，$D=4$，$P_{xx}(4,2)=-4$. 因为 $D>0$ 且 $P_{xx}(4,2)<0$，所以 P 在(4，2)处有相对极大值. 因此为了获得最大利润，公司必须生产和销售4千个3美元的高尔夫球和2千个2美元的高尔夫球. ■

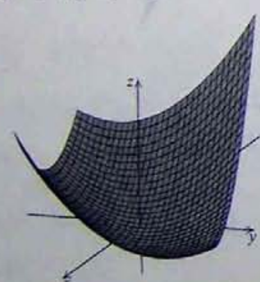
习题 7.4

求下列函数的相对极大值和相对极小值.

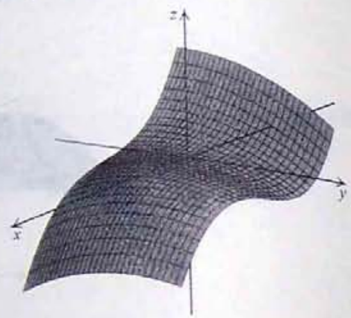
1. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-y$



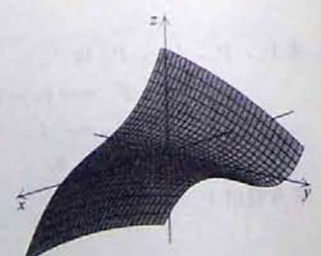
2. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-5y$



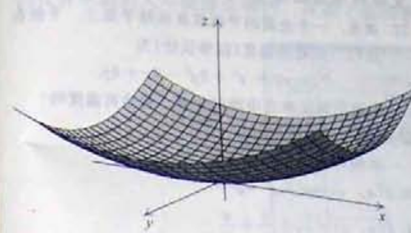
3. $f(x,y)=2xy-x^3-y^2$



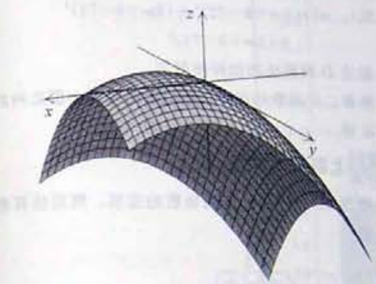
4. $f(x,y)=4xy-x^3-y^2$



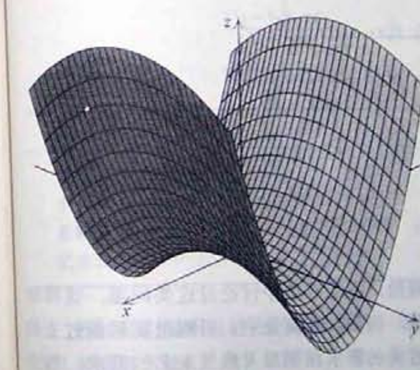
5. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$
6. $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$
7. $f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y-2$
8. $f(x,y)=x^2+2xy+2y^2-6y+2$
9. $f(x,y)=x^2+y^2+2x-4y$



10. $f(x,y)=4y+6x-x^2-y^2$

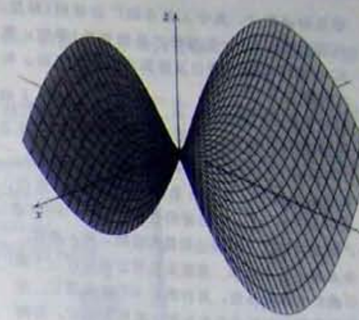


11. $f(x,y)=4x^2-y^2$



12. $f(x,y)=x^2-y^2$

520



13. $f(x,y)=e^{x^2+y^2+1}$

14. $f(x,y)=e^{x^2-4x+y^2-6y+8}$

应用

商业与经济

在这些问题中，假设相对极大值和相对极小值是绝对极大值和绝对极小值.

15. 利润最大化. 某公司生产两种收音机，一种以17美元销售，另一种以21美元销售. 销售 x 千个17美元的收音机和 y 千个21美元的收音机的总收入为
$$R(x,y)=17x+21y.$$
公司测定，生产 x 千个17美元的收音机和 y 千个21美元的收音机的总成本(以千美元计)为
$$C(x,y)=4x^2-4xy+2y^2-11x+25y-3.$$
求为了获得最大利润必须生产和销售每种类型的收音机数.

16. 利润最大化. 某公司生产两种棒球手套，一种以18美元销售，另一种以25美元销售. 销售 x 千个18美元的手套和 y 千个25美元的手套的总收入为
$$R(x,y)=18x+25y.$$
公司测定，生产 x 千个18美元的手套和 y 千个25美元的手套的总成本(以千美元计)为
$$C(x,y)=4x^2-6xy+3y^2+20x+19y-12.$$
求为了获得最大利润必须生产和销售每种类型的手套数.

17. 利润最大化. 某公司生产一种产品，已求得它的利润(单位：百万美元)是一个由
$$P(a,p)=2ap+80p-15p^2-\frac{1}{10}a^2p-100$$

2007/08/16

给出的函数 P. 其中 a 是总的广告费用(单位：百万美元)，而 p 是每件产品的价格(单位：美元). 求 P 的最大值以及使其达到最大值的 a 和 p 的值.

18. **利润最大化.** 某公司生产一种产品，已求得它的利润(单位：百万美元)是一个由

$$P(a,n)=-5a^2-3n^2+48a-4n+2an+300$$

给出的函数 P，其中 a 是总的广告费用(单位：百万美元)，而 n 是销售的数量(单位：千). 求 P 的最大值以及使其达到最大值的 a 和 n 的值.

19. **废品箱的最小成本.** 某废品公司正在设计一个敞口的长方体废品箱，其容积是 320 立方英尺. 废品箱底部的制造成本是每平方英尺 5 美元，而侧面的成本是每平方英尺 4 美元. 求使总成本最小的废品箱的尺寸.（提示：使用容积公式作一个代换.）

20. **关于二变量收益最大化.** Boxowitz 股份有限公司(一个计算机厂商)对销售的两种计算器进行比较. 它们的需求函数由下列关系表示：

$$q_1=78-6p_1-3p_2, \quad (1)$$

$$q_2=66-3p_1-6p_2, \quad (2)$$

其中 p_1 和 p_2 是每台计算器的价格，以 10 美元的倍数计；而 q_1 和 q_2 是对每种计算器的需求量，单位为百台.

a)求依赖于变量 p_1 和 p_2 的总收益函数 R 的表达式. [提示：$R=p_1q_1+p_2q_2$；然后将式(1)和(2)代入求 $R(p_1, p_2)$.]

521～522 b)为了最大化总收益，价格 p_1 和 p_2 应该定为多少?

c)需求量是多少?

d)最大的总收益是多少?

21. **关于二变量收益最大化.** 重复 20 题，此处

$$q_1=64-4p_1-2p_2,$$

而

$$q_2=56-2p_1-4p_2.$$

生命科学与物理学

22. **温度.** 一个金属的平板放在坐标平面上. 平板在点(x, y)处的温度(以华氏计)为

$$T(x,y)=x^2+2y^2-8x+4y.$$

求最低温度和它出现的位置. 有最高温度吗?

综合题

求相对极大值和相对极小值及鞍点.

23. $f(x, y)=e^{x}+e^{y}-e^{x+y}$

24. $f(x, y)=xy+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}$

25. $f(x, y)=2y^2+x^2-x^2y$

26. $S(b, m)=(m+b-72)^2+(2m+b-73)^2+(3m+b-75)^2$

*27. 叙述 D 判别法和如何使用它.

*28. 解释二元函数的相对极小值和绝对极小值之间的区别.

上机技术演练

使用 3D 绘图器作下列函数的图形，然后估算相对极值.

29. $f(x, y)=\dfrac{-5}{x^2+2y^2+1}$

30. $f(x, y)=x^3+y^3+3xy$

31. $f(x, y)=\dfrac{3xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}$

32. $f(x, y)=\dfrac{y+x^2y^2-8x}{xy}$

7.5 应用：最小二乘法

要点

- 求回归线.
- 解涉及回归线的应用问题.

求一个方程去与一组数据拟合的问题是经常出现的. 在 1.6 节中讨论过这类问题. 这样的方程给出了所考虑现象的一个模型，由此可进行预测. 例如，在商业中，可能想要根据过去的数据预测未来的销售；在生态学中，可能想要根据过去的需求预测对天然气未来的需求. 假设我们尝试求一个线性方程

$$y=mx+b$$

与一组数据拟合. 为了确定这个方程就要确定 m 和 b 的值. 但是如何去做呢? 让我们来考虑一些实际的数据.

图 1 中所示的图表是登在报纸上的印第安纳波利斯人寿保险公司的广告，它是关于不同年份中仍在有效期的人寿保险总额的. 在图下面的表中汇编了与图中相同的数据.

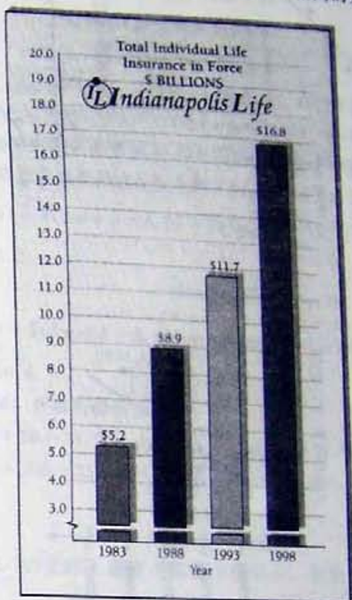


图 1

523

年，x	1. 1983	2. 1988	3. 1993	4. 1998	5. 2003
仍在有效期内的个人人寿保险的总额 y(单位：十亿美元)	5.2	8.9	11.7	16.8	?

假如我们描出这些点并尝试着画一条直线经过它们，即与这些点拟合. 注意，这里可能存在几种实施方法(见图 2 和图 3). 每一种方法各自给出了 2003 年仍在有效期内的保险总额的不同估计.

2007/08/16

注意，所给的时间是以五年为间隔增加的，这使计算较为容易．考虑数据点(1，5.2)，(2，8.9)，(3，11.7)和(4，16.8)，如图4所示．

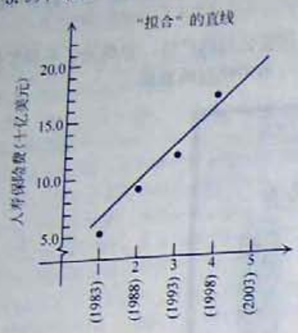


图 2

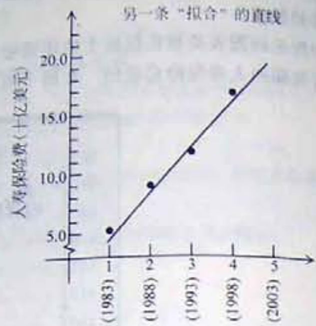


图 3

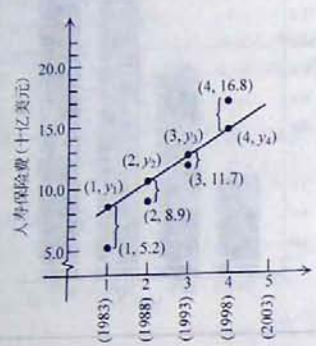


图 4

524

我们将确定 m 和 b 的值，以便使直线

$$y = mx + b$$

与这组数据拟合．注意观测点(1，5.2)，(2，8.9)，(3，11.7)和(4，16.8)与直线上的点$(1, y_1)$，$(2, y_2)$，$(3, y_3)$和$(4, y_4)$之间的 y 误差或 y 偏差 $y_1-5.2$，$y_2-8.9$，$y_3-11.7$ 和 $y_4-16.8$．为了有一个好的拟合，我们希望在某种意义上这些偏差最小化．偏差最小化的一种方法是以最小二乘假定为基础的．

最小二乘假定

最佳拟合直线是使 y 偏差的平方和最小的直线，称其为**回归线**(regression line)．

对于人寿保险数据使用最小二乘假定，我们要使

$$(y_1-5.2)^2+(y_2-8.9)^2+(y_3-11.7)^2+(y_4-16.8)^2 \tag{1}$$

最小化．因为点$(1, y_1)$，$(2, y_2)$，$(3, y_3)$和$(4, y_4)$必须是 $y=mx+b$ 的解，所以

$$y_1 = m(1)+b = m+b,$$
$$y_2 = m(2)+b = 2m+b,$$
$$y_3 = m(3)+b = 3m+b,$$
$$y_4 = m(4)+b = 4m+b.$$

在(1)式中用 $m+b$ 替换 y_1，$2m+b$ 替换 y_2，$3m+b$ 替换 y_3，$4m+b$ 替换 y_4，我们有

$$(m+b-5.2)^2+(2m+b-8.9)^2+(3m+b-11.7)^2+(4m+b-16.8)^2. \tag{2}$$

因此，为了求给定数据集的回归线，必须求 m 和 b 的值，使由(2)式给出的函数 S 取最小值．

为了应用 D 判别法，首先求偏导数 $\partial S/\partial b$ 和 $\partial S/\partial m$：

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2(m+b-5.2)+2(2m+b-8.9)+2(3m+b-11.7)+2(4m+b-16.8)$$
$$= 20m+8b-85.2,$$

而

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 2(m+b-5.2)+2(2m+b-8.9)2+2(3m+b-11.7)3+2(4m+b-16.8)4$$
$$= 60m+20b-250.6.$$

525

我们令这些导数等于0，并解所得的方程组：

$$20m+8b-85.2=0, \qquad 5m+2b=21.3,$$
$$60m+20b-250.6=0; \quad \text{或} \quad 15m+5b=62.65.$$

这个方程组的解是

$$b=1.25, \quad m=3.76.$$

用 D 判别法验证(1.25，3.76)实际上是使 S 取最小值的点，留给学生去完成．我们不需要去计算 $S(1.25, 3.76)$．

m 和 b 的值是确定 $y=mx+b$ 的全部值．回归线是

$$y = 3.76x+1.25.$$

在图5中可看到带有数据的“最佳拟合”回归线的图形．

由数据可以推断，预计2003年在有效期内的人寿保险总额是：

$$y = 3.76(5)+1.25 = 20.05(10 \text{亿美元}).$$

因此预测2003年在有效期内的人寿保险总额大约是20.05×10亿美元．如何验证你的预测？

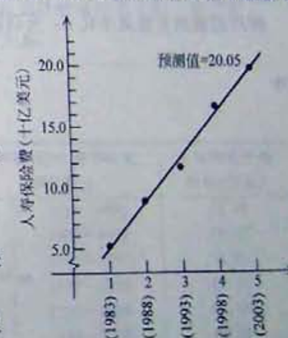


图 5

最小二乘法是一个统计过程，为了简单起见，这里只用四个数据点举例说明．大多数统计人员都知道，必

须远远超过四个数据点才能得到"好的"回归线．此外，要想对很远的未来进行预测，任何线性模型都不是有效的．预测可以做，但是对更远未来的预测是人为的，因为许多不确定的因素可能会出现在预测点附近．

526 **对于任意多个数据点 $(c_1, d_1), (c_2, d_2), \cdots, (c_n, d_n)$ 的回归线**[a]

再来考察对于数据点(1，5.2)，(2，8.9)，(3，11.7)和(4，16.8)的回归线

$$y = 3.76x + 1.25.$$

考虑其 x 坐标和 y 坐标的算术平均数或均值，分别记为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$：

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5,$$

$$\bar{y} = \frac{5.2+8.9+11.7+16.8}{4} = 10.65.$$

由此得知，点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 或(2.5，10.65)在回归线上，这是因为

$$10.65 = 3.76(2.5) + 1.25.$$

因此回归线是

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x}),$$

或

$$y - 10.65 = m(x - 2.5).$$

一般地，只需去确定 m．

假设我们要求任意多个点 $(c_1, d_1), (c_2, d_2), \cdots, (c_n, d_n)$ 的回归线．为此，求 m 和 b 的值，使由

$$S(b,m) = (y_1 - d_1)^2 + (y_2 - d_2)^2 + \cdots + (y_n - d_n)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - d_i)^2$$

给出的函数 S 取最小值，其中 $y_i = mc_i + b$．

使用前面的方法最小化 S，可以证明 $y = mx + b$ 取以下形式：

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x}),$$

其中

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n},$$

而

527
$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} (c_i - \bar{x})(d_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (c_i - \bar{x})^2}.$$

[a] 这部分是供选学的内容，可以省略而不失连贯性．

对于前面的个人人寿保险的例子，现在来看如何用这种方法求回归线．

c_i	d_i	$c_i - \bar{x}$	$(c_i - \bar{x})^2$	$(d_i - \bar{y})$	$(c_i - \bar{x})(d_i - \bar{y})$
1	5.2	−1.5	2.25	−5.45	8.175
2	8.9	−0.5	0.25	−1.75	0.875
3	11.7	0.5	0.25	1.05	0.525
4	16.8	1.5	2.25	6.15	9.225
$\sum_{i=1}^{4} c_i = 10$ $\bar{x} = 2.5$	$\sum_{i=1}^{4} d_i = 42.6$ $\bar{y} = 10.65$		$\sum_{i=1}^{4} (c_i - \bar{x}) = 5$		$\sum_{i=1}^{4} (c_i - \bar{x})(d_i - \bar{y}) = 18.8$

$$m = \frac{18.8}{5} = 3.76$$

因此回归线是

$$y - 10.65 = 3.76(x - 2.5),$$

可化简为

$$y = 3.76x + 1.25.$$

上机技术演练

正如我们在1.6节和本书其他部分所看到的，利用绘图器可求线性回归，也可求诸如二次的、指数的和对数的等类型的回归．使用这样的绘图器求一个线性方程与人寿保险数据相拟合．

用某些绘图器，你还将得到一个称为**相关系数**(coefficient of correlation)的数 r．虽然本书中不能详细地讨论这个概念，但是要记住 r 是用来描述 x 和 y 之间的线性相关程度的．r 越靠近1，相关性越好．

对于人寿保险数据，$r \approx 0.993$，这显示了一个相当好的线性相关性．要记住，较高的线性相关性并不一定表明变量之间的"因果"关系． 528

习题 7.5

下列各题都可使用绘图器来做，也可用绘图器来验证你的工作．

应用

商业与经济

1. 曲棍球的票价．NHL曲棍球比赛的票价正在稳定增长，如下表所示．（资料来源：Amusement business.）

1994～1995赛季以来的年数 x		入场券的平均价格(美元)
0	1994—1995	33.49
1	1995～1996	34.72
2	1996～1997	38.04
3	1997～1998	42.15
4	1998～1999	42.78
5	1999～2000	46.38
6	2000～2001	47.70

2007/08/16



a)求回归线 $y=mx+b$.

b)使用回归线预测 2010～2011 和 2015～2016 赛季 NHL 比赛入场券的平均价格.

2. 劳动力. 自 1995 年以来美国的普通劳动力在稳步增长，如下表所示. (资料来源: U. S. Bureau of Labor Statistics.)

1995 年以来的年数 x		普通劳动力数 y (单位: 百万)
0	1995	132.3
1	1996	133.9
2	1997	136.3
3	1998	137.7
4	1999	139.4
5	2000	140.9

a)求回归线 $y=mx+b$.

b)使用回归线预测美国在 2010 年和 2015 年普通劳动力的规模.

生命科学与物理学

3. 女人的寿命. 考虑下面所列出的不同年度女人的平均寿命. 注意 x 表示实际的年度. (资料来源: Centers for Disease Control.)

年度 x	女人的寿命 y(年)
1950	71.1
1960	73.1
1970	74.7
1980	77.4
1990	78.8
2000	79.5

a)求回归线 $y=mx+b$.

b)使用回归线预测在 2010 年和 2015 年女人的寿命.

4. 男人的寿命. 考虑下面所列出的不同年度男人的平均寿命. 注意 x 表示实际的年度. (资料来源: Centers for Disease Control.)

年度 x	男人的寿命 y(年)
1950	65.6
1960	66.6
1970	67.1
1980	70.0
1990	71.8
2000	74.1

a)求回归线 $y=mx+b$.

b)使用回归线预测在 2010 年和 2015 年男人的寿命.

一般兴趣

5. 评分的预测. 一位教授希望在学生期中考试分数的基础上预测他们期末考试的分数. 根据三个学生的成绩确定一个公式，这三个学生在前一个学期跟同一位教师学习了相同的课程(见下表).

期中考试的分数 x(%)	期末考试的分数 y(%)
70	75
60	62
85	89

a)求回归线 $y=mx+b$. (提示: y 偏差是 $70m+b-75$, $60m+b-62$, 等等.)

b)一个学生的期中考试分数是 81. 使用回归线预测该学生的期末考试分数.

6. 预测跳高的世界纪录. 1989 年 7 月 29 日，古巴的 Javier Sotomayer 创造了令人惊奇的 8 英尺的世界跳高纪录. 田径赛的大多数世界纪录可用一个线性函数来建模. 在下面的表中列出了各年的世界纪录.



年度 x (用实际的年作为 x)	跳高世界纪录 y(英寸)
1912(George Horme)	78.0
1956(Charles Dumas)	84.5
1973(Dwight Stones)	90.5
1989(Javier Sotomayer)	96.0

a)求回归线 $y=mx+b$.

b)使用回归线预测在 2010 年和 2050 年跳高的世界纪录.

c)你在 b)中关于 2050 年的答案符合实际吗? 说明为什么这种从现在到未来的推广可能有问题.

*7. 向一位朋友解释线性回归概念.

*8. 与你主修课中的一位专家讨论线性回归的思想. 写一个简要的报告.

上机技术演练

9. 一般兴趣: 预测 1 英里跑的世界纪录.

年 x (用实际的年作为 x)	1 英里跑的世界纪录 y(分 : 秒)
1875(Walter Slade)	4 : 24.5
1894(Fred Bacon)	4 : 18.2
1923(Paavo Nurmi)	4 : 10.4
1937(Sidney Wooderson)	4 : 06.4
1942(Gunder Hägg)	4 : 06.2
1945(Gunder Hägg)	4 : 01.4
1954(Roger Bannister)	3 : 59.6
1964(Peter Snell)	3 : 54.1
1967(Jim Ryun)	3 : 51.1
1975(John Walker)	3 : 49.4
1979(Sebastian Coe)	3 : 49.0
1980(Steve Ovett)	3 : 48.40
1985(Steve Cram)	3 : 46.31
1993(Noureddine Morceli)	3 : 44.39

a)求与表中数据拟合的回归线 $y=mx+b$. (提示: 把每个时间都转换成十进制，例如，$4:24.5=4\frac{24.5}{60}=4.4083$.)

b)使用回归线预测 2005 年和 2015 年 1 英里跑的世界纪录.

c)在 1999 年 7 月，Hicham El Guerrouj 创造了 3 : 43.13 的 1 英里跑新的世界纪录. 如何把这个记录与用回归线预测的结果作比较?

7.6 约束极大值和极小值：拉格朗日乘数法

要点

- 利用拉格朗日乘数法求极大值和极小值.
- 解涉及拉格朗日乘数法的应用问题.

在详细论述之前，让我们回到第 3 章中讨论过的一个问题.



问题 一个兴趣商店想用 20 英尺的围栏在它的展厅的一角为一台电动火车围出一块矩形场地. 靠墙壁

2007/08/16

的两边不需要围栏．矩形的尺寸是多少能使其面积最大？

我们求函数

$$A = xy$$

满足条件或约束 $x+y=20$ 的极大值．注意，A 是一个二元函数．

前面求解这个问题时，首先由约束条件解出 y：

$$y = 20 - x.$$

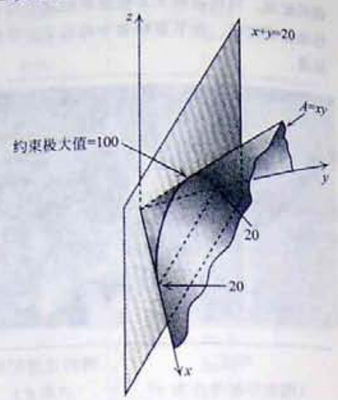
然后用 $20-x$ 替换 y，得到

$$A(x,y) = x(20-x) = 20x - x^2,$$

这是一个一元函数．再使用极大-极小值原理 1 求极大值(见 3.4 节)．本来，二元函数

$$A(x,y) = xy$$

529 ~ 531 没有极大值．这可用 D 判别法来检验．可是，加上约束 $x+y=20$ 后，函数确实有一个极大值．在右面的图形中可以看出这一点．



由约束条件解出一个变量可能相当困难．下面概述的方法使我们不需要解约束方程．

拉格朗日乘数法 为了求函数 $f(x,y)$ 满足约束条件 $g(x,y)=0$ 的极大值或极小值：

1. 构造一个新的函数：

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y).$$

2. 求一阶偏导数 F_x，F_y 和 F_λ．

3. 解方程组

$$F_x = 0,\quad F_y = 0 \quad 和 \quad F_\lambda = 0.$$

用(a,b,λ)表示这个方程组的一个解．仍需确定函数 f 在(a,b,λ)处是否有极大值或极小值，但是我们将假设在本书所考虑的每个问题都有一个极大值或极小值．

拉格朗日乘数法可推广到三元(或更多元)函数．

变量 λ 称为**拉格朗日乘数**(Lagrange multiplier)．我们首先通过求解兴趣商店问题说明拉格朗日乘数法．

例 1 求

$$A(x,y) = xy$$

532 满足约束条件 $x+y=20$ 的极大值．

解

1. 构造新的函数 F 为

$$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda\cdot(x+y-20).$$

注意，首先把 $x+y=20$ 表示为 $x+y-20=0$．

2. 求一阶偏导数：

$$F_x = y-\lambda,$$
$$F_y = x-\lambda,$$
$$F_\lambda = -(x+y-20).$$

3. 令这些导数等于 0，并解所得的方程组：

$$y-\lambda = 0, \tag{1}$$
$$x-\lambda = 0, \tag{2}$$
$$-(x+y-20) = 0,\quad 或 \quad x+y-20 = 0. \tag{3}$$

由式(1)和(2)，得到

$$x = y = \lambda.$$

用 λ 替换式(3)中的 x 和 y，我们有

$$\lambda+\lambda-20 = 0$$
$$2\lambda = 20$$
$$\lambda = 10.$$

因此，$x=\lambda=10$，$y=\lambda=10$．满足约束条件的 A 的极大值在$(10,10)$处取得，且极大值是

$$A(10,10) = 10\cdot 10 = 100.$$

■

例 2 求

$$f(x,y) = 3xy$$

满足约束

$$2x+y = 8$$

的极大值．

附注 例如，可以把 f 解释为具有预算约束条件 $2x+y=8$ 的生产函数．

解

1. 构造新的函数 F 为

$$F(x,y,\lambda) = 3xy - \lambda(2x+y-8).$$

注意，首先必须把 $2x+y=8$ 表示为 $2x+y-8=0$．

2. 求一阶偏导数：

$$F_x = 3y-2\lambda,$$
$$F_y = 3x-\lambda,$$
$$F_\lambda = -(2x+y-8).$$ 533

3. 令这些导数等于 0，并解所得的方程组：

$$3y-2\lambda = 0, \tag{1}$$
$$3x-\lambda = 0, \tag{2}$$
$$-(2x+y-8) = 0,\quad 或 \quad 2x+y-8 = 0. \tag{3}$$

由式(1)解出 y，得到

2007/08/16

$$y=\frac{2}{3}\lambda.$$

由式(2)解出 x，得到

$$x=\frac{\lambda}{3}.$$

在式(3)中用(2/3)λ 替换 y，(λ/3)替换 x，得到

$$2\left(\frac{\lambda}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\lambda\right)-8=0$$

$$\frac{4}{3}\lambda=8$$

$$\lambda=\frac{3}{4}\cdot 8=6.$$

因此

$$x=\frac{\lambda}{3}=\frac{6}{3}=2,\quad y=\frac{2}{3}\lambda=\frac{2}{3}\cdot 6=4.$$

满足约束的 f 的极大值在(2，4)处取得，且极大值是

$$f(2,4)=3\cdot 2\cdot 4=24.$$

■

上机技术演练

使用 3D 绘图器作出 $f(x,\ y)=3xy$ 和 $2x+y=8$ 的图形．直观检查例 2 的结果．

例 3 商业：(12 盎司)饮料罐问题．标准饮料罐的容积是 12 盎司或 21.66 立方英寸．为使表面积最小，它应取何尺寸？求最小的表面积．



解 我们需要求由

$$s(h,r)=2\pi rh+2\pi r^2$$

给出的函数 s 在容积约束条件

$$\pi r^2h=21.66,\quad 或\quad \pi r^2h-21.66=0$$

下的极小值．注意，若无约束，s 没有极小值．

534

1. 构造新的函数为

$$S(h,r,\lambda)=2\pi rh+2\pi r^2-\lambda(\pi r^2h-21.66).$$

2. 求一阶偏导数：

$$\frac{\partial S}{\partial h}=2\pi r-\lambda\pi r^2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial r}=2\pi h+4\pi r-2\lambda\pi rh,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}=-(\pi r^2h-21.66).$$

3. 令这些导数等于 0，并解所得的方程组：

$$2\pi r-\lambda\pi r^2=0, \tag{1}$$

$$2\pi h+4\pi r-2\lambda\pi rh=0, \tag{2}$$

$$-(\pi r^2h-21.66)=0,\quad 或\quad \pi r^2h-21.66=0. \tag{3}$$

注意到可由式(1)解出 r：

$$\pi r(2-\lambda r)=0$$

$$\pi r=0\quad 或\quad 2-\lambda r=0$$

$$r=0\quad 或\quad r=\frac{2}{\lambda}.$$

因为 $r=0$ 不可能是原问题的解，所以我们用 $2/\lambda$ 替换式(2)中的 r：

$$2\pi h+4\pi\cdot\frac{2}{\lambda}-2\lambda\pi\cdot\frac{2}{\lambda}\cdot h=0$$

$$2\pi h+\frac{8\pi}{\lambda}-4\pi h=0$$

$$\frac{8\pi}{\lambda}-2\pi h=0$$

$$-2\pi h=-\frac{8\pi}{\lambda},$$

因此

$$h=\frac{4}{\lambda}.$$

由 $h=4/\lambda$ 和 $r=2/\lambda$，得到 $h=2r$．用 $2r$ 替换式(3)中的 h 得到

$$\pi r^2(2r)-21.66=0$$

$$2\pi r^3-21.66=0$$

$$2\pi r^3=21.66$$

$$\pi r^3=10.83$$

$$r^3=\frac{10.83}{\pi}$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{10.83}{\pi}}\approx 1.51(英寸).$$

535

于是当 $r=1.51$ 英寸，$h=3.02$ 英寸时表面积最小，且为

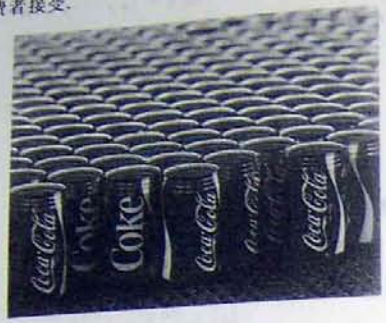
$$2\pi(1.51)(3.02)+2\pi(1.51)^2,\quad 或大约为 42.98 平方英寸.$$

■

标准大小的 12 盎司饮料罐的实际尺寸可能是 $r=1.25$ 英寸和 $h=4.875$ 英寸．学习了例 3 之后引出的一个自然问题是，“为什么饮料公司不用例子中所求得的尺寸呢?”倘若采纳这一尺寸，将大大增加机器装备的成本．新罐的制作机器必须花数百万美元去购买，还必须购买新的饮料灌注机器．自动售货机的尺寸也不适合了．强烈要求节省铝的呼声已在铝罐的重复利用和专门生产带有波纹效果顶盖的饮料罐中得到了部分响应．这种饮料罐需要的铝较少．作为许多

2007/08/16

工程学理念的结果，生产 1 000 个饮料罐所需铝的总量已从 36.5 磅减少到 28.1 磅. 实际上，消费者是决定罐子形状的一个非常重要的因素. 市场调查表明，以例 3 中所求尺寸做的饮料罐拿着不舒服，不能被消费者接受.



习题 7.6

求满足给定约束的 f 的极大值.

1. $f(x, y)=xy$;　$2x+y=8$
2. $f(x, y)=2xy$;　$4x+y=16$
3. $f(x, y)=4-x^2-y^2$;　$x+2y=10$
4. $f(x, y)=3-x^2-y^2$;　$x+6y=37$

求满足给定约束的 f 的极小值.

5. $f(x, y)=x^2+y^2$;　$2x+y=10$
6. $f(x, y)=x^2+y^2$;　$x+4y=17$
7. $f(x, y)=2y^2-6x^2$;　$2x+y=4$
8. $f(x, y)=2x^2+y^2-xy$;　$x+y=8$
9. $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$;　$y+2x-z=3$
10. $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$;　$x+y+z=1$

利用拉格朗日乘数法解下列各题.

11. 求和是 70 而乘积最大的两个数.
12. 求和是 50 而乘积最大的两个数.
13. 求差是 6 而乘积最小的两个数.
14. 求差是 4 而乘积最小的两个数.
15. 求满足 $x+2y+3z=13$ 且使
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$$
取极小值的一个点 (x, y, z).
16. 求满足 $3x+4y+2z=52$ 且使
$$(x-1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2$$
取极小值的一个点 (x, y, z).

应用

商业与经济

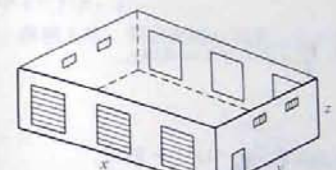
17. *打印纸面积最大化.* 一张标准的打印纸周长为 39 英寸. 求满足 39 英寸周长约束，具有最大打印面积的纸的尺寸. 它的面积是多少? 标准的 $8\frac{1}{2}$ 英寸×11 英寸的打印纸有最大面积吗?
18. *房间面积最大化.* 一个木匠正在营造一个具有 80 英尺固定周长的矩形房间. 可以造出的最大房间的尺寸是多少? 它的面积是多少?
19. *表面积最小化.* 一个标准尺寸的圆柱形油桶有 200 加仑或 27 立方英尺的容积. 试问使表面积取得最小值的桶的尺寸是多少? 求最小的表面积.



这些油桶看起来是用表面积最小化方法制作的吗?

20. *饮料罐问题.* 标准尺寸的饮料罐具有 99 立方英寸的容积. 为了得到最小的表面积，它的尺寸应该是多少? 求最小的表面积.
21. *总销售额最大化.* 某单一产品公司的总销售额 S 为
$$S(L,M)=ML-L^2,$$
其中 M 是材料的成本，L 是人力成本. 求这个函数满足预算约束
$$M+L=80$$
的最大值.
22. *总销售额最大化.* 某单一产品公司的总销售额 S 为
$$S(L,M)=ML-L^2,$$
其中 M 是材料的成本，L 是人力成本. 求这个函数满足预算约束
$$M+L=60.$$
的最大值.
23. *建筑成本最小化.* 某公司计划建造一个体积为 252 000 立方英尺的仓库. 每平方英尺的建筑成本估计为:

墙壁:	3.00 美元
地板:	4.00 美元
天花板:	3.00 美元



a) 建筑物的总成本是函数 $C(x, y, z)$，其中 x 是长度，y 是宽度，而 z 是高度. 求 $C(x, y, z)$ 的表达式.

b) 建筑物采用什么尺寸将使总成本最小? 最小总成本是多少?

24. *集装箱建造成本最小化.* 某集装箱公司要制造一个容积为 12 立方英尺、具有正方形底部和顶部的海运集装箱. 顶部和侧面的成本是每平方英尺 2 美元，底部的成本是每平方英尺 3 美元. 什么样的尺寸将使集装箱的成本最小?
25. *总成本最小化.* 某种产品可以完全在机器 A 或机器 B 或同时在两个机器上制造. 机器的差别使得它们的成本函数有所不同.
$$\text{机器 A: } C(x)=10+\frac{x^2}{6},$$
$$\text{机器 B: } C(y)=200+\frac{y^3}{9}.$$
总成本由 $C(x, y)=C(x)+C(y)$ 给出. 如果需要 $x+y=10\ 100$ 件，那么为了使总成本最小，每台机器各应生产多少件产品?

综合题

求满足给定约束的 f 的极大值或极小值.

26. 极小值: $f(x, y)=xy$; $x^2+y^2=4$.
27. 极小值: $f(x, y)=2x^2+y^2+2xy+3x+2y$; $y^2=x+1$.
28. 极大值: $f(x, y, z)=x+y+z$; $x^2+y^2+z^2=1$.
29. 极大值: $f(x, y, z)=x^2y^2z^2$; $x^2+y^2+z^2=1$.
30. 极大值: $f(x, y, z)=x+2y-2z$; $x^2+y^2+z^2=4$.
31. 极大值: $f(x, y, z, t)=x+y+z+t$; $x^2+y^2+z^2+t^2=1$.
32. 极大值: $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$; $x-2y+5z=1$.
33. *经济学: 等边际生产率法则.* 假设 $p(x, y)$ 表示生产两种产品公司的产量. 我们没给出 p 的表达式. 公司以单位成本 c_1 生产第一种产品 x 件，以单位成本 c_2 生产第二种产品 y 件. 预算约束 B 是一个由
$$B=c_1x+c_2y$$
给出的常数. 根据 p_x，p_y，c_1 和 c_2，使用拉格朗日乘数法求 λ 的值. 所得的公式称为*等边际生产率法则*.
34. *商业: 产量最大化.* 某计算机公司对于某种产品有如下的科布-道格拉斯生产函数:
$$p(x,y)=800x^{3/4}y^{1/4},$$
其中 x 是人力，以美元计; 而 y 是资本，以美元计. 假如公司可用在人力和资本中的总投资是 1 000 000 美元. 为了获得最大产量，在人力和资本之间应如何分配这些投资?

*35. 写出关于数学家 J. L. Lagrange(1736—1813)的生

2007/08/16

活和工作的一个简短报告.

*36. 讨论使用拉格朗日乘数法和 7.4 节中的方法求解问题的区别. 用图形描述这个区别.

上机技术演练

37～44. 使用 3D 绘图器作出 1～8 题中两个方程的图形，然后验证你所得到的解析结果.

7.7 重积分

要点

- 计算重积分.

下面是一个二重积分的例子：

$$\int_3^6\int_{-1}^2 10xy^2\,dx\,dy, \quad 或 \quad \int_3^6\left(\int_{-1}^2 10xy^2\,dx\right)dy.$$

计算二重积分有些类似于"取消"二阶偏导数. 首先计算内部的以 x 为变量的积分，把 y 当成常数来看待：

$$\int_{-1}^2 10xy^2\,dx = 10y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 = 5y^2[x^2]_{-1}^2 = 5y^2[2^2-(-1)^2] = 15y^2.$$

536～538 然后计算外面的以 y 为变量的积分：

$$\int_3^6 15y^2\,dy = 15\left[\frac{y^3}{3}\right]_3^6 = 5[y^3]_3^6 = 5(6^3-3^3) = 945.$$

更精确地说，给定的二重积分称为**二次积分**(double iterated integral). "二次"意味着"做两次".

如果 dx，dy 和积分限都被交换如下：

$$\int_{-1}^2\int_3^6 10xy^2\,dy\,dx,$$

则首先计算内部的 y 的积分，把 x 当作常数来看待：

$$\int_3^6 10xy^2\,dy = 10x\left[\frac{y^3}{3}\right]_3^6 = \frac{10x}{3}[y^3]_3^6 = \frac{10}{3}x(6^3-3^3) = 630x.$$

然后计算外面的 x 的积分：

$$\int_{-1}^2 630x\,dx = 630\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 = 315[x^2]_{-1}^2 = 315[2^2-(-1)^2] = 945.$$

注意，我们得到相同的结果. 这不总是正确的，但是对于我们所讨论的函数类型都是正确的.

有时变量出现在积分限上.

例 1 计算

$$\int_0^1\int_{x^2}^x xy^2\,dy\,dx.$$

解 首先计算内部的 y 的积分，把 x 当作常数来看待：

$$\int_{x^2}^x xy^2\,dy = x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^x = \frac{1}{3}x[x^3-(x^2)^3] = \frac{1}{3}(x^4-x^7).$$

然后计算外面的 x 的积分：

$$\frac{1}{3}\int_0^1(x^4-x^7)\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^8}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1^5}{5}-\frac{1^8}{8}\right)-\left(\frac{0^5}{5}-\frac{0^8}{8}\right)\right] = \frac{1}{40}.$$

于是

$$\int_0^1\int_{x^2}^x xy^2\,dy\,dx = \frac{1}{40}.$$

■

重积分的几何解释 539

假设 xy 平面中的区域 G 由函数 $y_1=g(x)$ 和 $y_2=h(x)$ 与直线 $x_1=a$ 和 $x_2=b$ 围成. 我们要求在 G 之上和曲面 $z=f(x,y)$ 之下的立方体体积 V. 可把这个立方体看作由许多垂直的柱体组成，柱体如图 1 中所示. 每个柱体的体积可由 $l\cdot w\cdot h$ 或 $z\cdot\Delta y\cdot\Delta x$ 得到. 在 y 方向上积分这些体积，得到

$$\left[\int_{y_1}^{y_2} z\,dy\right]dx,$$

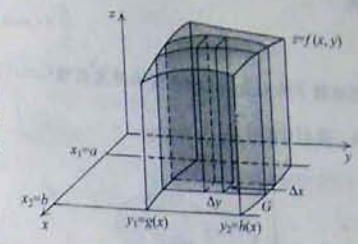


图 1

它是图中所画出的一块"切片"或薄片. 然后沿 x 方向积分这些片，得到整个体积：

$$V = \int_a^b\left[\int_{y_1}^{y_2} z\,dy\right]dx,$$

或

$$V = \int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} z\,dy\,dx,$$

其中 $z=f(x,y)$.

在例 1 中，积分区域 G 是在 $y=x^2$ 和 $y=x$ 的图形之间的平面区域，如图 2 和图 3 所示.

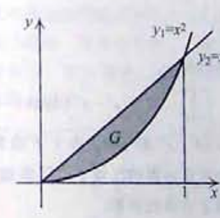


图 2

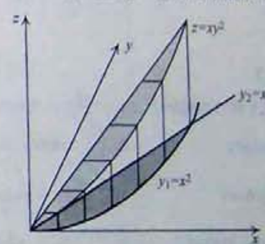


图 3

在计算例 1 中的二重积分时，我们求出了以 G 为底以曲面 $z=xy^2$ 为顶的立方体的体积，如图 2 所示.

2007/08/16

在概率上的应用

假设我们向平面中的区域 R 投掷飞镖．设飞镖落在 R 中的点 (x, y) 上(图 4)．我们把 (x, y) 当作一个连续随机变量，它的坐标是某一区域 R 中的所有值．如果对 R 中所有的 (x, y)，函数 f 满足

$$f(x,y) \geq 0$$

和

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = 1,$$

则函数 f 称为是一个**联合概率密度函数**(joint probability density function)，其中 $\iint_R$ 涉及 R 上的二重积分的计算．

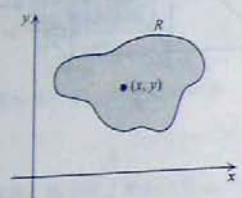


图 4

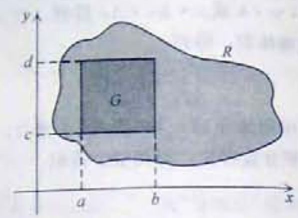


图 5

假如我们想知道飞镖落在 R 的矩形子区域 G 中的概率，其中 G 是满足 $a \leq x \leq b$ 和 $c \leq y \leq d$ 的点的集合(图 5)．这将由

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

540~541 给出．

习题 7.7

计算下列二重积分．

1. $\int_0^2\int_1^3 2y\,dx\,dy$
2. $\int_0^1\int_0^2 2x\,dx\,dy$
3. $\int_{-1}^1\int_x^1 xy\,dy\,dx$
4. $\int_{-1}^1\int_x^1 (x+y)\,dy\,dx$
5. $\int_0^1\int_{-1}^1 (x+y)\,dy\,dx$
6. $\int_0^1\int_{-1}^1 (x+y)\,dy\,dx$
7. $\int_0^1\int_{x^2}^x (x+y)\,dy\,dx$
8. $\int_0^1\int_0^x e^{x+y}\,dy\,dx$
9. $\int_0^1\int_1^{e^x} \frac{1}{y}\,dy\,dx$
10. $\int_0^1\int_{-1}^x (x^2+y^2)\,dy\,dx$
11. $\int_0^1\int_0^x (x+y^2)\,dy\,dx$
12. $\int_1^2\int_0^x 2e^{x^2}\,dy\,dx$

13. 通过计算积分

$$\int_0^1\int_0^{1-x^2}(1-y-x^2)\,dy\,dx,$$

求在以 $y=1-x^2$ 和 $y=0$ 为上下边界，以 $x=0$ 和 $x=1$ 为左右边界的区域上，以曲面 $z=1-y-x^2$ 为顶的立方体的体积．

14. 通过计算积分

$$\int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)\,dy\,dx,$$

求在以 $y=1-x$ 和 $y=0$ 为上下边界，以 $x=0$ 和 $x=1$ 为左右边界的区域上，以曲面 $z=x+y$ 为顶的立方体的体积．

假设一个连续随机变量有联合概率密度函数为

$$f(x, y)=x^2+\frac{1}{3}xy,$$
$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

15. 求

$$\int_0^2\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

16. 通过计算积分

$$\int_1^2\int_0^{1/2} f(x,y)\,dx\,dy,$$

求点 (x, y) 在区域 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$，$1 \leq y \leq 2$ 中的概率．

综合题

形如

$$\int_e^f\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

的三次积分用与二次积分几乎相同的方式进行计算．首先计算内部的 x 的积分，把 y 和 z 当作常数看待．然后计算中间的 y 的积分，把 z 当作常数看待．最后计算外面的 z 的积分．计算下面这些三重积分．

17. $\int_0^1\int_1^2\int_{-1}^1 (2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz$
18. $\int_0^1\int_1^4\int_{-1}^1 (8x-2y+z)\,dx\,dy\,dz$
19. $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} xyz\,dz\,dy\,dx$
20. $\int_0^2\int_{2-y}^{4-2y}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} z\,dz\,dx\,dy$

*21. 描述二元函数重积分的几何意义．

上机技术演练

22. 使用一个可作重积分的绘图器计算出现在这个习题中的某些二重积分． 542

概要与复习

关键术语

Function of two variables(二元函数)，496
Function of several variables(多元函数)，497
Partial derivative(偏导数)，504
Second-order partial derivative(二阶偏导数)，510
Relative maximum(相对极大值)，512
Relative minimum(相对极小值)，512
Saddle point(鞍点)，514
D-test(D 判别法)，514
Least-squares technique(最小二乘法)，523
Method of Lagrange multipliers(拉格朗日乘数法)，532
Multiple integration(重积分)，538
Double iterated integral(二次积分)，539

复习题

这些复习题是为测验准备的，它们也可以用作不限时间的练习测验．答案在书后，答案中还包括方括号内的参考章节．它告诉你，如果你的答案不正确，应该再学习哪个章节．

已知 $f(x, y)=e^x+3xy^2+2y$，求下列各题．

1. $f(2, 0)$
2. f_x
3. f_y
4. f_{xy}
5. f_{yx}
6. f_{xx}
7. f_{yy}

已知 $z=2x^3\ln y+xy^2$，求下列各题．

8. $\frac{\partial z}{\partial x}$
9. $\frac{\partial z}{\partial y}$
10. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
11. $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
12. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
13. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

求相对极大值和相对极小值．

14. $f(x, y)=x^2-6xy+y^2+6x+3y-\frac{1}{5}$
15. $f(x, y)=x^2-xy+y^2-2x+4y$
16. $f(x, y)=3x-6y-x^2-y^2$
17. $f(x, y)=x^4+y^4+4x-32y+80$
18. 考虑下面关于最近 10 年期间 NFL 球员平均薪金的数据表．(资料来源：Sports Fans of America Association．)
    a)求回归线 $y=mx+b$．
    b)利用回归线预测 2005 年和 2010 年 NFL 球员的平均薪金．

2007/08/16

年度 x		NFL 球员的平均薪金 y(单位：百万美元)
0	1992	0.48
1	1993	0.67
2	1994	0.63
3	1995	0.72
4	1996	0.79
5	1997	0.74
6	1998	0.99
7	1999	1.06
8	2000	1.12
9	2001	1.10

19. 考虑下表中的数据，它是最近三年期间在学院和大学注册入学的人数.

年度 x	注册入学人数 y(以百万计)
1	7.2
2	8.0
3	8.4

a)求回归线 $y=mx+b$.

b)利用回归线预测第四年的注册入学人数.

20. 求函数

$$f(x,y)=x^2-2xy+2y^2+20$$

满足约束 $2x-6y=15$ 的极小值.

21. 求函数

$$f(x,y)=6xy$$

满足约束 $2x+y=20$ 的极大值.

计算下列各题.

22. $\int_0^1\int_{x^2}^{3x}(x^3+2y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

23. $\int_0^1\int_{x^2}^{x}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

综合题

24. 计算

$$\int_0^2\int_{1-2x}^{1-x}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}z\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

25. 商业：表面积最小化. 假设饮料可装在圆柱形容器内或具有正方形的顶和底的长方体容器内. 把每种容器都设计成其形体表面面积是最小的. 如果假设容积是 26 立方英寸，试问哪一种容器有比较小的表面积?

上机技术演练

26. 使用 3D 绘图器作

$$f(x,y)=x^2+4y^2$$

的图形.

测验

已知 $f(x, y)=e^x+2x^3y+y$，求下列各题.

1. $f(-1, 2)$　2. $\frac{\partial f}{\partial x}$　3. $\frac{\partial f}{\partial y}$

4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$　5. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$　6. $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

7. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

求相对极大值和相对极小值.

8. $f(x, y)=x^2-xy+y^2-x$

9. $f(x, y)=4y^2-x^2$

10. 商业：预测总销售额. 考虑下面表中的数据，它是某公司在最初三年运营期间的总销售额.

年 x	销售额 y(以百万美元计)
1	10
2	15
3	19

a)求回归线 $y=mx+b$.

b)使用回归线预测第四年的销售总额.

11. 求函数

$$f(x,y)=6xy-4x^2-3y^2$$

满足约束 $x+3y=19$ 的极大值.

12. 计算

$$\int_0^2\int_1^x(x^2-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

综合题

13. 商业：产量最大化. 某仪器公司对于某种产品有下列的科布-道格拉斯生产函数：

$$p(x,y)=50x^{2/3}y^{1/3},$$

其中 x 是人力，以美元计；而 y 是资本，以美元计. 假如公司在人力和资本上可进行 600 000 美元的总投资. 试问为了取得最大产量，在人力和资本间的投资应如何分配?

14. 求 f_x 和 f_t：

$$f(x,t)=\frac{x^2-2t}{x^3+2t}.$$

上机技术演练

15. 使用 3D 绘图器作

$$f(x,y)=x-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}x^3$$ 543 ~ 544

的图形.

上机技术的深入应用

在大厦内雇员的行走时间最小化

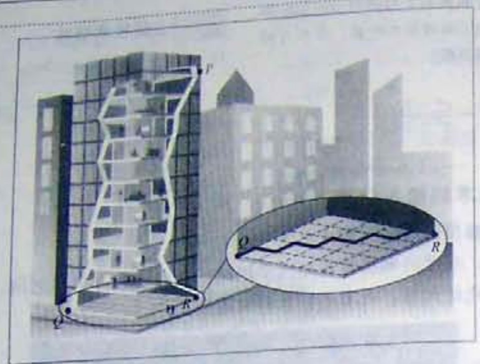
为了公务，有关的雇员要花相当多的时间行走于各办公室之间，设计一个使行走时间最小化的大厦，可节省巨大的财政开支.



在多层建筑设计中，一个需要考虑的问题是在具有方形地板的长方体建筑内相距最远的点之间的行走时间. 我们将利用拉格朗日乘数法来设计这样的大厦.

假设每层都有正方形的走廊格栅，如下图所示. 假如你位于具有 12 层的这样大厦的顶层东北角最远点 P. 需要多长时间才能到达第 1 层的西南角，即点 Q?

2007/08/16



设所需要的时间为 t. 分两步求 t 的表达式：

1. 你要从第 12 层下到第 1 层. 这是垂直方向的运动.

2. 你需要穿过第 1 层. 这是水平方向的运动.

垂直时间是 h 除以 a，其中 h 是由地面到顶层的高度，a 是沿垂直方向行进的速度(电梯速度). 于是，垂直时间由 h/a 给出.

545 水平时间是穿过第 1 层所需的时间，即按照正方形走廊格栅的路线(由 R 到 Q)行走的时间. 如果每层都是边长为 k 的正方形，则由 R 到 Q 的距离是 $2k$. 如果步行的速度是 b，则水平时间为 $2k/b$. 于是由 P 到 Q 所需时间是 h 和 k 的二元函数

$$t(h,k)=\text{垂直时间}+\text{水平时间}$$
$$=\frac{h}{a}+\frac{2k}{b}.$$

如果我们必须在两个(或更多)有同样楼层面积但尺寸不同的大厦设计方案中选择一个，会出现什么情况？对于两个大厦其行进时间相同还是不同？首先，所建大厦总的楼层面积是多少？假设大厦有 n 层，每个正方形的边长是 k，则总的楼层面积为

$$A=nk^2.$$

注意，楼顶的面积不包括在内.

如果 h 是大厦顶部到地面的高，c 是每层的高，则 $n=h/c$. (为简单起见，不计每层地板的厚度.)于是

$$A=\frac{h}{c}k^2.$$

再回到有同样的总楼层面积但尺寸不同的两个大厦的问题，看 $t(h, k)$ 会出现什么情况.

练习

1. 使用绘图器上的 TABLE 选项(如果有的话)或使用一个电子表格软件程序. 对于下面每种情况，设电梯速度 $a=10$ 英尺/秒，步行速度 $b=4$ 英尺/秒，每层的高度 $c=15$ 英尺. 表中的每种情况都包含两个方案，但都维持楼层面积不变这一特殊情况. 完成下面的表.

情况	大厦	n	k	A	h	$t(h, k)$
1	B1	2	40	3 200	30	23
	B2	3	32.66	3 200	45	20.83
2	B1	2	60	7 200		
	B2	3	48.99			
3	B1	4	40			
	B2	5	35.777			
4	B1	5	60			
	B2	10	42.426			
5	B1	5	150			
	B2	10	106.066			
6	B1	10	40			
	B2	17	30.679			
7	B1	10	80			
	B2	17	61.357			
8	B1	17	40			
	B2	26	32.344			
9	B1	17	50			
	B2	26	40.43			
10	B1	26	77			
	B2	50	55.525			

2. 对于固定的楼层面积，不同的尺寸得到的行进时间也不同吗？

3. 你认为对于给定的楼层面积，存在 h 和 k 的值可使行进时间最小化吗？试把楼层面积固定在 40 000 平方英尺，研究不同尺寸所产生的不同结果. 为了确实搞清楚，我们需要运用什么知识？

求有正方形地板的长方体大厦的尺寸，使得在大厦中按照下面描述的相距最远的点之间的行进时间取最小值. 每层都有正方形走廊格栅. 由地面到顶层的高是 h，而每层的边长是 k. 电梯速度是 10 英尺/秒，而人的步行平均速度是 4 英尺/秒. 每层的高度是 8 英尺.

4. 使用所给信息求函数 $t(h, k)$ 的公式.

5. 求约束公式.

2007/08/16

546 6. 使用拉格朗日乘数法求大厦的尺寸，使得在大厦中相距最远的点之间的行进时间 t 取最小值. 使用 3D 绘图器作出 4 题和 5 题中两个方程的图形，然后从直观上检验你按解析法求出的结果.

7. 求依赖于 a, b, c 和 A 的通解.

总复习题

1. 写出斜率是 -4 且包含点 $(-7, 1)$ 的直线方程.
2. 对于 $f(x)=x^2-5$，求 $f(x+h)$.
3. a)作出函数

$$f(x)=\begin{cases}5-x, & 若\ x\neq 2,\\ -3, & 若\ x=2\end{cases}$$

的图形.

b)求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

c)求 $f(2)$.

d)在点 2 处 f 连续吗？

求下列极限，如果它存在的话.

4. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x+4}$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^3+8}$
6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{x-3}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x-7}{3x+2}$
8. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3x^2+h}{x-2h}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+5x^2-7}{16x^3-4x^2+9}$

求下列导数.

10. $y=-9x+3$
11. $y=x^2-7x+3$
12. $y=x^{1/4}$
13. $f(x)=x^{-4}$
14. $f(x)=(x-3)(x+1)^3$
15. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3}$
16. $y=\dfrac{e^x+x}{e^x}$
17. $y=\ln(x^2+5)$
18. $y=e^{\ln x}$
19. $y=e^{2x}+x^2$
20. $y=e^{\sqrt{x-3}}$
21. $f(x)=\ln(e^x-4)$
22. 对于 $y=x^3-\dfrac{2}{x}$，求 d^2y/dx^2.
23. 如果 $x^3+x/y=7$，用隐微分法求 dy/dx.
24. 求 $y=e^x-x^2-3$ 的图形在点 $(0, -2)$ 处的切线方程.

求下列函数的相对极值. 用有序对列出你的答案，然后描绘函数的图形.

25. $f(x)=x^3-3x+1$
26. $f(x)=2x^2-x^4-3$
27. $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+1}$
28. $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

求在指定区间上的绝对极大值和绝对极小值，如果它们存在的话. 如果没有指出区间，则区间为实轴.

29. $f(x)=3x^2-6x-4$
30. $f(x)=-5x+1$
31. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$; $[-2, 0]$
32. 商业：利润最大化. 对于某种产品，总收益和总成本函数为

$$R(x)=4x^2+11x+110,$$
$$C(x)=4.2x^2+5x+10.$$

求为了得到最大的利润必须生产和销售的产品数量.

33. 商业：库存成本最小化. 某电器商店每年销售 450 台袖珍收音机. 库存每台收音机一年，商店需花费 4 美元. 为了订购收音机，需支付 1 美元的固定成本，每台收音机再另付 0.75 美元. 为了使库存成本最小，商店每年应该订购几次收音机，每次的批量是多少？
34. 对于 $f(x)=3x^2-7$，$x=5$ 和 $\Delta x=0.1$，求 $f'(x)\Delta x$.
35. 商业：指数增长. 国家冷冻酸乳公司的特许经营店数目 N 正以每年 10% 的速度在增长，即

$$\frac{dN}{dt}=0.1N,$$

其中 N 是特许经营店数，t 是自 1996 年以来的年数.

a)已知在 1996 年的特许经营店数是 8 000，求方程的解，假定 $N_0=8\,000$ 和 $k=0.1$.

b)到 2004 年将有多少个特许经营店？

c)特许经营店数的倍增时间是多少？

36. 经济学：需求弹性. 考虑需求函数

$$x=D(p)=240-20p.$$

a)求弹性.

b)求 $p=2$ 美元时的弹性，说明需求是有弹性还是无弹性.

c)求 $p=9$ 美元时的弹性，说明需求是有弹性还是无弹性.

d)在价格为 2 美元时，价格的小幅度增加将会导致总收益的增加还是减少？

e)求使总收益取最大值的 p 值.

计算下列积分.

37. $\int 3x^5 \mathrm{d}x$ 38. $\int_{-1}^{0} (2e^x+1)\mathrm{d}x$

39. $\int \frac{x}{(7-3x)^2}\mathrm{d}x$ （使用表 1.）

40. $\int x^2 e^{x^3} \mathrm{d}x$. （使用换元法. 不使用表 1.）

41. $\int (x+3)\ln x \mathrm{d}x$ 42. $\int \frac{260}{x}\mathrm{d}x$

43. $\int_0^1 6\sqrt{x}\mathrm{d}x$

44. 求在区间[1，5]上 $y=x^2+3x$ 的图形下的面积.

45. 商业：现值. 求按永续复利 8%计息的 30 年到期的 250 000 美元的现值.

46. 商业：累积现值. 如果每年有 4 500 美元的连续资金流量，且现行的永续复利是 7.2%，求 50 年后这个投资的累积现值.

47. 确定下述广义积分是收敛还是发散. 如果收敛，计算它的值：

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^7}\mathrm{d}x.$$

48. 已知概率密度函数

$$f(x)=\frac{3}{2x^2} \quad 在[1,3]上，$$

求 $E(x)$.

49. 设 x 是服从均值 $\mu=3$ 和标准差 $\sigma=5$ 的正态分布的连续随机变量. 使用表 2，求 $P(-2\leqslant x\leqslant 8)$.

547～549

50. 经济学：供给与需求. 已知需求函数和供给函数分别为

$$p=D(x)=(x-20)^2$$

和

$$p=S(x)=x^2+10x+50.$$

求平衡点和消费者盈余.

51. 求图形

$$y=e^{-x} \quad 由\ x=0\ 到\ x=5$$

下的区域绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积.

52. 解微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=xy$.

53. 商业：广告效应. 在一个广告的实验中，确定出

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k(L-P),$$

其中 P 为广告播出 t 次后城市中购买该产品的人所占的百分比，$L=100\%$或 1.

a)用 $L=1$ 表示 $P(t)$.

b)已知 $P(10)=70\%$. 由此确定 k. 答案四舍五入精确到百分之一.

c)根据 b)中求出的 k 值重新写出 $P(t)$.

d)使用 c)中的结果求 $P(20)$.

已知 $f(x, y)=e^y+4x^2y^3+3x$，求下列各题.

54. f_x 55. f_{yy}

56. 求 $f(x, y)=8x^2-y^2$ 的相对极大值和相对极小值.

57. 求 $f(x, y)=4x+2y-x^2-y^2+4$ 满足约束 $x+2y=9$ 的最大值.

58. 计算

$$\int_0^3\int_{-1}^2 e^x \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

附录 基础代数复习

要点

- 熟练地掌握指数表达式.
- 代数式的相乘与分解因式.
- 解方程、不等式和应用问题.

这一附录包含了为学习微积分所必需的大部分代数学基本内容. 它们可能是与第 1 章结合起来使用，或因某些技巧的需要而在本书各处出现.

指数记号

让我们来回顾表达式

$$a^n$$

的意义，其中 a 是任意实数，n 是一个整数，即 n 是集合{…，−3，−2，−1，0，1，2，3，…}中的一个数. 数 a 称为**底**(base)，n 称为**指数**(exponent). 当 n 大于 1 时，则

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n个因数}.$$

换句话说，a^n 是 n 个因数的积，而每个因数都是 a.

例 1 不用指数表示下列各式.

a) $4^3=4\cdot4\cdot4=64$

b) $(-2)^5=(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)=-32$

c) $(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=16$

d) $-2^4=-(2^4)=-(2)(2)(2)(2)=-16$

e) $(1.08)^2=1.08\times1.08=1.1664$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ ■

我们定义 1 的指数如下：

$$a^1=a, \quad 对于任何实数\ a.$$

换句话说，任何实数的 1 次幂都是其本身.

我们定义 0 的指数如下：

$$a^0=1, \quad 对任何非零实数\ a.$$

即任何非零实数的 0 次幂都是 1.

例 2 不用指数表示下列各式.

a) $(-2x)^0=1$ b) $(-2x)^1=-2x$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ d) $e^0=1$

e) $e^1=e$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$ ■

2007/08/16

负整数指数的意义如下：

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\quad \text{对任何非零实数 } a.$$

也就是说，任何非零实数 a 的 $-n$ 次幂是 a^n 的倒数.

例 3 不用负指数表示下列各式.

a) $2^{-5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{32}$

b) $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{10\cdot 10\cdot 10}=\frac{1}{1\ 000}$，或 0.001

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=1\cdot\frac{16}{1}=16$

d) $x^{-5}=\frac{1}{x^5}$

e) $e^{-4}=\frac{1}{e^4}$

f) $t^{-1}=\frac{1}{t^1}=\frac{1}{t}$ ■

指数的性质

注意：

$$b^5\cdot b^{-3}=(b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b)\cdot\frac{1}{b\cdot b\cdot b}$$

$$=\frac{b\cdot b\cdot b}{b\cdot b\cdot b}\cdot b\cdot b$$

552 $$=1\cdot b\cdot b=b^2.$$

我们所得到的结果与指数相加的结果相同. 一般地，这是正确的.

定理 1 对于任何非零实数 a 与任何整数 n 和 m，

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

（当底相同时，为了相乘只需指数相加.）

例 4 相乘.

a) $x^5\cdot x^6=x^{5+6}=x^{11}$

b) $x^{-5}\cdot x^6=x^{-5+6}=x$

c) $2x^{-3}\cdot 5x^{-4}=10x^{-3+(-4)}=10x^{-7}$，或 $\frac{10}{x^7}$

d) $r^2\cdot r=r^{2+1}=r^3$ ■

注意：

$$b^5\div b^2=\frac{b^5}{b^2}=\frac{b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b}{b\cdot b}=\frac{b\cdot b}{b\cdot b}\cdot b\cdot b\cdot b=1\cdot b\cdot b\cdot b=b^3.$$

我们所得到的结果与指数相减的结果相同. 一般地，这是正确的.

定理 2 对于任何非零实数 a 与任何整数 n 和 m，

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}.$$

（当底相同时，为作除法，只需用分子的指数减去分母的指数.）

例 5 作除法.

a) $\frac{a^3}{a^2}=a^{3-2}=a^1=a$

b) $\frac{x^7}{x^7}=x^{7-7}=x^0=1$

c) $\frac{e^3}{e^{-4}}=e^{3-(-4)}=e^{3+4}=e^7$

d) $\frac{e^{-4}}{e^{-1}}=e^{-4-(-1)}=e^{-4+1}=e^{-3}$，或 $\frac{1}{e^3}$ ■ 553

注意：

$$(b^2)^3=b^2\cdot b^2\cdot b^2=b^{2+2+2}=b^6.$$

我们所得到的结果与指数相乘的结果相同.

定理 3 对于任何非零实数 a 与任何整数 n 和 m，

$$(a^n)^m=a^{nm},\quad (ab)^n=a^nb^n,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

例 6 化简.

a) $(x^{-2})^3=x^{-2\cdot 3}=x^{-6}$，或 $\frac{1}{x^5}$

b) $(e^x)^2=e^{2x}$

c) $(2x^4y^{-5}z^3)^{-3}=2^{-3}(x^4)^{-3}(y^{-5})^{-3}(z^3)^{-3}=\frac{1}{2^3}x^{-12}y^{15}z^{-9}$，或 $\frac{y^{15}}{8x^{12}z^9}$

d) $\left(\frac{x^2}{p^4q^5}\right)^3=\frac{(x^2)^3}{(p^4q^5)^3}=\frac{x^6}{(p^4)^3(q^5)^3}=\frac{x^6}{p^{12}q^{15}}$ ■

乘法

在乘法中分配律是很重要的.

分配律

对于任何数 A，B 和 C，

$$A(B+C)=AB+AC,\quad A(B-C)=AB-AC.$$

2007/08/16

例 7 代数式相乘.

a) $3(x-5)=3\cdot x-3\cdot 5=3x-15$

b) $P(1+i)=P\cdot 1+P\cdot i=P+Pi$

c) $(x-5)(x+3)=(x-5)x+(x-5)3=x\cdot x-5x+3x-5\cdot 3=x^2-2x-15$

d) $(a+b)(a+b)=(a+b)a+(a+b)b=a\cdot a+ba+ab+b\cdot b=a^2+2ab+b^2$ ■

554 使用分配律得到的下列公式在乘法中也是有用的.

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \quad (1)$$

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2 \quad (2)$$

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2 \quad (3)$$

例 8 代数式相乘.

a) $(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$

b) $(2x-t)^2=(2x)^2-2(2x)t+t^2=4x^2-4xt+t^2$

c) $(3c+d)(3c-d)=(3c)^2-d^2=9c^2-d^2$ ■

分解因式

分解因式是乘法的逆运算. 即要分解一个表达式，我们就要去求一个等价的乘积表达式. 始终要记住，先找出公因式.

例 9 分解因式.

a) $P+Pi=P\cdot 1+P\cdot i=P(1+i)$ 用分配律

b) $2xh+h^2=h(2x+h)$

c) $x^2-6xy+9y^2=(x-3y)^2$

d) $x^2-5x-14=(x-7)(x+2)$ 找出和是-5的-14的因数

e) $6x^2+7x-5=(2x-1)(3x+5)$ 先考虑分解第一个系数的方法，例如$(2x\quad)(3x\quad)$. 然后找寻-5的因数，使得相乘时得到所给的表达式

f) $x^2-9t^2=(x-3t)(x+3t)$ 用到公式$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ ■

分解具有四项的某些表达式时，可先找出一个公共的二项式因式. 这称为**分组分解法**(factoring by grouping).

例 10 分解因式.

a) $t^3+6t^2-2t-12=t^2(t+6)-2(t+6)$ 先分解前两项，再分解后两项

$=(t^2-2)(t+6)$ 分解出一个公共的二项式因式$t+6$

b) $x^3-7x^2-4x+28=x^2(x-7)-4(x-7)$ 先分解前两项，再分解后两项

$=(x^2-4)(x-7)$ 分解出一个公共的二项式因式$x-7$

555 $=(x-2)(x+2)(x-7)$ ■

解方程

许多方程的求解以加法原理和乘法原理为基础. 可以在一个方程的两边加上(或减去)一个相同的数，并且得到一个等价的方程，即新的方程与原来的方程有相同的解. 可以用一个非零的数乘以(或除以)一个方程的两边，并且得到一个等价的方程.

加法原理 对于任何实数a，b和c，

$$a=b \text{ 等价于 } a+c=b+c.$$

乘法原理 对于任何实数a，b和c，

$$a=b \text{ 等价于 } a\cdot c=b\cdot c.$$

解方程时，利用这些方程求解原理和其他的实数性质，让变量单独出现在一边，然后再求解就容易了.

例 11 解$-\frac{5}{6}x+10=\frac{1}{2}x+2$.

解 为了消去分数，首先在两边同乘6：

$6\left(-\frac{5}{6}x+10\right)=6\left(\frac{1}{2}x+2\right)$ 使用乘法原理

$6\left(-\frac{5}{6}x\right)+6\cdot 10=6\left(\frac{1}{2}x\right)+6\cdot 2$ 使用分配律

$-5x+60=3x+12$ 化简

$60=8x+12$ 使用加法原理：两边加上$5x$

$48=8x$ 两边加上-12

$\frac{1}{8}\cdot 48=\frac{1}{8}\cdot 8x$ 两边乘以$\frac{1}{8}$

$6=x.$

现在变量单独出现在一边，我们看到6是解. 可以把6代入原来的方程进行检验. ■

解方程的第三个原理是零积原理.

零积原理 对于任何数a和b，如果$ab=0$，则$a=0$或$b=0$；如果$a=0$或$b=0$，则$ab=0$.

用这个原理求解的方程必须其一边是0，而另一边是一个乘积. 令每个因式等于0，然后解所得的方程就得到原方程的解. 556

例 12 解$3x(x-2)(5x+4)=0$.

解 我们有

$$3x(x-2)(5x+4)=0$$

2007/08/16

$$3x=0 \quad 或 \quad x-2=0 \quad 或 \quad 5x+4=0 \qquad 使用零积原理$$

$$3x=0 \qquad\qquad\qquad\qquad 5x=-4 \qquad 分别求解每一个$$

$$\frac{1}{3}\cdot 3x=\frac{1}{3}\cdot 0 \quad 或 \quad x=2 \quad 或$$

$$x=0 \quad 或 \quad x=2 \quad 或 \quad x=-\frac{4}{5}.$$

■

解是 0，2 和 $-\frac{4}{5}$.

注意，只有当乘积是 0 时才可使用零积原理. 例如，尽管知道 $ab=8$，但也不能得出 $a=8$ 或 $b=8$.

例 13 解 $4x^3=x$.

解 我们有

$$4x^3=x$$

$$4x^3-x=0 \qquad 加 -x$$

$$x(4x^2-1)=0$$

$$x(2x-1)(2x+1)=0 \qquad 分解因式$$

$$x=0 \quad 或 \quad 2x-1=0 \quad 或 \quad 2x+1=0 \qquad 使用零积原理$$

$$x=0 \quad 或 \quad 2x=1 \quad 或 \quad 2x=-1$$

$$x=0 \quad 或 \quad x=\frac{1}{2} \quad 或 \quad x=-\frac{1}{2}.$$

■

解是 0，$\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$.

有理方程

如下的表达式都是一个变量的多项式：

$$x^2-4, \quad x^3+7x^2-8x+9, \quad t-19.$$

两个多项式的**最小公倍数**(least common multiple，LCM)可通过分解因式并利用出现在各分解式中每个因式的最高次数来得到.

例 14 求 LCM：x^2+2x+1，$5x^2-5x$ 和 x^2-1.

解

$$\left.\begin{aligned} x^2+2x+1&=(x+1)(x+1); \\ 5x^2-5x&=5x(x-1); \\ x^2-1&=(x+1)(x-1) \end{aligned}\right\} \quad 分解因式$$

557

$$\text{LCM}=5x(x+1)(x+1)(x-1)$$

■

有理式(rational expression)是多项式之比. 下面每一个都是有理式：

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-4}, \quad \frac{x-2}{x-3}, \quad \frac{a+7}{a^2-16}, \quad \frac{5}{5t-15}.$$

有理方程(rational equation)是包含一个或多个有理式的方程. 这里是一些例子：

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=\frac{1}{x}, \quad x+\frac{6}{x}=5, \quad \frac{2x}{x-3}-\frac{6}{x}=\frac{18}{x^2-3x}.$$

为了解有理方程，首先用所有分母的 LCM 乘以方程两边以去掉方程中的分式. 所得的方程可能有些解不是原方程的解，因此必须在原方程中检查所有可能的解.

例 15 解 $\frac{2x}{x-3}-\frac{6}{x}=\frac{18}{x^2-3x}$.

解 分母的 LCM 是 $x(x-3)$. 乘以 $x(x-3)$.

$$x(x-3)\left(\frac{2x}{x-3}-\frac{6}{x}\right)=x(x-3)\left(\frac{18}{x^2-3x}\right) \qquad 在两边乘以 LCM$$

$$x(x-3)\cdot\frac{2x}{x-3}-x(x-3)\cdot\frac{6}{x}=x(x-3)\left(\frac{18}{x^2-3x}\right) \qquad 去括号相乘$$

$$2x^2-6(x-3)=18$$

$$2x^2-6x+18=18 \qquad 化简$$

$$2x^2-6x=0$$

$$2x(x-3)=0$$

$$2x=0 \quad 或 \quad x-3=0$$

$$x=0 \quad 或 \quad x=3$$

数 0 和 3 可能是解. 考察原方程，看到它们都使得一个分母是 0. 我们也可进行如下的检验.

检验：

对于 0：

$$\frac{2x}{x-3}-\frac{6}{x}=\frac{18}{x^2-3x}$$

$$\frac{2(0)}{0-3}-\frac{6}{0} \ ? \ \frac{18}{0^2-3(0)}$$

$$0-\frac{6}{0} \ \Big| \ \frac{18}{0} \qquad 无意义；错误$$

对于 3：

$$\frac{2x}{x-3}-\frac{6}{x}=\frac{18}{x^2-3x}$$

$$\frac{2(3)}{3-3}-\frac{6}{3} \ ? \ \frac{18}{3^2-3(3)}$$

$$\frac{6}{0}-2 \ \Big| \ \frac{18}{0} \qquad 无意义；错误$$

方程没有解.

■

558

例 16 解 $\frac{x^2}{x-2}=\frac{4}{x-2}$.

解 分母的 LCM 是 $x-2$. 乘以 $x-2$.

$$(x-2)\cdot\frac{x^2}{x-2}=(x-2)\cdot\frac{4}{x-2}$$

$$x^2=4 \qquad 化简$$

$$x^2-4=0$$

$$(x+2)(x-2)=0$$

$$x=-2 \quad 或 \qquad\qquad 使用零积原理$$

2007/08/16

检验：

对于 2：

$$\begin{array}{c|c} \frac{x^2}{x-2} & \frac{4}{x-2} \\ \hline \frac{2^2}{2-2} \ ? & \frac{4}{2-2} \\ \frac{4}{0} & \frac{4}{0} \end{array} \quad \text{无意义；错误}$$

对于 −2：

$$\begin{array}{c|c} \frac{x^2}{x-2} & \frac{4}{x-2} \\ \hline \frac{(-2)^2}{-2-2} \ ? & \frac{4}{-2-2} \\ \frac{4}{-4} & \frac{4}{-4} \\ -1 & -1 \end{array} \quad \text{正确}$$

■

数 −2 是一个解，但 2 不是(它导致以 0 作除数).

解不等式

两个不等式**等价**，指的是它们有相同的解. 例如，不等式 $x>4$ 和 $4<x$ 等价. 解不等式的原理类似于解方程. 我们可以在不等式的两边加上相同的数，也可以用同一个非零数乘以两边，但是如果那个数是负的，不等号必须改变方向. 下面是不等式求解原理.

不等式求解原理

对于任意实数 a，b 和 c，

$$a<b \quad \text{等价于} \quad a+c<b+c.$$

对于任意实数 a，b 和任意正数 c，

$$a<b \quad \text{等价于} \quad ac<bc.$$

对于任意实数 a，b 和任意负数 c，

$$a<b \quad \text{等价于} \quad ac>bc.$$

559 对于≤和≥，类似的结果也成立.

例 17 解 $17-8x\geqslant 5x-4$.

解 我们有

$$\begin{aligned} 17-8x &\geqslant 5x-4 \\ -8x &\geqslant 5x-21 && \text{加} -17 \\ -13x &\geqslant -21 && \text{加} -5x \\ -\frac{1}{13}(-13x) &\leqslant -\frac{1}{13}(-21) && \text{乘} -\frac{1}{13} \text{且不等号改变方向} \\ x &\leqslant \frac{21}{13}. \end{aligned}$$

任何小于或等于$\frac{21}{13}$的数都是解. ■

应用

为了解应用问题，首先要转化成数学语言，通常是一个方程. 然后解方程并检验是否是方程的解，是否是应用问题的解.

例 18 生命科学：体重增长. 一只动物在体重增长 5% 之后是 693 磅. 它原来的体重是多少？

解 首先转化成一个方程：

$$\underbrace{(\text{原来体重})}_{w} + 5\% \underbrace{(\text{原来体重})}_{w} = 693$$

现在解方程：

$$\begin{aligned} w+5\%w &= 693 \\ 1\cdot w+0.05w &= 693 \\ (1+0.05)w &= 693 \\ 1.05w &= 693 \\ w &= \frac{693}{1.05}=660. \end{aligned}$$

检验：

$$660+5\%\times 660=660+0.05\times 660=660+33=693.$$

动物原来的体重是 660 磅. ■

例 19 商业：总销售额. Raggs 服装有限公司测定，销售 x 套服装所获得的总收益(以美元计)为

$$200x+50.$$

试确定，为了确保总收益超过 70 050 美元，公司必须销售的服装数量.

解 我们把问题转化成一个不等式，并求解：

$$\begin{aligned} 200x+50 &> 70\,050 \\ 200x &> 70\,000 && \text{加} -50 \\ x &> 350. && \text{乘以}\frac{1}{200} \end{aligned}$$

于是当销售服装超过 350 套时，公司总收益将超过 70 050 美元. ■ 560

习题

不用指数表示下列各式.

1. 5^3　2. 7^2　3. $(-7)^2$
4. $(-5)^3$　5. $(1.01)^2$　6. $(1.01)^3$
7. $\left(\frac{1}{2}\right)^4$　8. $\left(\frac{1}{4}\right)^3$　9. $(6x)^0$
10. $(6x)^1$　11. t^1　12. t^0
13. $\left(\frac{1}{3}\right)^0$　14. $\left(\frac{1}{3}\right)^1$

不用负指数表示下列各式.

15. 3^{-2}　16. 4^{-2}
17. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$　18. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$
19. 10^{-1}　20. 10^{-4}　21. e^{-b}
22. t^{-k}　23. b^{-1}　24. h^{-1}

相乘.

25. $x^2\cdot x^3$　26. $t^3\cdot t^4$
27. $x^{-7}\cdot x$　28. $x^5\cdot x$
29. $5x^2\cdot 7x^3$　30. $4t^3\cdot 2t^4$
31. $x^{-4}\cdot x^7\cdot x$　32. $x^{-3}\cdot x\cdot x^3$
33. $e^{-t}\cdot e^t$　34. $e^t\cdot e^{-t}$

相除.

35. $\frac{x^5}{x^2}$　36. $\frac{x^7}{x^3}$　37. $\frac{x^2}{x^5}$
38. $\frac{x^3}{x^7}$　39. $\frac{e^k}{e^k}$　40. $\frac{t^6}{t^8}$

2007/08/16

41. $\frac{e^3}{e^4}$ 42. $\frac{e^4}{e^3}$ 43. $\frac{t^6}{t^{-8}}$

44. $\frac{t^5}{t^{-7}}$ 45. $\frac{t^{-9}}{t^{-11}}$ 46. $\frac{t^{-11}}{t^{-7}}$

47. $\frac{ab(a^2b)^3}{ab^{-1}}$ 48. $\frac{x^2y^3(xy^3)^2}{x^{-3}y^2}$

化简.

49. $(t^{-2})^3$ 50. $(t^{-3})^4$

51. $(e^x)^4$ 52. $(e^x)^2$

53. $(2x^2y^4)^3$ 54. $(2x^2y^4)^5$

55. $(3x^{-2}y^{-5}z^4)^{-4}$ 56. $(5x^3y^{-7}z^{-2})^{-3}$

57. $(-3x^{-8}y^7z^2)^2$ 58. $(-5x^4y^{-5}z^{-3})^4$

59. $\left(\frac{cd^3}{2q^2}\right)^4$ 60. $\left(\frac{4x^2y}{a^3b^3}\right)^3$

相乘.

61. $5(x-7)$ 62. $x(1+t)$

63. $(x-5)(x-2)$ 64. $(x-4)(x-3)$

65. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

66. $(x^2-xy+y^2)(x+y)$

67. $(2x+5)(x-1)$ 68. $(3x+4)(x-1)$

69. $(a-2)(a+2)$ 70. $(3x-1)(3x+1)$

71. $(5x+2)(5x-2)$ 72. $(t-1)(t+1)$

73. $(a-h)^2$ 74. $(a+h)^2$

75. $(5x+t)^2$ 76. $(7a-c)^2$

77. $5x(x^2+3)^2$

78. $-3x^2(x^2-4)(x^2+4)$

对于 79~82 题使用下面公式(式 5).

$$\begin{aligned}(x+h)^3 &= (x+h)(x+h)^2 \\ &= (x+h)(x^2+2xh+h^2) \\ &= (x+h)x^2+(x+h)2xh+(x+h)h^2 \\ &= x^3+x^2h+2x^2h+2xh^2+xh^2+h^3 \\ &= x^3+3x^2h+3xh^2+h^3 \qquad (5)\end{aligned}$$

79. $(a+b)^3$ 80. $(a-b)^3$

81. $(x-5)^3$ 82. $(2x+3)^3$

分解因式.

83. $x-xt$ 84. $x+xh$

85. $x^2+6xy+9y^2$ 86. $x^2-10xy+25y^2$

87. $x^2-2x-15$ 88. $x^2+8x+15$

89. x^2-x-20 90. $x^2-9x-10$

91. $49x^2-t^2$ 92. $9x^2-b^2$

93. $36t^2-16m^2$ 94. $25y^2-9z^2$

95. $a^3b-16ab^3$ 96. $2x^4-32$

97. a^8-b^8 98. $36y^2+12y-35$

99. $10a^2x-40b^2x$ 100. $x^3y-25xy^3$

101. $2-32x^4$ 102. $2xy^2-50x$

103. $9x^2+17x-2$ 104. $6x^2-23x+20$

105. x^3+8(提示：参见 66 题.)

106. a^3-27b^3(提示：参见 65 题.)

107. y^3-64t^3

108. $m^3+1\,000p^3$

109. $3x^3-6x^2-x+2$

110. $5y^3+2y^2-10y-4$

111. $x^3-5x^2-9x+45$

112. $t^3+3t^2-25t-75$

解下列各题.

113. $-7x+10=5x-11$

114. $-8x+9=4x-70$

115. $5x-17-2x=6x-1-x$

116. $5x-2+3x=2x+6-4x$

117. $x+0.8x=216$

118. $x+0.5x=210$

119. $x+0.08x=216$

120. $x+0.05x=210$

121. $2x(x+3)(5x-4)=0$

122. $7x(x-2)(2x+3)=0$

123. $x^2+1=2x+1$

124. $2t^2=9+t^2$

125. $t^2-2t=t$

126. $6x-x^2=x$

127. $6x-x^2=-x$

128. $2x-x^2=-x$

129. $9x^3=x$

130. $16x^3=x$

131. $(x-3)^2=x^2+2x+1$

132. $(x-5)^2=x^2+x+3$

133. $\frac{4x}{x+5}+\frac{20}{x}=\frac{100}{x^2+5x}$

134. $\frac{x}{x+1}+\frac{3x+5}{x^2+4x+3}=\frac{2}{x+3}$

135. $\frac{50}{x}-\frac{50}{x-2}=\frac{4}{x}$

136. $\frac{60}{x}=\frac{60}{x-5}+\frac{2}{x}$

137. $0=2x-\frac{250}{x^2}$

138. $5-\frac{35}{x^2}=0$

139. $3-x\leqslant 4x+7$ 140. $x+6\leqslant 5x-6$

141. $5x-5+x>2-6x-8$

142. $3x-3+3x>1-7x-9$

143. $-7x<4$

144. $-5x\geqslant 6$

145. $5x+2x\leqslant -21$

146. $9x+3x\geqslant -24$

147. $2x-7<5x-9$

148. $10x-3\geqslant 13x-8$

149. $8x-9<3x-11$

150. $11x-2\geqslant 15x-7$

151. $8<3x+2<14$

152. $2<5x-8\leqslant 12$

153. $3\leqslant 4x-3\leqslant 19$

154. $9\leqslant 5x+3<19$

155. $-7\leqslant 5x-2\leqslant 12$

156. $-11\leqslant 2x-1<-5$

应用

商业与经济

157. 投资增长. 一项投资，每年复利 $8\frac{1}{2}\%$. 到第 1 年的年底它增长到 705.25 美元. 试问初始投资是多少?

158. 投资增长. 一项投资，每年复利 7%. 到第 1 年的年底它增长到 856 美元. 试问初始投资是多少?

159. 总收益. 某厂商测定，销售某种产品 x 件的总收益(以美元计)是

$$3x+1\,000.$$

为了使它的总收益超过 22 000 美元，必须销售多少件产品?

160. 总收益. 某厂商测定，销售某种产品 x 件的总收益(以美元计)是

$$5x+1\,000.$$

为了使它的总收益超过 22 000 美元，必须销售多少件产品?

生命科学与物理学

161. 体重增长. 一只动物在体重增长 6% 之后是 508.8 磅. 它原来的体重是多少?

162. 体重增长. 一只动物在体重增长 7% 之后是 363.8 磅. 它原来的体重是多少?

社会科学

163. 人口增长. 某城市的人口在增长 2% 之后是 826 200 人. 试问它此前的人口是多少?

164. 人口增长. 某城市的人口在增长 3% 之后是 741 600 人. 试问它此前的人口是多少?

一般兴趣

165. 平均成绩[①]. 为了在某课程中获得一个 B，学生的平均分数必须超过或等于 80%(至少 80%)且少于 90%. 在最初的三次测验中，某个学生获得了 78%，90% 和 92%. 试确定可保证获得一个 B 的第四次测验的分数.

166. 平均成绩. 为了在某课程中获得一个 C，学生的平均分数必须超过或等于 70% 且少于 80%. 在最初的三次测验中，某个学生获得了 65%，83% 和 82%. 试确定可保证获得一个 C 的第四次测验的分数. 561～562

① 在美国，大部分学校平均成绩计算方法是采取 4 分制的，即 A=4，B=3，C=2，D=1. ——编辑注

2007/08/16

表

表 1　积分公式（也可看 www.integrals.com）

（只要用到 $\ln x$，都假设 $x>0$。）

1. $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C$

3. $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$

4. $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

5. $\int \mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot \mathrm{e}^{ax} + C$

6. $\int x\mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2} \cdot \mathrm{e}^{ax}(ax-1) + C$

7. $\int x^n \mathrm{e}^{ax} \mathrm{d}x = \frac{x^n \mathrm{e}^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x + C$

8. $\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$

9. $\int (\ln x)^n \mathrm{d}x = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x + C, n \neq -1$

10. $\int x^n \ln x \mathrm{d}x = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C, n \neq -1$

11. $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C$

14. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$

15. $\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$

16. $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right) + C$

17. $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C,$

$0 < x < a$

18. $\int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2} + \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b) + C$

19. $\int \frac{x}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(ax+b) + C$

20. $\int \frac{1}{x(ax+b)}\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right) + C$

21. $\int \frac{1}{x(ax+b)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right) + C$

22. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})\right] + C$

23. $\int x\sqrt{a+bx}\mathrm{d}x = \frac{2}{15b^2}(3bx-2a)(a+bx)^{3/2} + C$

24. $\int x^2\sqrt{a+bx}\mathrm{d}x$

$= \frac{2}{105b^3}(15b^2x^2 - 12abx + 8a^2)(a+bx)^{3/2} + C$

25. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx} + C$

26. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{15b^3}(3b^2x^2 - 4abx + 8a^2)\sqrt{a+bx} + C$

563
~
564

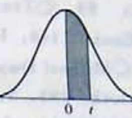
表 2　标准正态分布的面积

表中的值是在 $t=0$ 和 t 的正值之间曲线下的面积．由于曲线的对称性，在 $t=0$ 和 t 的负值之间曲线下的面积可用相似的方法求得．

面积 = 概率

$= P(0 \leqslant x \leqslant t)$

$= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$



t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.000 0	0.004 0	0.008 0	0.012 0	0.016 0	0.019 9	0.023 9	0.027 9	0.031 9	0.035 9
0.1	0.039 8	0.043 8	0.047 8	0.051 7	0.055 7	0.059 6	0.063 6	0.067 5	0.071 4	0.075 3
0.2	0.079 3	0.083 2	0.087 1	0.091 0	0.094 8	0.098 7	0.102 6	0.106 4	0.110 3	0.114 1
0.3	0.117 9	0.121 7	0.125 5	0.129 3	0.133 1	0.136 8	0.140 6	0.144 3	0.148 0	0.151 7
0.4	0.155 4	0.159 1	0.162 8	0.166 4	0.170 0	0.173 6	0.177 2	0.180 8	0.184 4	0.187 9
0.5	0.191 5	0.195 0	0.198 5	0.201 9	0.205 4	0.208 8	0.212 3	0.215 7	0.219 0	0.222 4
0.6	0.225 7	0.229 1	0.232 4	0.235 7	0.238 9	0.242 2	0.245 4	0.248 6	0.251 7	0.254 9
0.7	0.258 0	0.261 1	0.264 2	0.267 3	0.270 4	0.273 4	0.276 4	0.279 4	0.282 3	0.285 2
0.8	0.288 1	0.291 0	0.293 9	0.296 7	0.299 5	0.302 3	0.305 1	0.307 8	0.310 6	0.313 3
0.9	0.315 9	0.318 6	0.321 2	0.323 8	0.326 4	0.328 9	0.331 5	0.334 0	0.336 5	0.338 9
1.0	0.341 3	0.343 8	0.346 1	0.348 5	0.350 8	0.353 1	0.355 4	0.357 7	0.359 9	0.362 1
1.1	0.364 3	0.366 5	0.368 6	0.370 8	0.372 9	0.374 9	0.377 0	0.379 0	0.381 0	0.383 0
1.2	0.384 9	0.386 9	0.388 8	0.390 7	0.392 5	0.394 4	0.396 2	0.398 0	0.399 7	0.401 5
1.3	0.403 2	0.404 9	0.406 6	0.408 2	0.409 9	0.411 5	0.413 1	0.414 7	0.416 2	0.417 7
1.4	0.419 2	0.420 7	0.422 2	0.423 6	0.425 1	0.426 5	0.427 9	0.429 2	0.430 6	0.431 9
1.5	0.433 2	0.434 5	0.435 7	0.437 0	0.438 2	0.439 4	0.440 6	0.441 8	0.442 9	0.444 1
1.6	0.445 2	0.446 3	0.447 4	0.448 4	0.449 5	0.450 5	0.451 5	0.452 5	0.453 5	0.454 5
1.7	0.455 4	0.456 4	0.457 3	0.458 2	0.459 1	0.459 9	0.460 8	0.461 6	0.462 5	0.463 3
1.8	0.464 1	0.464 9	0.465 6	0.466 4	0.467 1	0.467 8	0.468 6	0.469 3	0.469 9	0.470 6
1.9	0.471 3	0.471 9	0.472 6	0.473 2	0.473 8	0.474 4	0.475 0	0.475 6	0.476 1	0.476 7
2.0	0.477 2	0.477 8	0.478 3	0.478 8	0.479 3	0.479 8	0.480 3	0.480 8	0.481 2	0.481 7
2.1	0.482 1	0.482 6	0.483 0	0.483 4	0.483 8	0.484 2	0.484 6	0.485 0	0.485 4	0.485 7
2.2	0.486 1	0.486 4	0.486 8	0.487 1	0.487 5	0.487 8	0.488 1	0.488 4	0.488 7	0.489 0
2.3	0.489 3	0.489 6	0.489 8	0.490 1	0.490 4	0.490 6	0.490 9	0.491 1	0.491 3	0.491 6
2.4	0.491 8	0.492 0	0.492 2	0.492 5	0.492 7	0.492 9	0.493 1	0.493 2	0.493 4	0.493 6
2.5	0.493 8	0.494 0	0.494 1	0.494 3	0.494 5	0.494 6	0.494 8	0.494 9	0.495 1	0.495 2
2.6	0.495 3	0.495 5	0.495 6	0.495 7	0.495 9	0.496 0	0.496 1	0.496 2	0.496 3	0.496 4
2.7	0.496 5	0.496 6	0.496 7	0.496 8	0.496 9	0.497 0	0.497 1	0.497 2	0.497 3	0.497 4
2.8	0.497 4	0.497 5	0.497 6	0.497 7	0.497 7	0.497 8	0.497 9	0.497 9	0.498 0	0.498 1
2.9	0.498 1	0.498 2	0.498 2	0.498 3	0.498 4	0.498 4	0.498 5	0.498 5	0.498 6	0.498 6
3.0	0.498 7	0.498 7	0.498 7	0.498 8	0.498 8	0.498 9	0.498 9	0.498 9	0.499 0	0.499 0

565

2007/08/16

照片来源

1[⊖]，©Peter Steiner/Corbis　24，©Fotos International/Archive Photos　43，©James P. Blair，©2000 PhotoDisc，Inc.　46，Emma Lee/Life file，©2000 PhotoDisc，Inc.　53，Photo Link/©2000 PhotoDisc，Inc.　68，Photo Link/©2000 PhotoDisc，Inc.　73，©Susan Lapides　77，Jeff Greenberg/Archive Photos　80，Don Tremain，©2000 PhotoDisc，Inc.　89，Doug Menuez，©2000 PhotoDisc，Inc.　91，©Duomo/Corbis　93，©Taxi　101，Corbis　113，Corbis/Digital Stock　123，Campolungo，The Image Bank　148，Rick Haston，Latent Images　149，StockTrek/©2000 photoDisc，Inc.　154，©Michael Dwyer，Stock Boston　156，©Paul McCormick，The Image Bank　167，Brian Spurlock　181，Steve Cole/©2000 PhotoDisc，Inc.　183，AP/Feature Photo　185，© John Wilkes/Corbis　215，Don Smetzer，© Tony Stone，Worldwide　233，PhotoLink/PhotoDisc，Inc.　264，Kaz Cluba/PhotoDisc，Inc.　277，Teri J. McDermott/Phototake　283，Photo Link/PhotoDisc，Inc.　284 顶部，© Tom Walker，Stock Boston　284 底部，Andy and Sandy Carey，PhotoDisc，Inc.　285，© Fotos International/Archive Photos，reprinted with permission of Twentieth Century Fox　318，Photo Link/PhotoDisc，Inc.　321，Bruce Coleman，Inc.　322，Nick Koudis，PhotoDisc，Inc.　325，© Bob Daemmrich，Stock Boston　326，© Corbis Sygma　328，© Kevin Horan，Stock Boston　329，The Bridgeman Art Library　331，Corbis　336，© SuperStock　343，Corbis/Digital Stock　349，© Peter Menzel，Stock Boston　351，© Rick Browne，Stock Boston　360，© Rueters NewMedia Inc. /Corbis　361 左，© Rueters NewMedia Inc. /Corbis　361 右，©Rueters NewMedia Inc. /Corbis　362，© Corbis Sygma　363，Digital Art/Corbis　372，John A. Rizzo，PhotoDisc，Inc.　387，John A. Rizzo，PhotoDisc，Inc.　398，Photo Link，PhotoDisc，Inc.　399，credit unknown　433，© Michael Greco，Stock Boston　444，Bruce Coleman，Inc.　455，Bruce Coleman，Inc.　463，Mark Downy，Photo Disc，Inc.　465，CMCD © 2000 PhotoDisc，Inc.　476，Rick Haston，Latent Images　479，David Simson，Stock Boston　481，Corbis/Digital Stock　483，UPI/Bettman News Photos　495，© Patrik Giardino/Corbis　497，Rickard Pasley，Stock Boston　498，Corbis　502，Corbis　503，Digital Stock　509，Jules Frazier，PhotoDisc，Inc.　514，Rick Haston，Latent Images　515，Rick Haston，Latent Images　529，© Reuters NewMedia Inc. /Corbis　530，Reuters/Philippe Wojazer/Archive Photos　536，Mike Boren，© The Image Bank　537，Jack Star，Photo Link，PhotoDisc，Inc.　545，© Sam Sweezy，Stock Boston.

⊖ 该页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致.

答　案

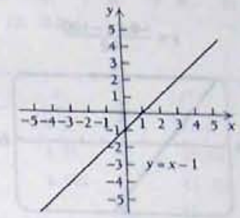
第 1 章

上机技术演练，p. 8[⊖]

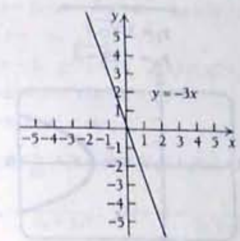
1～20. 留给学生.

习题 1.1，p. 13

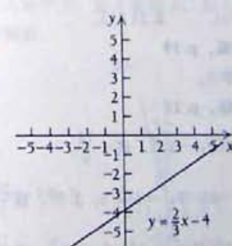
1.



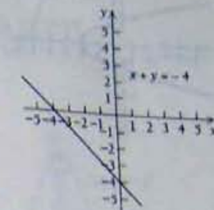
3.



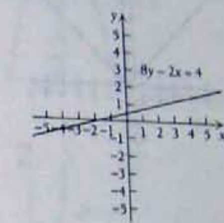
5.



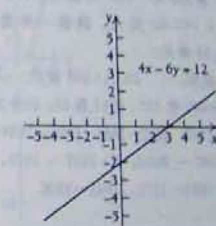
7.



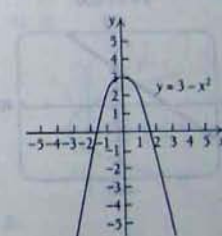
9.



11.



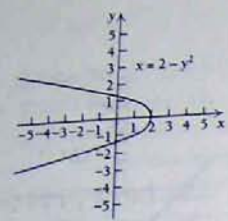
13.



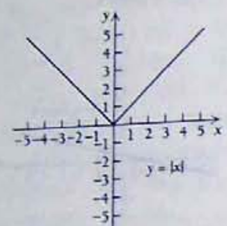
⊖ 这是指英文原书页码，与书中页边标注的页码一致. ——编辑注

2007/08/16

15.



17.



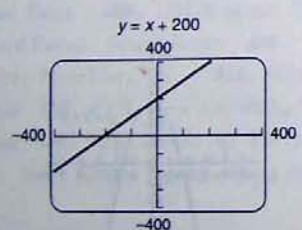
19. a)1 060 美元；b)1 060.90 美元；c)1 061.36 美元；d)1 061.83 美元，假设一年是 365 天；e)1 061.84 美元.

21. 578.70 美元.　　23. 112 351 美元.

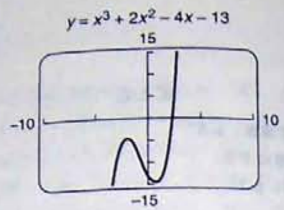
25. a)每 100 000 名 325；b)67 和 88；c)约为 79.

27. a)1800～1858，1862～1888，1900～1937，1957～1984，1987～2000；b)1937～1957，1984～1987；c)1858～1862，1888～1900.

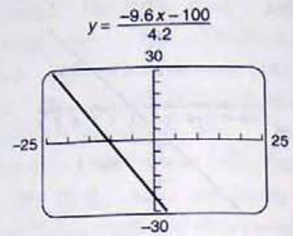
29.



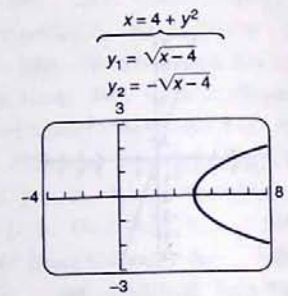
31.



33.



35.



上机技术演练，p. 18

1. 951；42 701.　　2. 21 813.

上机技术演练，p. 19

1～2. 留给学生.

上机技术演练，p. 21

1. 6；3.99；150；$-1.\dot{5}$，或$-\frac{14}{9}$.

2. -21.3；-18.39；-117.3；$3.2\dot{5}$，或$\frac{293}{90}$.

3. -75；-65.466；-420.6；$1.6\dot{8}$，或$\frac{76}{45}$.

上机技术演练，p. 23

1～3. 留给学生.

上机技术演练，p. 25

1. (−2.872 34，−8.336 082)，(−2.234 043，1.020 226 7)，(0，1)，(0.957 446 81，−2.909 538)，(2.553 191 5，4.877 753 5)；答案可不同.

习题 1.2，p. 26

1. 是.　3. 不是.　5. 是.　7. 是.　9. 不是.

11. 是.　13. 不是.

15. a)

x	$f(x)$
4.1	11.2
4.01	11.02
4.001	11.002
4	11

b) $f(5)=13$，$f(-1)=1$，$f(k)=2k+3$，$f(1+t)=2t+5$，$f(x+h)=2x+2h+3$.

17. $g(-1)=-2$，$g(0)=-3$，$g(1)=-2$，$g(5)=22$，$g(u)=u^2-3$，$g(a+h)=a^2+2ah+h^2-3$，$g(1-h)=h^2-2h-2$.

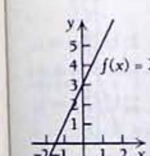
19. a) $f(4)=\frac{1}{49}$，$f(-3)$不存在，$f(0)=\frac{1}{9}$，

$f(a)=\frac{1}{(a+3)^2}$，$f(t+1)=\frac{1}{(t+4)^2}$，

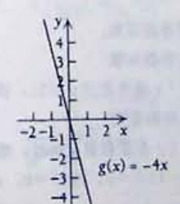
$f(t+3)=\frac{1}{(t+6)^2}$，$f(x+h)=\frac{1}{(x+h+3)^2}$.

b)取输入的平方，加 6 乘输入，加 9，然后取结果的倒数.

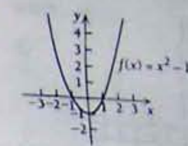
21.



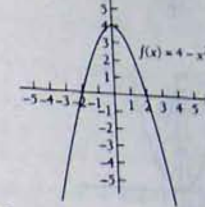
23.



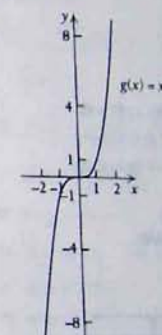
25.



27.



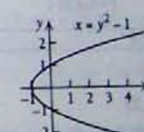
29.



31. 是.　33. 是.　35. 不是.　37. 不是.

39. 是.　41. 是.

43. a)

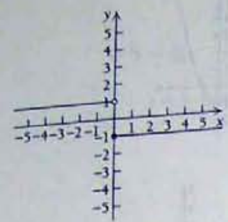


b)不是.

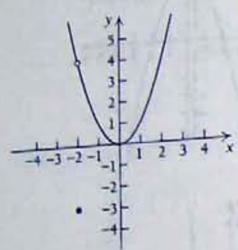
2007/08/16

45. $f(x+h)=x^2+2xh+h^2-3x-3h$.

47.



49.



51. 26.81 美元；35.15 美元.

53. a)40 百万美元；b)第 6 周；c)第 3 周.

55. a)$1.818m^2$；b)$2.173m^2$；c)$1.537m^2$.

57. a)是的，每个事件都有一个影响系数.

b)事件；影响系数.

59. $y=\pm\sqrt{\frac{x+5}{2}}$；不是一个函数.

61. $y=2\sqrt[3]{x}$；是一个函数.

65.

X	Y1	
−3	.6	
−2	ERROR	
−1	−1	
0	−.75	
1	−1	
2	ERROR	
3	.6	
X = −3		

67. 留给学生.

上机技术演练，p.35

1. 定义域 = 所有的实数；值域 $=[-7, \infty)$.
2. 定义域 = 所有的实数；值域 = 所有的实数.
3. 定义域 $=(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$；

值域 $=(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$.

4. 定义域 = 所有的实数；值域 $=[-8, \infty)$.
5. 定义域 $=[-4, \infty)$；值域 $=[0, \infty)$.
6. 定义域 $=[-3, 3]$；值域 $=[0, 3]$.
7. 定义域 $=[-3, 3]$；值域 $=[-3, 0]$.
8. 定义域 = 所有的实数；值域 = 所有的实数.

习题 1.3，p.37

1. $(0, 5)$.　3. $[-9, -4)$.　5. $[x, x+h]$.

7. (p, ∞).　9. $[-3, 3]$.　11. $[-14, -11)$.

13. $(-\infty, -4]$.　15. $(-2, 3]$.

17. $(-\infty, 12.5)$.

19. a)1；　b)$\{-3, -1, 1, 3, 5\}$；

c)3；　d)$\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

21. a)4；　b)$\{-5, -3, 1, 2, 3, 4, 5\}$；

c)$-5, -3, 4$；　d)$\{-3, 2, 4, 5\}$.

23. a)$2\frac{2}{3}$；b)$[-2, 3]$；c)$1\frac{3}{4}$；d)$[1, 5]$.

25. a)-2；b)$[-4, 2]$；c)-2；d)$[-3, 3]$.

27. a)3；b)$[-3, 3]$；

c)$-1\frac{2}{5}$，$1\frac{2}{5}$；d)$[-5, 4]$.

29. a)-1；b)$[-6, 5]$；

c)$-4, 0, 3$；d)$[-2, 2]$.

31. $\{x \mid x$ 是实数且 $x\neq 5\}$，或 $(-\infty, 5)\cup(5, \infty)$.

33. 所有的实数.　35. 所有的实数.

37. $\left\{x \mid x\text{ 是实数且 } x\neq -\frac{4}{3}\right\}$，或

$\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$.

39. 所有的实数.

41. $\left\{x \mid x\text{ 是实数且 } x\neq \frac{7}{4}\right\}$，或

$\left(-\infty, \frac{7}{4}\right)\cup\left(\frac{7}{4}, \infty\right)$.

43. $\left\{x \mid x\geqslant -\frac{4}{5}\right\}$，或 $\left[-\frac{4}{5}, \infty\right)$.

45. 所有的实数.

47. 所有的实数.

49. $\{x \mid x$ 是实数且 $x\neq 2\}$，或 $(-\infty, 2)\cup(2, \infty)$.

51. 所有的实数.

53. $\{x \mid x$ 是实数且 $x\neq 2\}$，或 $(-\infty, 2)\cup(2, \infty)$.

55. $f(-1)=-8$，$f(0)=0$，$f(1)=-2$.

57. a)$A(i)=10\,000\left(1+\frac{i}{2}\right)^{16}$；b)所有正实数.

59. a)$[0, 70]$；b)$[4, 75]$.

65. 33 题：所有的实数；36 题：$[3, \infty)$；48 题：所有的实数；51 题：$[1, \infty)$；52 题：$[0, \infty)$.

上机技术演练，p.41

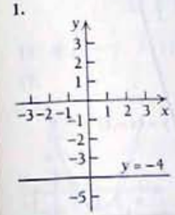
1. 直线从左到右向上倾斜，在点 (0,1) 与 y 轴相交，而且比 $y=10x+1$ 更陡.
2. 直线从左到右向上倾斜，通过原点，而且不如 $y=\frac{2}{31}x$ 陡.
3. 直线从左到右向下倾斜，通过原点，而且比 $y=-10x$ 更陡.
4. 直线从左到右向下倾斜，在点 $(0, -1)$ 与 y 轴相交，而且不如 $y=-\frac{5}{32}x-1$ 陡.

上机技术演练，p.44

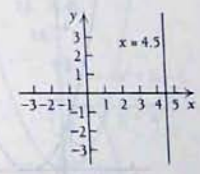
1. y_2 的图形是 y_1 的图形向上移动 3 个单位，而且 y_2 有 y 截距 $(0, 3)$. y_3 的图形是 y_1 的图形向下移动 4 个单位，而且 y_3 有 y 截距 $(0, -4)$. $y=x-5$ 的图形是 $y=x$ 的图形向下移动 5 个单位，而且 $y=x-5$ 有 y截距 $(0, -5)$. 所有的直线都平行.
2. 对于任何的 x 值，y_2 的值都比 y_1 的值多 3 而 y_3 的值比 y_1 的值少 4.

习题 1.4，p.51

1.

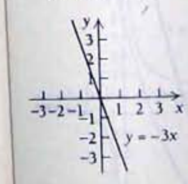


3.



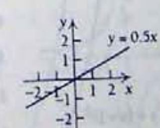
5. $m=-3$，

y 截距：$(0, 0)$



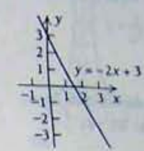
7. $m=0.5$，

y 截距：$(0, 0)$



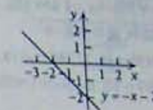
9. $m=-2$，

y 截距：$(0, 3)$



11. $m=-1$，

y 截距：$(0, -2)$



13. $m=-2$，y 截距：$(0, 2)$.

15. $m=-1$，y 截距：$\left(0, -\frac{5}{2}\right)$.

17. $m=\frac{1}{2}$，y 截距：$(0, -4)$.

19. $y+5=-5(x-1)$，或 $y=-5x$.

21. $y-3=-2(x-2)$，或 $y=-2x+7$.

23. $y-0=2(x-3)$，或 $y=2x-6$.

25. $y=\frac{1}{2}x-6$.　27. $y=3$.　29. $\frac{3}{2}$.　31. $-\frac{3}{34}$.

33. 没有斜率.　35. 0.　37. 3.　39. 2.

41. $y-1=\frac{3}{2}(x+2)$，或 $y+2=\frac{3}{2}(x+4)$，或 $y=\frac{3}{2}x+4$.

43. $y-\frac{1}{2}=-\frac{3}{34}\left(x-\frac{2}{5}\right)$，或 $y-\frac{4}{5}=-\frac{3}{34}(x+3)$，或 $y=-\frac{3}{34}x+\frac{91}{170}$.

45. $x=3$.　47. $y=3$.　49. $y=3x$.　51. $y=2x+3$.

53. $\frac{2}{25}$，或 8%.　55. 3.5%.

57. 每年 100 美元.

59. a)$A=P+8\%P=P+0.08P=1.08P$；

b)108 美元；c)240 美元.

61. a)$C(x)=20x+100\,000$；b)$R(x)=45x$；

c)$P(x)=R(x)-C(x)=25x-100\,000$；

d)3 650 000 美元，利润；e)4 000.

63. a)$C(x)=x+250$；

b)$R(x)=10x$. 学生每块草坪收费 10 美元；

c)28.

65. 25 200 美元.

67. a)$R=4.17T$；b)$R=25:02$.

69. a)$B(W)=0.025W$；b)$B=2.5\%W$，头的重量是身体重量的 2.5%；c)3 磅.

2007/08/16

71. a) $D(0^\circ)=115$ 英尺，$D(-20^\circ)=75$ 英尺，$D(10^\circ)=135$ 英尺，$D(32^\circ)=179$ 英尺.

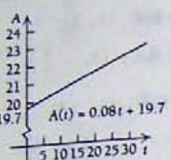
73. a) 145.78cm；b) 142.98cm.

75. a) $y=701.5x-1\,400\,425.5$；

b) 2 574 或 2 575.

77. a) $A(0)=19.7$，$A(1)=19.78$，$A(10)=20.5$，$A(30)=22.1$，$A(50)=23.7$；b) 23.94；

c)



81. 留给学生，答案可以不同.

上机技术演练，p. 57

1~2. 留给学生.

上机技术演练，p. 59

1. a) (2，0) 和 (4，0)；b) 2，4；

c) $f(x)=x^2-6x+8$ 的 x 截距的 x 坐标是 $x^2-6x+8=0$ 的解.

上机技术演练，p. 61

1. −5，2. 2. −4，6. 3. −2，1.

4. −1.414 214，0，1.414 214. 5. 0，700.

6. −2.079 356，0.462 955 43，3.116 400 4.

7. −3.095 574，−0.646 083 8，0.646 083 82，3.095 573 6.

8. −1，1. 9. −2，−1.414 214，1，1.414 214.

10. −3，−1，2，3.

11. −0.387 425 9，1.720 759 2.

12. 6.132 93.

上机技术演练，p. 64

1~8. 留给学生.

9. 如果使用 ZOOM 4 (ZDecimal) 和 [−9.4，9.4，−3.1，9.3]，"空圆点"显然会出现.

上机技术演练，p. 65

1~2. 留给学生.

上机技术演练，p. 67

1. 定义域 $=[0,\infty)$；值域 $=[0,\infty)$.

2. 定义域 $=[-2,\infty)$；值域 $=[0,\infty)$.

3. 定义域 $=(-\infty,\infty)$；值域 $=(-\infty,\infty)$.

4. 定义域 $=(-\infty,\infty)$；值域 $=(-\infty,\infty)$.

5. 定义域 $=[1,\infty)$；值域 $=[0,\infty)$.

6. 定义域 $=(-\infty,\infty)$；值域 $=(-\infty,\infty)$.

7. 定义域 $=[-3,\infty)$；值域 $=[-\infty,5]$.

8. 定义域 $=(-\infty,\infty)$；值域 $=(-\infty,\infty)$.

9. 定义域 $=(-\infty,\infty)$；值域 $=[0,\infty)$.

10. 定义域 $=[0,\infty)$；值域 $=[0,\infty)$.

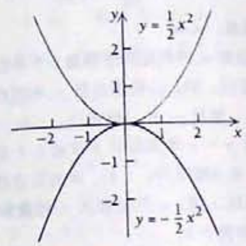
11. 不正确. 12. 正确.

上机技术演练，p. 71

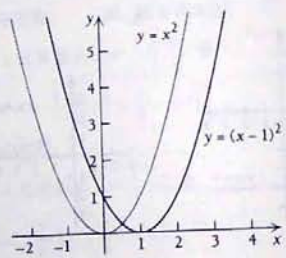
1. (14 266 美元)

习题 1.5，p. 71

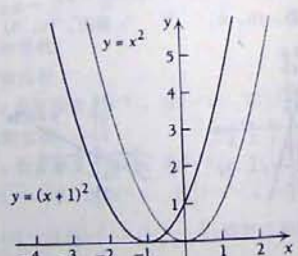
1.



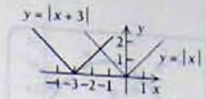
3.



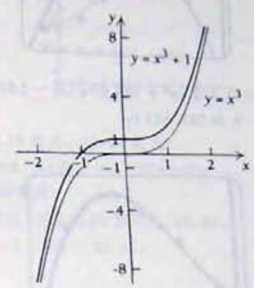
5.



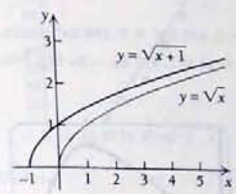
7.



9.

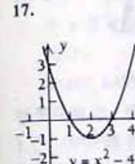


11.

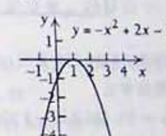


13. 是；(−2，−11). 15. 不是.

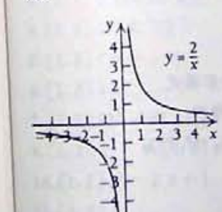
17.



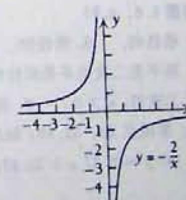
19.



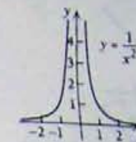
21.



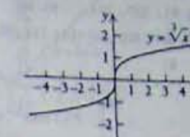
23.



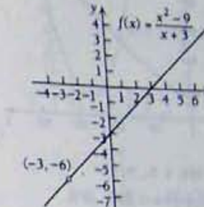
25.



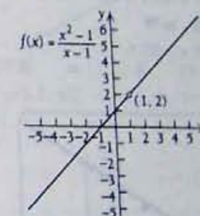
27.



29.



31.



33. $1\pm\sqrt{3}$. 35. $-3\pm\sqrt{10}$. 37. $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$.

39. $\frac{-4\pm\sqrt{10}}{3}$. 41. $\frac{-7\pm\sqrt{13}}{2}$. 43. $x^{3/4}$.

45. $a^{3/5}$. 47. $t^{1/2}$. 49. $t^{-4/3}$. 51. $t^{-3/2}$.

53. $(x^2+7)^{-1/2}$. 55. $\sqrt[5]{x}$. 57. $\sqrt[3]{y^2}$.

59. $\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$. 61. $\frac{1}{\sqrt[5]{b}}$. 63. $\frac{1}{\sqrt[4]{e^{3t}}}$.

65. $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$. 67. $\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$. 69. 27.

71. 16. 73. 8. 75. 除 5 之外的所有实数.

77. 除 2，3 之外的所有实数. 79. $\left[-\frac{4}{5},\infty\right)$.

81. (50，500). 83. (5，1). 85. (1，4).

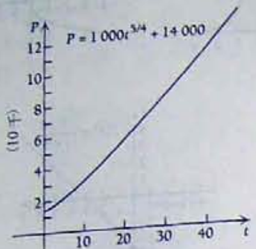
2007/08/16

87. (2, 3).　**89.** 81.57 美元.

91. 84；220；364.　**93.** 84.

95. a) 90 109；99 130；114 595；

b)



99. 2.359.　**101.** 1.5，9.5.

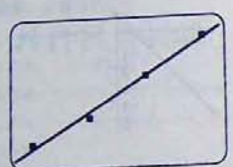
103. −2.646，2.646.　**105.** 没有.

107. −10.153，−1.871，−0.821，−0.303，0.098，0.535，1.219，3.297.

上机技术演练，p. 79

1. a) $y = 2.7x + 31.4$；

b)



c) 93.5.

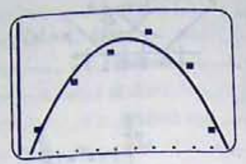
上机技术演练，p. 81

1. a) $y = -0.000\,05x^4 + 0.037\,6x^3 - 3.479\,2x^2 + 105.810\,8x - 916.689\,5$. 四次函数给出的拟合比二次函数要好，与三次函数相同；

b) 大多数活产出现在 15 到 45 岁之间的女性. 因为活产没有负数而且女性的活产年龄不会超过 45，所以选择[15，45]作为这个函数的定义域.

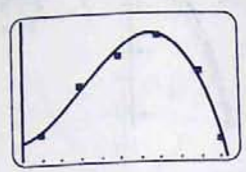
2. a) $y = -52.365\,1x^2 + 4\,533.459\,4x - 49\,405.137\,3$；

b)



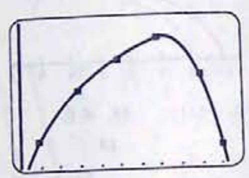
c) $y = -1.473\,4x^3 + 133.594\,6x^2 - 2\,669.837\,7x + 34\,218.423\,5$；

d)



e) $y = -0.056\,0x^4 + 7.998\,0x^3 - 436.184\,0x^2 + 11\,627.837\,6x - 90\,625.000\,1$；

f)



g) 四次；h) 30 555 美元；48 592 美元.

3. a) 留给学生；

b) $y = 93.285\,7x^2 - 1\,336x + 5\,460.828\,6$；

c) 每 100 000 名 3 162，每 100 000 名 743，每 100 000 名 1 429.

习题 1.6，p. 83

1. 线性的.　**3.** 线性的.

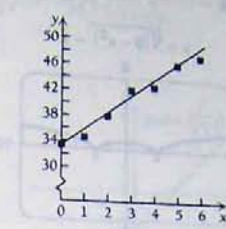
5. 既不是二次也不是线性的多项式.

7. 二次的，$a > 0$.　**9.** 线性的.

11. 采用点 (0，33.49) 和 (6，47.70)；

a) $y = 2.37x + 33.49$；

b)



c) 57.19 美元，69.04 美元.

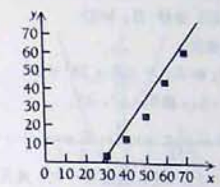
13. a) $y = 0.143\,75x^2 - 4.625x + 60$；

b) 188 英尺.

15. 采用点 (30，3.4) 和 (70，60.8)；

a) $y = 1.435x - 39.65$；

b)



c) 39.275%.

19. a) $y = -0.352x + 9.451$；b) 7.3%.

21. a) $y = 0.202x^3 - 2.887x^2 + 13.232x + 37.641$，其中 x 是 1990 年之后的年数，而 y 以 10 亿美元计；

b) 337.673×10 亿美元，763.481×10 亿美元.

概要与复习：第 1 章，p. 86

1. [1.1] a) 每 1 000 名 100；b) 20 和 30.

2. [1.1] 1 212.75 美元.

3. [1.1] 5 017.60 美元.

4. [1.3] (−6，1].

5. [1.3] (−∞，0).

6. [1.2] 13.

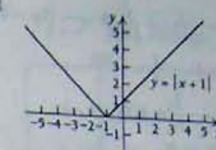
7. [1.2] $2h^2 + 3h + 4$.

8. [1.2] 3.　**9.** [1.2] 36.

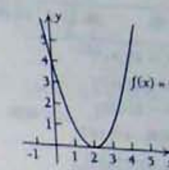
10. [1.2] $h^2 - 2h + 1$.

11. [1.2] 9.

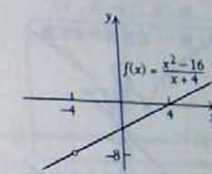
12. [1.1]



13. [1.2]



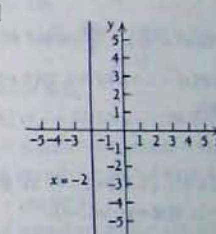
14. [1.2]



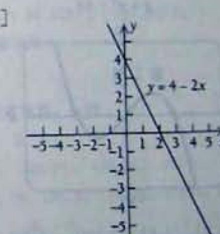
15. [1.2] 不是.　**16.** [1.2] 是.　**17.** [1.2] 是.

18. [1.3] a) 1，2；b) [−3，4]；c) −3；d) [−1，2].

19. [1.4]



20. [1.4]



2007/08/16

21. [1.4] $y=-\frac{7}{11}x+\frac{6}{11}$，或 $7x+11y=6$.

22. [1.4] $y=5x+\frac{2}{3}$.

23. [1.4] $m=-\frac{1}{6}$；y 截距：(0, 3).

24. [1.4] 每天 75 页.

25. [1.4] $-\frac{20}{3}$米/秒.　26. [1.4] 84 磅.

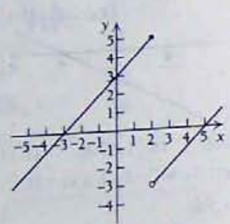
27. [1.4] a) $R(x)=28x$；
b) $C(x)=16x+80\,000$；
c) $P(x)=12x-80\,000$；
d) 16 000 美元利润；e) 6 667.

28. [1.5] $\sqrt[4]{y}$.　29. [1.5] $x^{3/20}$.

30. [1.5] 9.　31. [1.5] $(-\infty, 3]$.

32. [1.5] 除 1 和 −1 之外的所有实数.

33. [1.2]

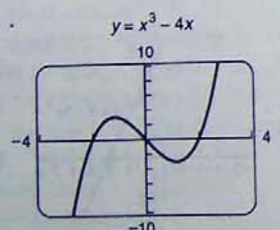


34. [1.6] a) $G(x)=\frac{9}{7}x+\frac{437}{7}$；b) 86，95.

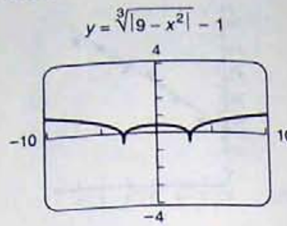
35. [1.6] a) $P(x)=0.001\,8x^2+0.004\,6x+0.29$；b) 52%，96%.

36. [1.5] $\frac{1}{32}$.

37. [1.2]，[1.3]，[1.5] −2，0，2；定义域 = $(-\infty, \infty)$；值域 = $(-\infty, \infty)$.



38. [1.2]，[1.3]，[1.5] −3.162，−2.828，2.828，3.162；定义域 = $(-\infty, \infty)$；值域 = $[-1, \infty)$.



39. [1.5] (−1.9，0.8)，(−0.3，1)，(2.1，0.7).

40. [1.6] a) $y=0.625\,5x+75.476\,6$；
b) 87，91.

41. [1.6] a) $y=0.002\,1x^2-0.000\,2x+0.295\,8$；
b) 51%，99%.

测验：第 1 章，p. 89

1. [1.1] a) 1 150 分钟/月；b) 62.

2. [1.1] 920 美元.

3. [1.2] a) 11；b) $2x^2+4xh+2h^2+3$.

4. [1.4] $m=-3$；y 截距：(0, 2).

5. [1.4] $y+5=\frac{1}{4}(x-8)$，或 $y=\frac{1}{4}x-7$.

6. [1.4] $m=-3$.　7. [1.4] 每年 −700 美元.

8. [1.4] 每袋 $\frac{1}{2}$ 磅.　9. [1.4] $F(W)=\frac{2}{3}W$.

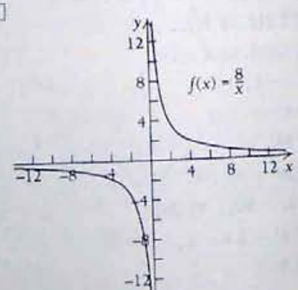
10. [1.4] a) $C(x)=0.5x+10\,000$；b) $R(x)=7.5x$；
c) $P(x)=7x-10\,000$；d) 1 429.

11. [1.5] (3，16).　12. [1.2] 是.

13. [1.2] 不是.

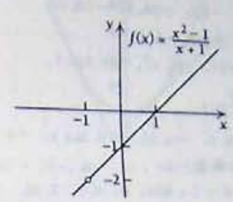
14. [1.3] a) −4；b) $(-\infty, \infty)$；c) −3，3；
d) $[-5, \infty)$.

15. [1.2]



16. [1.5] $t^{-1/2}$.　17. [1.5] $\frac{1}{\sqrt[5]{t^2}}$.

18. [1.5]

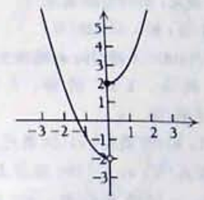


19. [1.5] 除 2，−7 之外的所有实数.

20. [1.3] $\{x \mid x>-2\}$，或 $(-2, \infty)$.

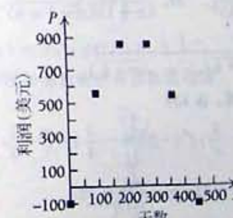
21. [1.3] $[c, d)$.

22. [1.2]



23. [1.6] a) $M(r)=\frac{1}{5}r+160$；b) 172，175.

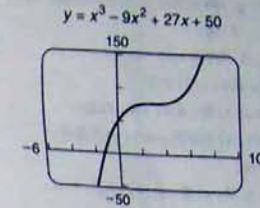
24. [1.6] a)



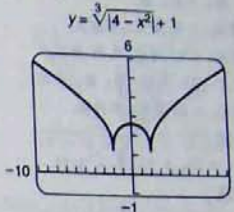
b) 是；c) $P(x)=-0.02x^2+9x-100$；
d) 912.50 美元.

25. [1.5] a) 525；b) 4.31 美元.

26. [1.2]，[1.3]，[1.5] −1.25；定义域 = $(-\infty, \infty)$；值域 = $(-\infty, \infty)$.



27. [1.2]，[1.3]，[1.5] 没有；定义域 = $(-\infty, \infty)$；值域 = $[1, \infty)$.



28. [1.5] (−1.2，2.4).

29. [1.6] a) $M(x)=0.2x+160$；
b) 172，175.

30. [1.6] a) $P(x)=-0.020\,0x^2+8.991\,9x-95.857\,1$；
b) 914.38 美元.

31. [1.6] a) $y=37.576\,1x+294.477\,4$，
$y=-0.592\,5x^2+74.606\,8x-117.724\,7$，
$y=0.022\,0x^3-2.604\,2x^2+125.714\,3x-439.647\,5$，
$y=0.002\,8x^4-0.324\,0x^3+11.457\,1x^2-88.512\,1x+507.838\,7$；
b) 留给学生.

第 2 章

上机技术演练，p. 96

1. 5.　2. −4.

3. 327，456.95，475.24，492.1，493.81，494，494.19，495.9，513.24，573.9，685.17.

4. 494.　5. −1.

2007/08/16

习题 2.1，p. 104

1. 不是. 3. 是.

5. a)−1，2 不存在；b)−1；
c)不是；d)3；e)3；f)是.

7. a)2；b)2；c)是；d)0；e)0；f)是.

9. a)3；b)1；c)不存在；d)1；e)不是；
f)0；g)是.

11. a)错；b)对；c)错；d)错；e)错；f)对；
g)对；h)错；i)错；j)对.

13. a)对；b)错；c)错；d)对；e)错；f)对；
g)错；h)对.

15. 不是；是；不是；是.

17. 0.37 美元；0.60 美元；不存在.

19. 0.83 美元；0.83 美元；0.83 美元.

21. 1.06 美元. 23. 不是；是；是；不是.

25. 2.30 美元；2.60 美元；不存在.

27. 2.90 美元.

29. t =0.5，0.75，1.25，1.5，1.75.

31. 1 200 只鹿.

33. t =0.1，0.3，0.4，0.5，0.6，0.8.

35. 35 只熊.

39. a)不存在；b)2.

上机技术演练，p. 109

1. 53. 2. 2.828 4，或 $2\sqrt{2}$.

3. 0.166 66，或 $\frac{1}{6}$.

习题 2.2，p. 111

1. −2. 3. 不存在. 5. 11.

7. −10. 9. $-\frac{5}{2}$. 11. 5.

13. 2. 15. 3. 17. 不存在.

19. $\frac{2}{7}$. 21. $\frac{5}{4}$. 23. $6x^2$. 25. $\frac{-2}{x^3}$.

27. a)1；b)1；c)1；d)1；e)是，不是.

29. 3. 31. $\frac{1}{3}$. 33. 3. 35. 不存在.

37. 6. 39. −0.288 7，或 $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

41. 0.75. 43. 0.25.

上机技术演练，p. 116

1~2. 留给学生.

习题 2.3，p. 119

1. a) $7(2x+h)$；b)70，63，56.7，56.07.

3. a) $-7(2x+h)$；
b)−70，−63，−56.7，−56.07.

5. a) $7(3x^2+3xh+h^2)$；
b)532，427，344.47，336.840 7.

7. a) $\frac{-5}{x(x+h)}$；
b)−0.208 3，−0.25，−0.304 9，−0.311 7.

9. a)−2；b)都是−2.

11. a) $2x+h-1$；b)9，8，7.1，7.01.

13. a) $2x+1+h$；b)11，10，9.1，9.01.

15. a)70，39，29，23 效用/产品.

17. 每年 6.15×10 亿美元，每年 −9.05×10 亿美元，每年 8.425×10 亿美元.

19. a)300 093.99 美元；b)299 100 美元；
c)993.99 美元；d)993.99 美元.

21. a)1.25 磅/月；b)$0.41\overline{6}$ 磅/月；
c)$0.\overline{3}$ 磅/月；d)$0.\overline{6}$ 磅/月；e)刚出生之后.

23. a) 1.25 词/分，1.25 词/分，0.625 词/分，
0 词/分；0 词/分.

25. a)144 英尺；b)400 英尺；c)128 英尺/秒.

27. a)125 百万人/年；c) A：290 百万人/年，−40 百万人/年，−50 百万人/年，300 百万人/年；
B：在所有的时间区间中都是 125 百万人/年.

31. $2ax+b+ah$. 33. $\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$.

35. $\frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}$. 37. $\frac{1}{(x+1)(x+1+h)}$.

39. $\frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$.

上机技术演练，p. 131

1. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$；$f'(-2)=-\frac{3}{4}$；$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-12$.

2. $y=-\frac{3}{4}x-3$；$y=-12x-12$.

上机技术演练，p. 134

1~4. 图留给学生去作.

1. 60，26，0，−80.

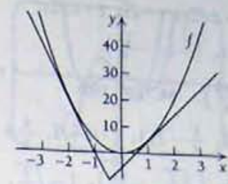
2. −96，−11，24，−11，−56.

3. −36，0，12，0，−43.47.

4. 不存在，0.41，1.81，2.00，1.15，不存在.

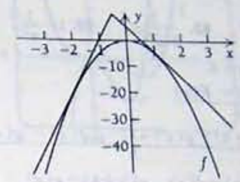
习题 2.4，p. 135

1. a)，b)



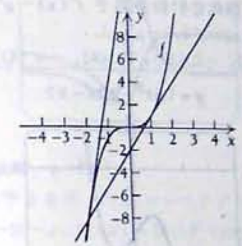
c) $f'(x)=10x$；d) −20，0，10.

3. a)，b)



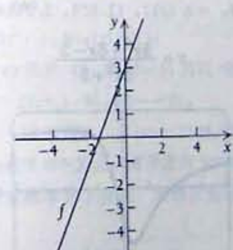
c) $f'(x)=-10x$；d)20，0，−10.

5. a)，b)



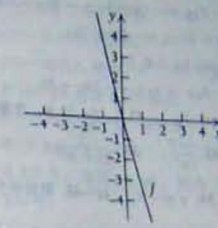
c) $f'(x)=3x^2$；d)12，0，3.

7. a)，b)原来函数的所有切线都相同.



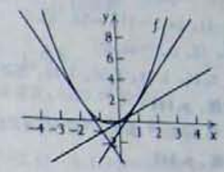
c) $f'(x)=2$；d)2，2，2.

9. a)，b)原来函数的所有切线都相同.



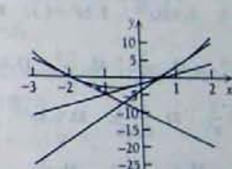
c) $f'(x)=-4$；d) −4，−4，−4.

11. a)，b)



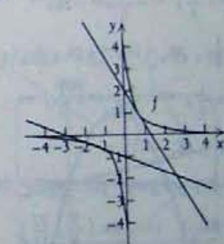
c) $f'(x)=2x+1$；d) −3，1，3.

13. a)，b)



c) $4x+3$；d) −5，3，7.

15. a)，b)



c) $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$；d) $-\frac{1}{4}$，不存在，−1.

2007/08/16

17. $f'(x)=m$.
19. $y=6x-9$; $y=-2x-1$; $y=20x-100$.
21. $y=-5x+10$; $y=-5x-10$;
$y=-0.0005x+0.1$.
23. $y=2x+5$; $y=4$; $y=-10x+29$.
25. x_0, x_3, x_4, x_6, x_{12}.　27. 1, 2, 3, 4, 等等.
29. 没有.　33. $\frac{-2}{x^3}$.　35. $\frac{1}{(1+x)^2}$.
37. $\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$.　39. $x=-3$.　41~45. 留给学生.

上机技术演练，p. 140

1~4. 图留给学生去作.
1. 152, −76, −100, −180.
2. −96, −11, 24, −11, −56.
3. −36, 0, 12, 0, −43.47.
4. 不存在, 0.41, 1.81, 2.00, 1.15, 不存在.

上机技术演练，p. 144

1. 1, 11.　2. 0, 4.　3. 2.　4. −1.4, 1.4.

上机技术演练，p. 145

1. 2.

习题 2.5，p. 146

1. $7x^6$.　3. 0.　5. $600x^{149}$.　7. $3x^2+6x$.　9. $\frac{4}{\sqrt{x}}$.
11. $0.07x^{-0.93}$.　13. $\frac{2}{5\sqrt[5]{x}}$.　15. $\frac{-3}{x^4}$.　17. $6x-8$.
19. $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}+\frac{1}{x^2}$.　21. $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.　23. $1.6x^{1.5}$.
25. $\frac{-5}{x^2}-1$.　27. 4.　29. 4.　31. x^3.
33. $-0.02x-0.5$.
35. $-2x^{-5/3}+\frac{3}{4}x^{-1/4}+\frac{6}{5}x^{1/5}-24x^{-4}$.
37. $-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{2}$.　39. $-16x^{-2}+24x^{-4}-4x^{-5}$.
41. $\frac{1}{2}x^{-1/2}+\frac{1}{3}x^{-2/3}-\frac{1}{4}x^{-3/4}+\frac{1}{5}x^{-4/5}$.
43. $2x+2$; 22.　45. $-\frac{8}{x^3}$; 1.
47. $y=10x-15$; $y=x+3$; $y=-2x+1$.
49. (0, 0).　51. (0, 0).　53. $\left(\frac{5}{6},\frac{23}{12}\right)$.
55. (−25, 76.25).　57. 不存在.
59. 图形上的所有点的切线都是水平的.
61. $\left(\frac{5}{3},\frac{148}{27}\right)$, (−1, −4).
63. $(\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$.
65. (0, −2), $\left(-1,-\frac{11}{6}\right)$.
67. $\left(\frac{19}{2},\frac{399}{4}\right)$.　69. (60, 150).
71. $\left(-2+\sqrt{3},\frac{4}{3}-\sqrt{3}\right)$, $\left(-2-\sqrt{3},\frac{4}{3}+\sqrt{3}\right)$.
73. (0, −4), $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{40}{9}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{40}{9}\right)$.
75. $2x-1$.　77. $2x+1$.　79. $3x^2-\frac{1}{x^2}$.
81. $-192x^2$.　83. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$.　85. $1-\frac{1}{x^2}$.
87. $3x^2+6x+3$.
89. $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

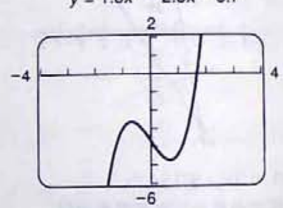
$$=\frac{[f(x+h)-g(x+h)]-[f(x)-g(x)]}{h}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

当 h 趋于 0 时，右边两项分别趋于 $f'(x)$ 和 $g'(x)$，因此它们的差趋于 $f'(x)-g'(x)$. 于是，$F'(x)=f'(x)-g'(x)$.

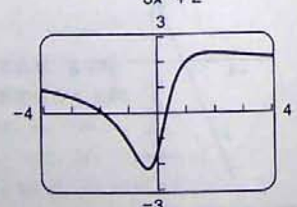
93. (−0.692, −2.639), (0.692, −4.761).

$y = 1.6x^3 - 2.3x - 3.7$

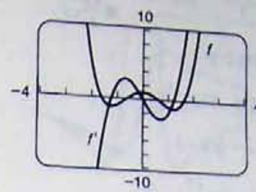


95. (−0.346, −2.191), (1.929, 2.358).

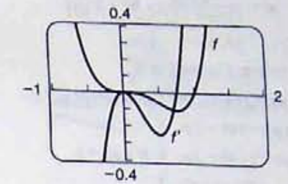
$y=\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$



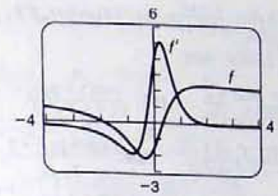
97.



99.



101.

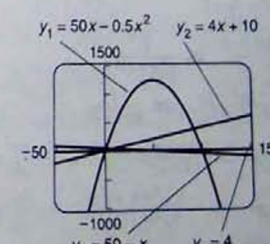


上机技术演练，p. 152

1. 图留给学生去作. $P(x)=-0.5x^2+40x-3$; $R'(x)=50-x$, $C'(x)=10$, $P'(x)=40-x$; 1 200 美元, 403 美元, 797 美元; 10 美元, 10 美元, 0 美元; 边际成本.

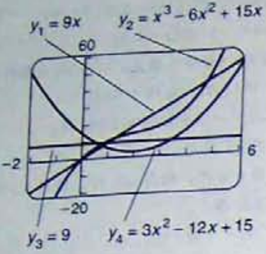
习题 2.6，p. 153

1. a) $v(t)=3t^2+1$; b) $a(t)=6t$;
c) $v(4)=49$ 英尺/秒, $a(4)=24$ 英尺/秒².
3. a) $v(t)=-20t+2$; b) $a(t)=-20$;
c) $v(1)=-18$ 米/秒, $a(1)=-20$ 米/秒².
5. 如果价格是 1 000 美元，则可卖出 500 000 台计算机. 如果价格增加 1 美元，大约少卖出 100 台计算机.
7. a) $P(x)=-0.001x^2+3.8x-60$;
b) $R(100)=500$ 美元, $C(100)=190$ 美元, $P(100)=310$ 美元;
c) $R'(x)=5$, $C'(x)=0.002x+1.2$,
$P'(x)=-0.002x+3.8$;
d) $R'(100)=$ 每件 5 美元, $C'(100)=$ 每件 1.40 美元, $P'(100)=$ 每件 3.60 美元.
9. a) $N'(a)=-2a+300$; b) 2 906 件;
c) 280 件/千美元.
11. a) 每月 630 件, 每月 980 件, 每月 1 430 件, 每月 630 件;
b) $M'(t)=-4t+100$;
c) 80, 60, 0, −80.
13. a) $\frac{dD}{dp}=-\frac{1}{2\sqrt{p}}$; b) 95 件;
c) 每件 $-\frac{1}{10}$ 美元.
15. a) 2 268 美元; b) 59.94 美元;
c) 每台收音机 59.60 美元; d) 2 387.20 美元.
17. a) $\frac{dw}{dt}=1.82-0.1192t+0.002274t^2$;
b) 8.15 磅; c) 1.82 磅/月; d) 22.72 磅;
e) 10.717 磅/月; f) 1.21 磅/月.
19. a) $\frac{dC}{dr}=2\pi$.
21. a) $T'(t)=-0.2t+1.2$; b) 100.175°;
c) 0.9 度/天.
23. a) $\frac{dT}{dW}=1.31W^{0.31}$.
25. a) $\frac{dR}{dQ}=kQ-Q^2$.
27. a) $A'(t)=0.08$.
31.



2007/08/16

33.



上机技术演练，p. 160

1. a)不正确；b)不正确；c)正确.

2~5. 留给学生.

上机技术演练，p. 161

1. $R(p)=p(200-p)$，$R'(p)=200-2p$；图留给学生去作.

习题 2.7，p. 162

1. $11x^{10}$.　3. $\frac{1}{x^2}$.　5. $3x^2$.

7. $(8x^5-3x^2+20)\left(32x^3-\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)$
$+(40x^4-6x)(8x^4-3\sqrt{x})$.

9. $300-2x$.　11. $2x$.

13. $(4\sqrt{x}-6)(3x^2-2)+(2x^{-1/2})(x^3-2x+4)$.

15. $2x+6$.　17. $6x^5-32x^3+32x$.

19. $(5x^{-3})(4x^3-15x^2+10)-15x^{-4}(x^4-5x^3+10x-2)$，或 $5-100x^{-3}+30x^{-4}$.

21. $\left(x+\frac{2}{x}\right)(2x)+\left(1-\frac{2}{x^2}\right)(x^2-3)$，
或 $3x^2+\frac{6}{x^2}-1$.

23. $\frac{300}{(300-x)^2}$.　25. $\frac{17}{(2x+5)^2}$.

27. $\frac{-x^4-3x^2-2x}{(x^3-1)^2}$.　29. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

31. $\frac{2}{(x+1)^2}$.　33. $\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$.

35. $\frac{-1}{(x-3)^2}$.　37. $\frac{-2x^2+6x+2}{(x^2+1)^2}$.

39. $\frac{-18x+35}{x^6}$.

41. $\frac{4\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^{-1/2}(4x+3)}{x}$，或 $\frac{4x-3}{2x^{3/2}}$.

43~83. 留给学生.

85. a) $\frac{1}{(x+1)^2}$；b) $\frac{1}{(x+1)^2}$.

87. $y=2$；$y=\frac{1}{2}x+2$.

89. $y=x+5$；$y=\frac{21}{4}x-\frac{21}{4}$.

91. a) $D'(p)=\frac{-2\,978}{(10p+11)^2}$；b) $-\frac{2\,978}{2\,601}$.

93. a) $P'(x)=57.6x^{0.6}-104$；
b)每年 422.8×10 亿美元.

95. a) $R(p)=p(400-p)=400p-p^2$；
b) $R'(p)=400-2p$.

97. a) $R(p)=4\,000+3p$；b) $R'(p)=3$.

99. $A'(x)=\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}$.

101. a) $T'(t)=\frac{4-4t^2}{(t^2+1)^2}$；b) $T(2)=100.2$°F；
c) -0.48°F/小时.

103. $\frac{5x^3-30x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-5)^2}$.　105. $\frac{-3(1+2v)}{(1+v+v^2)^2}$.

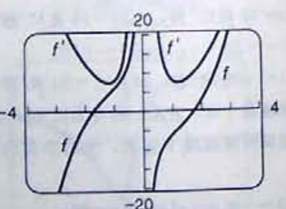
107. $\frac{2t^3-t^2+1}{(1-t+t^2-t^3)^2}$.　109. $\frac{5x^3+15x^2+2}{2x\sqrt{x}}$.

111. $[x(9x^2+6)+(3x^3+6x-2)](3x^4+7)$
$+12x^4(3x^3+6x-2)$.

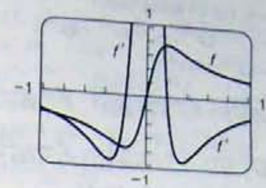
113. $\frac{6t^2(t^2+3)}{(t^3+1)^2}+\frac{5t^4(t^2-1)}{t^3+1}$.

115. $\frac{\{(x^7-2x^5+9)[(2x^2+3)(12x^2-7)+4x(4x^3-7x+2)]-(7x^6-12x^4)(2x^2+3)(4x^3-7x+2)\}}{(x^7-2x^5+9)^2}$

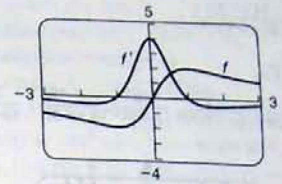
119. 没有具有水平切线的点.



121. $(-0.2,-0.75)$，$(0.2,0.75)$.



123. $(-1,-2)$，$(1,2)$.



习题 2.8，p. 171

1. $8x+4$.　3. $-55(1-x)^{54}$.　5. $\frac{4}{\sqrt{1+8x}}$.

7. $\frac{3x}{\sqrt{3x^2-4}}$.　9. $-240x(3x^2-6)^{-41}$.

11. $\sqrt{2x+3}+\frac{x}{\sqrt{2x+3}}$，或 $\frac{3(x+1)}{\sqrt{2x+3}}$.

13. $2x\sqrt{x-1}+\frac{x^2}{2\sqrt{x-1}}$，或 $\frac{5x^2-4x}{2\sqrt{x-1}}$.

15. $\frac{-6}{(3x+8)^3}$.

17. $(1+x^3)^3(-3x^2-12x^5)$，或 $-3x^2(1+x^3)^2(1+4x^3)$.

19. $4x-400$.

21. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+3(x-3)^2$.　23. $2(x+6)^9(x-5)^3(7x-13)$.

25. $4(x-4)^7(3-x)^3(10-3x)$.

27. $4(2x-3)^2(3-8x)$.

29. $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1/2}\cdot\frac{-1}{(x+1)^2}$.

31. $\left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)^3\cdot\frac{44}{(5x+2)^2}$.

33. $\frac{1}{3}(x^4+3x^2)^{-2/3}(4x^3+6x)$.

35. $100(2x^3-3x^2+4x+1)^{99}(6x^2-6x+4)$.

37. $\left(\frac{2x+3}{5x-1}\right)^{-3}\cdot\frac{68}{(5x-1)^2}$.

39. $\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{-1/2}\cdot\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$.

41. $\frac{(2x+3)^3(-6x-61)}{(3x-2)^5}$.

43. $16(2x+1)^{-1/3}(3x-4)^{5/4}+45(2x+1)^{2/3}(3x-4)^{1/4}$，
或 $(2x+1)^{-1/3}(3x-4)^{1/4}(138x-19)$.

45. $\frac{1}{2}u^{-1/2}$，$2x$，$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

47. $50u^{49}$，$12x^2-4x$，$50(4x^3-2x^2)^{49}(12x^2-4x)$.

49. $2u+1$，$3x^2-2$，$(2x^3-4x+1)(3x^2-2)$.

51. $y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$　53. $y=4x-3$.

55. a) $\frac{2x-3x^2}{(1+x)^4}$；b) $\frac{2x-3x^2}{(1+x)^4}$；c)相同.

57. $12x^2-12x+5$，$6x^2+3$.

59. $\frac{16}{x^2}-1$，$\frac{2}{4x^2-1}$.　61. x^4-2x^2+2，x^4+2x^2.

63. $f(x)=x^3$，$g(x)=3x^2-7$.

65. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$，$g(x)=x^3$.

67. -216.　69. $-4(-11)^{-1/3}\approx-0.808\,7$.

71. a) $C'(x)=\frac{1\,500x^2}{\sqrt{x^3+2}}$，$C'(10)=4\,738.68$.

73. a) $P'(x)=\frac{2\,000x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1\,500x^2}{\sqrt{x^3+2}}$.

75. a) $\frac{dC}{dx}=2(19+1.16x-0.03x^2+0.001x^3)\cdot(1.16-0.06x+0.003x^2)$；
b) $\frac{dC}{dx}$ 给出了信贷随时间增加的速度；
c)每年 137.77×10 亿美元.

77. a) $3\,000(1+i)^2$.

79. a) $D(t)=\frac{80\,000}{1.6t+9}$；b) $D'(t)=\frac{-128\,000}{(1.6t+9)^2}$；
c) $\frac{-128\,000}{28\,561}$ 件/天，或大约 -4.48 件/天.

81. a) $D=4.25c+106.25$，$c=2.199w$；
b) $\frac{dD}{dc}=4.25$；c) $\frac{dc}{dw}=2.199$；
d) $\frac{dD}{dw}=9.346$.

83. $\frac{x^2-2}{[illegible]}$.　85. $\frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}$.

2007/08/16

87. $\frac{-4(1+2v)^3}{v^5}$.

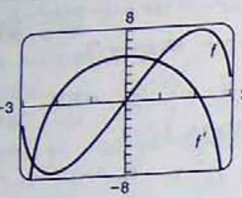
89. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x)}$，或$\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)(1-x)}$.

91. $3\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+1}\right)^2\cdot\frac{x^2+4x-1}{(x^2+1)^2}$，

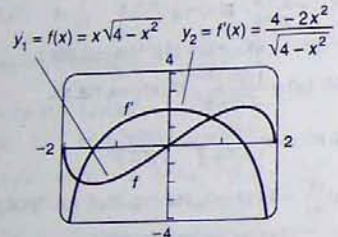
或$\frac{3(x^2-x-1)^2(x^2+4x-1)}{(x^2+1)^4}$.

93. $\frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2}$.

97. (−2.144 76，−7.728)，(2.144 76，7.728).



99.



习题 2.9，p. 176

1. 0. 3. $-\frac{2}{x^3}$. 5. $-\frac{3}{16}x^{-7/4}$. 7. $12x^2+\frac{8}{x^3}$.

9. $\frac{12}{x^5}$. 11. $n(n-1)x^{n-2}$. 13. $12x^2-2$.

15. $-\frac{1}{4}(x-1)^{-3/2}$，或$\frac{-1}{4\sqrt{(x-1)^3}}$.

17. $2a$. 19. $-\frac{8}{9(2x+4)^{5/3}}$.

21. $86(x^2-8x)^{41}(85x^2-680x+1\,344)$.

23. $200x^2(x^4-4x^2)^{48}(199x^4-798x^2+792)$.

25. $-\frac{2}{9}x^{-4/3}$. 27. $-\frac{3}{16}(x-8)^{-5/4}$.

29. $6x^{-4}+24x^{-5}$. 31. 24. 33. $720x$.

35. $20(x^2-5)^4[19x^2-5]$. 37. $a(t)=6t+2$.

39. $w''(t)=0.119\,2+0.004\,548t$.

41. $y'=-x^{-2}-2x^{-3}$，$y''=2x^{-3}+6x^{-4}$，

$y'''=-6x^{-4}-24x^{-5}$.

43. $y'=\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$，$y''=\frac{2x^3+3x}{(1+x^2)^{3/2}}$，$y'''=\frac{3}{(1+x^2)^{5/2}}$.

45. $y'=\frac{11}{(2x+3)^2}$，$y''=\frac{-44}{(2x+3)^3}$，$y'''=\frac{264}{(2x+3)^4}$.

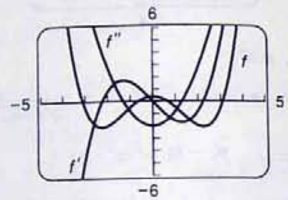
47. $y'=\frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}$，$y''=\frac{4-x}{4(x-1)^{5/2}}$，

$y'''=\frac{3(x-6)}{8(x-1)^{7/2}}$.

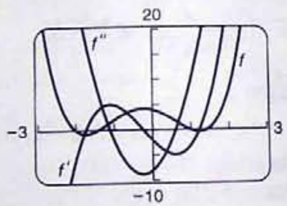
49. $\frac{2}{(x-1)^3}$.

51. $\frac{3}{(x+2)^2}$，$\frac{-6}{(x+2)^3}$，$\frac{18}{(x+2)^4}$，$\frac{-72}{(x+2)^5}$，$\frac{360}{(x+2)^6}$.

53.



55.



概要与复习：第 2 章，p. 178

1. [2.1] a) −11，−10.5，−10.1，−10.01，−10.001，−10.000 1；−9，−9.5，−9.9，−9.99，−9.999，−9，999 9；b) −10，−10，−10.

2. [2.1] −10. 3. [2.1] −10.

4. [2.1]，[2.2] −4.

5. [2.1]，[2.2] 10. 6. [2.2] −10. 7. [2.2] 5.

8. [2.1] 不是. 9. [2.1] 是. 10. [2.1] −4.

11. [2.1] −4. 12. [2.1] 是. 13. [2.1] 不存在.

14. [2.1] −2. 15. [2.1] 不是. 16. [2.3] 2.

17. [2.3] −3. 18. [2.3] $4x+2h$.

19. [2.4]，[2.5] $y=x-1$. 20. [2.5] (4，5).

21. [2.5] (5，−108). 22. [2.5] $20x^4$.

23. [2.5] $x^{-2/3}$. 24. [2.5] $64x^{-9}$.

25. [2.5] $6x^{-3/4}$. 26. [2.5] $0.7x^6-12x^3-3x^2$.

27. [2.5] x^4+32x^3-5. 28. [2.7] $2x$.

29. [2.7] $\frac{-x^2+16x+8}{(8-x)^2}$.

30. [2.8] $2(5-x)(2x-1)^4(26-7x)$.

31. [2.8] $35x^4(x^5-2)^6$.

32. [2.8] $3x^2(4x+3)^{-1/4}+2x(4x+3)^{3/4}$，

或 $x(4x+3)^{-1/4}(11x+6)$.

33. [2.9] $240x^{-6}$. 34. [2.9] $20x^3$.

35. [2.6]，[2.9] a) $1+4t^3$；b) $12t^2$；c) 33，48.

36. [2.6] a) $-8x^2+47x+10$；b) 800 美元，3 050 美元，−2 250 美元；c) 40，$16x-7$，$-16x+47$；d) 每件 40 美元，每件 313 美元，每件 −273 美元.

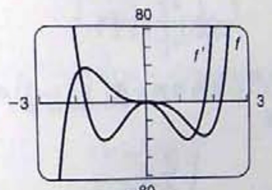
37. [2.6] a) $100t$；b) 30 000；c) 每年 2 000 人.

38. [2.8] $4x^2-4x+6$，$-2x^2-9$.

39. [2.8] $\frac{-9x^4-4x^3+9x+2}{2\sqrt{1+3x}(1+x^3)^2}$.

40. [2.2] −0.25. 41. [2.2] 0.166 7，或$\frac{1}{6}$.

42. [2.5] (−1.713 7，37.445)，(0，0)，(1.7137，−37.445).



测验：第 2 章，p. 180

1. [2.1] a) 11，11.7，11.9，11.99，11.999，11.999 9；13，12.5，12.1，12.01，12.001，12.000 1；

b) 12，12，12.

2. [2.1] 12. 3. [2.1] 12. 4. [2.1] 不存在.

5. [2.1] 0. 6. [2.1] 不存在. 7. [2.1] 2.

8. [2.1] 4. 9. [2.1] 1. 10. [2.1] 1.

11. [2.1] 1. 12. [2.1] 是. 13. [2.1] 不是.

14. [2.1] 不存在. 15. [2.1] 1.

16. [2.1] 不是. 17. [2.1] 3. 18. [2.1] 3.

19. [2.1] 是. 20. [2.1]，[2.2] 6.

21. [2.1]，[2.2] $\frac{1}{8}$. 22. [2.1]，[2.2] 不存在.

23. [2.3] $4x+3+2h$. 24. [2.4] $y=\frac{3}{4}x+2$.

25. [2.5] (0，0)，(2，−4). 26. [2.5] $84x^{13}$.

27. [2.5] $\frac{5}{\sqrt{x}}$. 28. [2.5] $\frac{10}{x^3}$.

29. [2.5] $\frac{5}{4}x^{1/4}$，或$\frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$.

30. [2.5] $-x+0.61$. 31. [2.5] x^2-2x+2.

32. [2.5]，[2.7] $\frac{12-6x}{x^3}$. 33. [2.7] $\frac{5}{(5-x)^2}$.

34. [2.8] $(x+3)^3(7-x)^4(-9x+13)$.

35. [2.8] $-5(x^5-4x^3+x)^{-6}(5x^4-12x^2+1)$.

36. [2.8] $\sqrt{x^2+5}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}$，或$\frac{2x^2+5}{\sqrt{x^2+5}}$.

37. [2.9] $24x$.

38. [2.6] a) $P(x)=-0.001x^2+48.8x-60$；

b) $R(10)=500$ 美元，$C(10)=72.10$ 美元，$P(10)=427.90$ 美元；

c) $R'(x)=50$，$C'(x)=0.002x+1.2$，$P'(x)=-0.002x+48.8$；

d) $R'(10)=$ 每件 50 美元，$C'(10)=$ 每件 1.22 美元，$P'(10)=$ 每件 48.78 美元.

39. [2.6] a) $\frac{dM}{dt}=-0.003t^2+0.2t$；

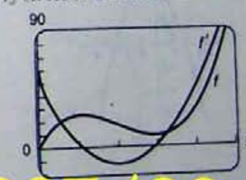
b) 9；c) 1.7 词/分.

40. [2.8] $4x^4-2x^3$；$2(x^2-x)^3$.

41. [2.7]，[2.8] $-2\left(\frac{1+3x}{1-3x}\right)^{1/3}+\left(\frac{1-3x}{1+3x}\right)^{2/3}$.

42. [2.2] 27.

43. [2.4] (1.083 6，25.102 9)，(2.950 3，8.624 7).



2007/08/16

44. $[2, 4]$ $\frac{1}{2}$.

第 3 章

上机技术演练，p. 195

1. 相对极大值：$(-1, 19)$；相对极小值：$(2, -8)$.

上机技术演练，p. 197

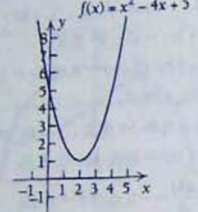
1. 相对极小值：$(0, 0)$.
2. 相对极大值：$(1.67, 2.36)$.
3. 相对极大值：$(-1, 2.17)$；相对极小值：$(2, -2.33)$.
4. 相对极小值：$(-3.20, -0.01)$ 和 $(3.20, -0.01)$；相对极大值：$(0, 22)$.

上机技术演练，p. 199

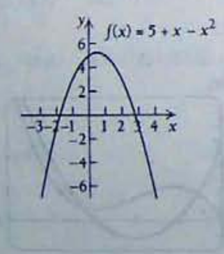
1. 留给学生.
2. 在 $x=1$ 处有一条垂直渐近线．在 $x=1$ 处导数不存在.
3. 相对极大值：$(1, 2)$.

习题 3.1，p. 199

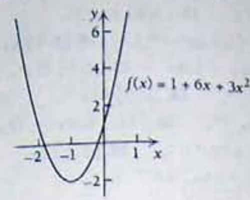
1. 在$(2, 1)$取相对极小值.



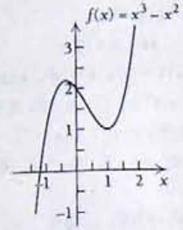
3. 在$\left(\frac{1}{2}, \frac{21}{4}\right)$取相对极大值.



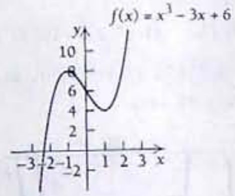
5. 在$(-1, -2)$取相对极小值.



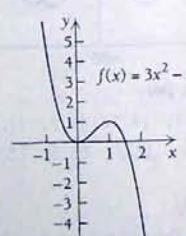
7. 在$(1, 1)$取相对极小值，在$\left(-\frac{1}{3}, \frac{59}{27}\right)$取相对极大值.



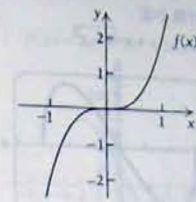
9. 在$(-1, 8)$取相对极大值，在$(1, 4)$取相对极小值.



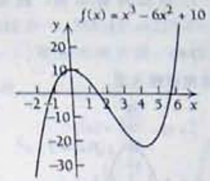
11. 在$(0, 0)$取相对极小值，在$(1, 1)$取相对极大值.



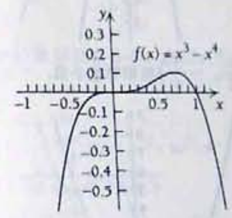
13. 没有.



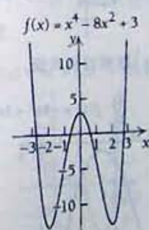
15. 在$(0, 10)$取相对极大值，在$(4, -22)$取相对极小值.



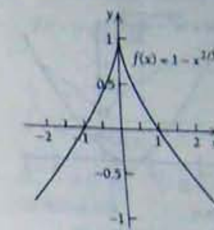
17. 在$\left(\frac{3}{4}, \frac{27}{256}\right)$取相对极大值.



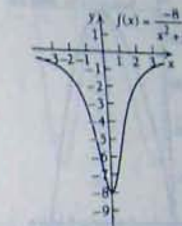
19. 在$(-2, -13)$和$(2, -13)$取相对极小值，在$(0, 3)$取相对极大值.



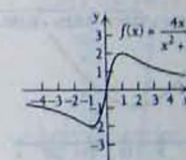
21. 在$(0, 1)$取相对极大值.



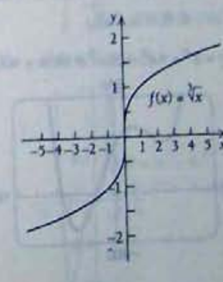
23. 在$(0, -8)$取相对极小值.



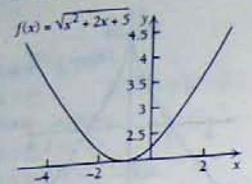
25. 在$(-1, -2)$取相对极小值，在$(1, 2)$取相对极大值.



27. 没有.

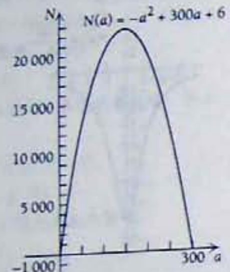


29. 在(−1，2)取相对极小值.

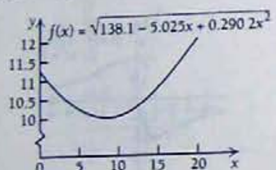


31～59. 留给学生.

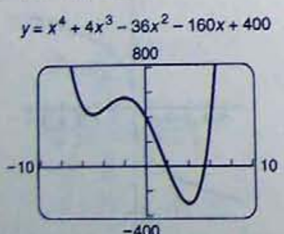
61. 在(150，22 506)取相对极大值.



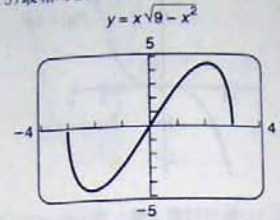
63. 东经 8.658 度，南纬 10.79 度.



67. 在(−5，425)和(4，−304)取相对极小值；在(−2，560)取相对极大值.



69. 在(2.12，4.5)取相对极大值；在(−2.12，−4.5)取相对极小值.

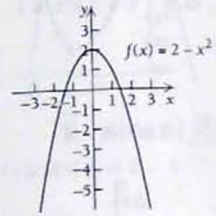


上机技术演练，p. 214

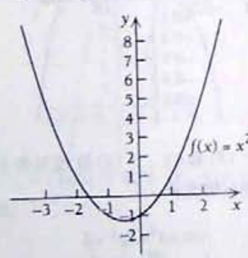
1. 在(1，−1)取相对极小值；拐点在(0，0)，(0.533，−0.512)，(1.447，−0.512)和(2，0).

习题 3.2，p. 214

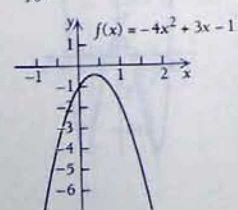
1. 在(0，2)取相对极大值.



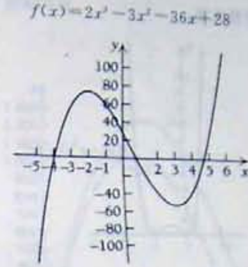
3. 在$\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right)$取相对极小值.



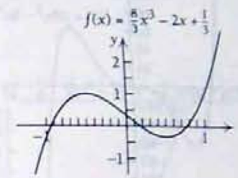
5. 在$\left(\frac{3}{8},-\frac{7}{16}\right)$取相对极大值.



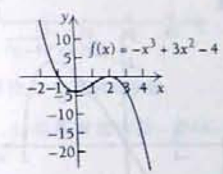
7. 在(−2，72)取相对极大值，在(3，−53)取相对极小值.



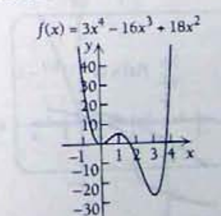
9. 在$\left(-\frac{1}{2},1\right)$取相对极大值；在$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$取相对极小值.



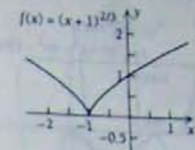
11. 在(0，−4)取相对极小值；在(2，0)取相对极大值.



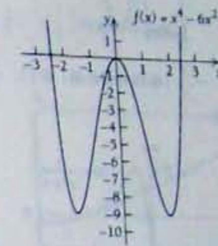
13. 在(0，0)和(3，−27)取相对极小值，在(1，5)取相对极大值.



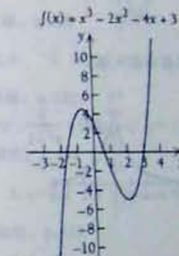
15. 在(−1，0)取相对极小值.



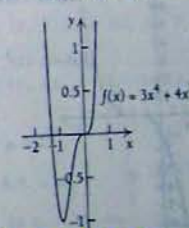
17. 在$(-\sqrt{3},-9)$和$(\sqrt{3},-9)$取相对极小值，在(0，0)取相对极大值.



19. 在$\left(-\frac{2}{3},\frac{121}{27}\right)$取相对极大值，在(2，−5)取相对极小值.

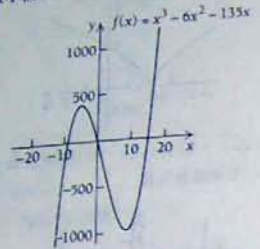


21. 在(−1，−1)取相对极小值.

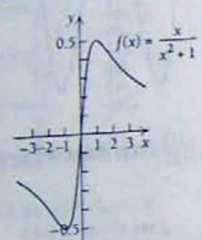


2007/08/16

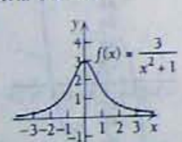
23. 在$(-5, 400)$取相对极大值；在$(9, -972)$取相对极小值.



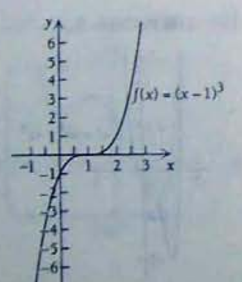
25. 在$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$取相对极小值；在$\left(1, \frac{1}{2}\right)$取相对极大值.



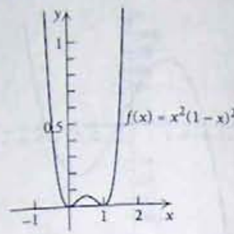
27. 在$(0, 3)$取相对极大值.



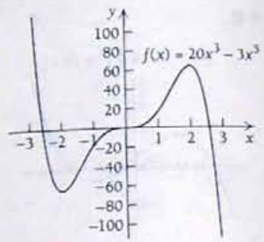
29. 没有.



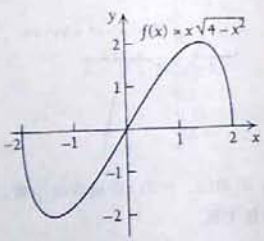
31. 在$(0, 0)$和$(1, 0)$取相对极小值；在$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$取相对极大值.



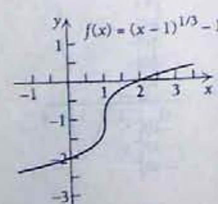
33. 在$(-2, -64)$取相对极小值；在$(2, 64)$取相对极大值.



35. 在$(-\sqrt{2}, -2)$取相对极小值；在$(\sqrt{2}, 2)$取相对极大值.



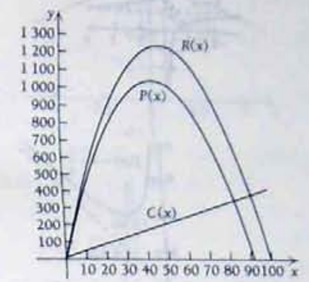
37. 没有.



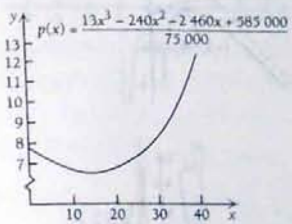
39. $(0, 1)$.　**41.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$.

43～83. 留给学生.

85.

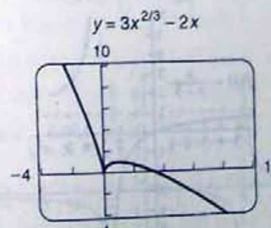


87.

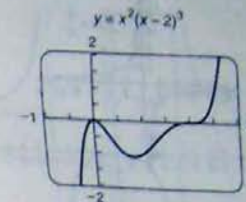


89. 一个半径$13\frac{1}{3}$毫米的异物.

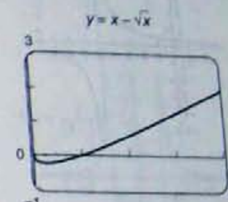
95. 在$(1, 1)$取相对极大值；在$(0, 0)$取相对极小值.



97. 在$(0, 0)$取相对极大值；在$(0.8, -1.11)$取相对极小值.



99. 在$\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$取相对极小值.



上机技术演练，p.219

1. 2.　2. 2.

上机技术演练，p.220

1. $\frac{2}{3}$.　2. 0.　3. ∞.　4. 1.

上机技术演练，p.223

1. $x=-7$ 和 $x=4$.　2. $x=0$，$x=3$ 和 $x=-2$.

上机技术演练，p.224

1. $y=0$.　2. $y=3$.　3. $y=0$.　4. $y=\frac{1}{2}$.

上机技术演练，p.225

1. $y=3x-1$.　2. $y=5x$.

上机技术演练，p.225

1. x 截距：$(0, 0)$，$(3, 0)$，$(-5, 0)$；y 截距：$(0, 0)$.

2. x 截距：$(0, 0)$，$(-3, 0)$，$(1, 0)$；y 截距：$(0, 0)$.

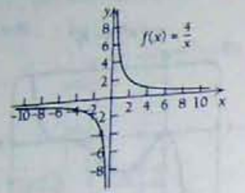
习题 3.3，p.232

1. $\frac{2}{5}$.　3. 5.　5. $\frac{1}{2}$.　7. $\frac{2}{3}$.　9. 0.

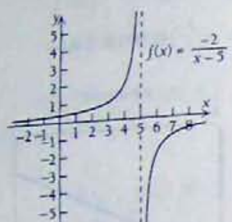
15. ∞

2007/08/16

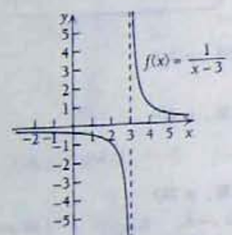
17.



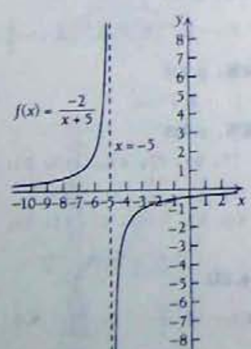
19.



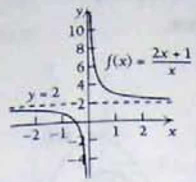
21.



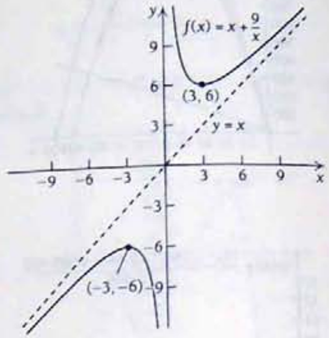
23.



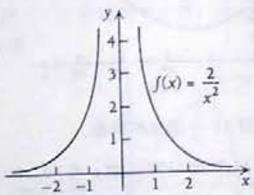
25.



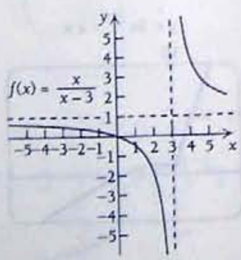
27.



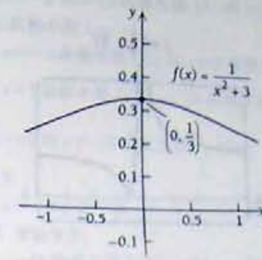
29.



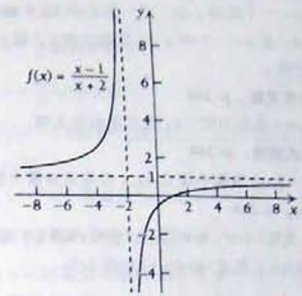
31.



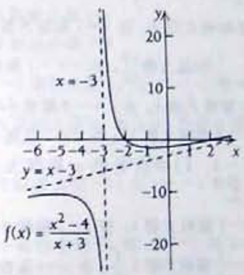
33.



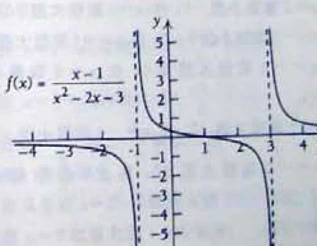
35.



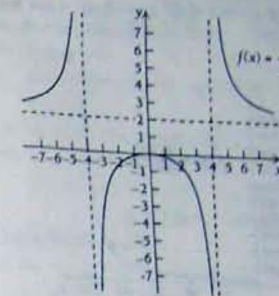
37.



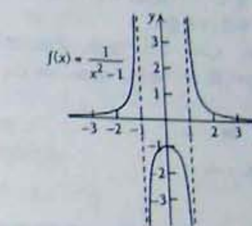
39.



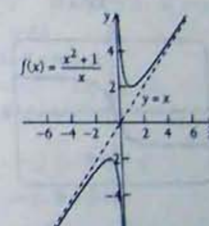
41.



43.



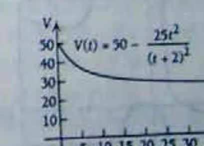
45.



47. a) 50 美元，37.24 美元，32.64 美元，26.37 美元；

b) 在 $t=0$ 取极大值 50；

c)



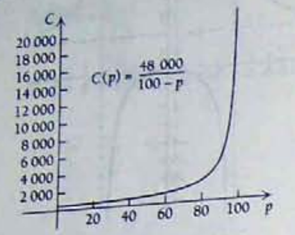
2007/08/16

d)25.

49. a)480 美元，600 美元，2 400 美元，4 800 美元；

b)∞.

d)



51. a)1.22 美元，0.79 美元，0.47 美元；

b)2006 年底；c)0 美元.

53. a) 4.00，4.50，5.14，6.00，7.20，9.00，12.00，18.00，36.00，54.00，108.00；

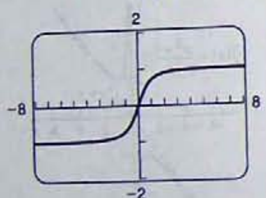
b)∞.

57. 不存在．　59. −∞.

61. $\frac{3}{2}$.　63. −∞.

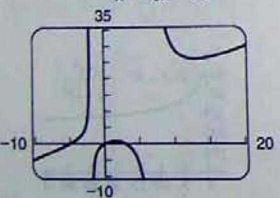
65.

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$



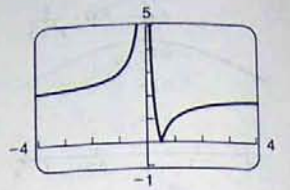
67.

$$y=\frac{x^3+2x^2-15x}{x^2-5x-14}$$



69.

$$y=\left|\frac{1}{x}-2\right|$$



上机技术演练，p. 238

1. 在 $x=-2$ 取极小值 −8，在 $x=-0.3$ 取极大值 2.18；在 $x=-1$ 和 $x=1$ 取极小值 1，在 $x=2$ 取极大值 4.

上机技术演练，p. 240

1. 在 $x=2$ 取极小值 −4；没有绝对极大值.

上机技术演练，p. 244

1. 在 $x=0.32$ 取极小值 6.32；没有绝对极大值.

习题 3.4，p. 245

1. a)41 英里/小时；b)80 英里/小时；c)13.5 英里/加仑；d)16.5 英里/加仑；e)大约 22%.

3. 在 $x=\frac{1}{2}$ 取极大值 $5\frac{1}{4}$；在 $x=2$ 取极小值 3.

5. 在 $x=2$ 取极大值 4；在 $x=1$ 取极小值 1.

7. 在 $x=-\frac{1}{3}$ 取极大值 $\frac{59}{27}$；在 $x=-1$ 取极小值 1.

9. 在 $x=3$ 取极大值 8；在 $x=-2$ 取极小值 −17.

11. 在 $x=-2$ 取极大值 15；在 $x=5$ 取极小值 −13.

13. 对于 [−1，1] 中所有的 x 取极大值 = 极小值 = −5.

15. 在 $x=-1$ 取极大值 4；在 $x=3$ 取极小值 −12.

17. 在 $x=-\frac{1}{5}$ 取极大值 $3\frac{1}{5}$；在 $x=3$ 取极小值 −48.

19. 在 $x=2$ 取极小值 −4；在 $x=5$ 取极大值 50.

21. 在 $x=-5$ 取极小值 −110；在 $x=-1$ 取极大值 2.

23. 在 $x=-8$ 取极大值 513；在 $x=8$ 取极小值 −511.

25. 在 $x=1$ 取极大值 17；在 $x=-3$ 取极小值 −15.

27. 在 $x=-2$ 取极大值 32；在 $x=\frac{2}{3}$ 取极小值 $-\frac{27}{16}$.

29. 在 $x=-2$ 和 $x=2$ 取极大值 13；在 $x=1$ 和 $x=-1$ 取极小值 4.

31. 在 $x=-3$ 取极小值 −5；在 $x=5$ 取极大值 −1.

33. 在 $x=1$ 取极小值 2；在 $x=20$ 取极大值 $20\frac{1}{20}$.

35. 在 $x=2$ 和 $x=-2$ 取极大值 $\frac{4}{5}$；在 $x=0$ 取极小值 0.

37. 在 $x=-2$ 取极小值 −1；在 $x=26$ 取极大值 3.

39～47. 留给学生.

49. 在 $x=35$ 取极大值 1 225.

51. 在 $x=10$ 取极小值 200.

53. 在 $x=\frac{1}{2}$ 取极大值 $\frac{1}{3}$.

55. 在 $x=\frac{17}{2}$ 取极大值 $\frac{289}{4}$.

57. 在 $x=-\sqrt{3}$ 取极大值 $2\sqrt{3}$；在 $x=\sqrt{3}$ 取极小值 $-2\sqrt{3}$.

59. 在 $x=2\ 400$ 取极大值 5 700.

61. 在 $x=1$ 取极小值 $-55\frac{1}{3}$.

63. 在 $x=20$ 取极大值 2 000；在 $x=0$ 和 $x=30$ 取极小值 0.

65. 在 $x=6$ 取极小值 24.

67. 在 $x=6$ 取极小值 108.

69. 在 $x=-1$ 取极大值 3；在 $x=\frac{1}{2}$ 取极小值 $-\frac{3}{8}$.

71. 在 $x=8$ 取极大值 2；在 $x=0$ 取极小值 0.

73. 没有.

75. 在 $x=1$ 取极大值 −1；在 $x=-1$ 取极小值 −5.

77. 没有.

79. 在 $x=0$ 取极小值 0；在 $x=-1$ 和 $x=1$ 取极大值 1.

81. 没有.

83. 在 $x=2-\sqrt{3}$ 取极大值 $-\frac{10}{3}+2\sqrt{3}$；

在 $x=2+\sqrt{3}$ 取极小值 $-\frac{10}{3}-2\sqrt{3}$.

85. 在 $x=-1$ 和 $x=1$ 取极小值 −1.

87～95. 留给学生.

97. 在从业到 $t=25$ 年取最大值 1430 单位/月.

99. 在 $x=3$ 取最大值 1 500 美元.　101. 1984.

103. a) $A(x)=-\frac{1}{2}x+400-\frac{5\ 000}{x}$；b)100.

105. 在 $x=3$ 取极大值 $3\sqrt{6}$；在 $x=-2$ 取极小值 −2.

107. 7 个质量单位.

111. 在 $x=3$ 取极小值 −17；在 $x=0$ 和 $x=4$ 取极大值 10.

113. 在 $x=-1$ 和 $x=1$ 取极小值 0.

115. a) $y=x+8.857$；15.857 毫米；

b) $y=0.117x^4-1.520x^3+6.193x^2-7.018x+10$；23.888 毫米，7.62 毫米.

上机技术演练，p. 250

1. 20，0；16，64；13.5，87.75；12，96；10，100；8，96；6.8，89.76；0，0.

2. 留给学生.

3. 100，在 $x=10$.

上机技术演练，p. 252

1. 4，0；3.5，3.5；3，12；2.5，22.5；2，32；1.7，35.972；1.5，37.5；1，36；0.6，27.744；0.5，24.5；0，0.

2. 留给学生.

3. 38，在 $x=5\frac{1}{3}$.

上机技术演练，p. 258

1. 留给学生.　2. 23 500 美元，在 $x=100$.

习题 3.5，p. 261

1. 25 和 25；最大乘积 625.

3. 不；$Q=x(50-x)$ 没有极小值.

5. 2 和 −2；最小乘积 −4.

7. $x=\frac{1}{2}$；$y=\sqrt{\frac{1}{2}}$；最大值 $\frac{1}{4}$.

9. $x=3$，$y=2$；最小值 30.

11. $x=2$，$y=\frac{32}{3}$，最大值 $\frac{64}{3}$.

13. 30 码×60 码；最大面积 1 800 平方码.

15. 13.5 英尺×13.5 英尺；182.25 平方英尺.

17. 20 英寸×20 英寸×5 英寸；最大值 2 000 立方英寸.

19. 5 英寸×5 英寸×2.5 英寸；最小值 75 平方英寸.

21. 46 件；最大利润 1 048 美元.

23. 70 件；最大利润 19 美元.

25. 约 1 667 件；最大利润约 5 481 美元.

27. a) $R(x)=150x-0.5x^2$；

2007/08/16

b) $P(x)=-0.75x^2+150x-4\,000$；c) 100 套；

d) 3 500 美元；e) 100 美元.

29. 5.75 美元，72 500.（体育场将接纳多少观众?）

31. 每英亩 25 棵树.

33. a) $D(p)=3.13-0.04p$；b) 39.13 美元.

35. 4 英尺×4 英尺×20 英尺.　**37.** 9%.

39. 每年订货 5 次；批量 20.

41. 每年订货 12 次；批量 30.

43. 每年订货约 13 次；批量 28.

45. 14 英寸×14 英寸×28 英寸.

47. $x=y=\frac{24}{4+\pi}$英尺.　**49.** $\sqrt[3]{\frac{1}{10}}$.

51. 每年订货$\frac{Q}{\sqrt{2bQ/a}}$次；批量$=\sqrt{2bQ/a}$.

53. 在 $x=\frac{24\pi}{\pi+4}\approx 10.56$ 英寸取最小值，$24-x=\frac{96}{\pi+4}\approx 13.45$ 英寸. 如果剪断细绳，则没有最大值. 把最大值在端点理解为细绳未剪断且围成一个圆.

55. S 距 A 约为 4.25 英里.

57. a) $C'(x)=8+\frac{3x^2}{100}$；

b) $A(x)=8+\frac{20}{x}+\frac{x^2}{100}$；

c) $A'(x)=\frac{x}{50}-\frac{20}{x^2}$；

d) 在 $x_0=10$ 取最小值 11，$C'(10)=11$；

e) $A(10)=11$，$C'(10)=11$.

59. 在 $x=2-\sqrt{2}$ 和 $y=-1+\sqrt{2}$ 取最小值 $6-4\sqrt{2}$.

习题 3.6，p. 271

1. $\Delta y=0.040\,1$；$f'(x)\Delta x=0.04$.

3. 0.281 6，0.28.　**5.** −0.556，−1.　**7.** 6，6.

9. $\Delta C=2.01$ 美元，$C'(70)=2$ 美元.

11. $\Delta R=2$ 美元，$R'(70)=2$ 美元.

13. a) $P(x)=-0.01x^2+1.4x-30$；

b) $\Delta P=-0.01$ 美元，$P'(70)=0$.

15. 4.375.　**17.** 10.1.

19. 2.167.　**21.** $dy=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$.

23. $dy=9x^2(2x^3+1)^{1/2}dx$.

25. $dy=\frac{1}{5}(x+27)^{-4/5}dx$.

27. $dy=(4x^3-6x^2+10x+3)dx$.　**29.** $dy=3.1$.

31. −0.01.　**33.** 100.　**35.** 461.4×10 亿美元.

37. a) 1.719 9 米²；b) 0.012 642 米².

39. $\frac{5}{\pi}\approx 1.6$ 英尺.

习题 3.7，p. 276

1. $\frac{1-y}{x+2}$；$-\frac{1}{9}$.　**3.** $-\frac{x}{y}$；$-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. $\frac{6x^2-2xy}{x^2-3y^2}$；$-\frac{36}{23}$.　**7.** $-\frac{y}{x}$.

9. $\frac{x}{y}$.　**11.** $\frac{3x^2}{5y^4}$.

13. $\frac{-3xy^2-2y}{3x+4x^2y}$.　**15.** $\frac{dp}{dx}=\frac{2-p-2xp}{x^2+x-1}$.

17. $\frac{dp}{dx}=\frac{-2}{2p+1}$.　**19.** $\frac{dp}{dx}=-\frac{p+4}{x+3}$.　**21.** $-\frac{3}{4}$.

23. 每天 400 美元，每天 80 美元，每天 320 美元.

25. 每天 16 美元，每天 8 美元，每天 8 美元.

27. $\frac{dx}{dt}=-\frac{33}{28}$.

29. $-\frac{\sqrt{165}}{60\sqrt{70}}\approx -0.025\,6$ 米²/月.

31. a) $1\,000\,R\cdot\frac{dR}{dt}$；b) −0.011 25 毫米²/分.

33. 65 英里/小时.　**35.** $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

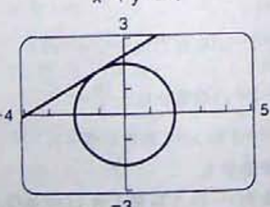
37. $\frac{2}{3y^2(x+1)^2}$.　**39.** $-\frac{9}{4}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}$.

41. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y}{2-x}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2+2y}{(2-x)^2}$.

43. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}$.

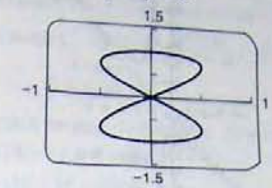
47.

$x^2+y^2=4$



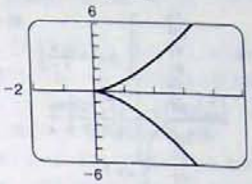
49.

$y^4=y^2-x^2$



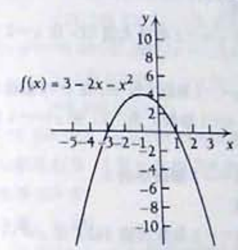
51.

$y^2=x^3$

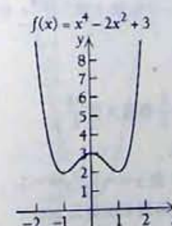


概要与复习：第 3 章，p. 279

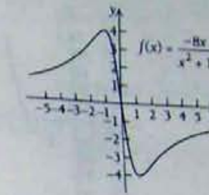
1. [3.1]，[3.2] 在(−1，4)取相对极大值.



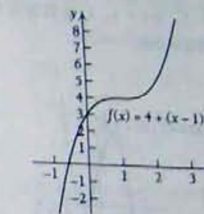
2. [3.1]，[3.2] 在(0，3)取相对极大值；在(−1，2)和(1，2)取相对极小值.



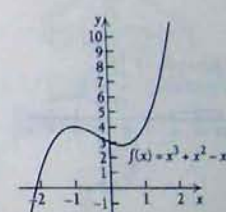
3. [3.1]，[3.2] 在(−1，4)取相对极大值；在(1，−4)取相对极小值.



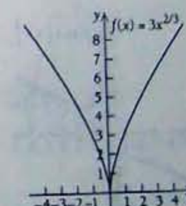
4. [3.1]，[3.2] 没有.



5. [3.1]，[3.2] 在(−1，4)取相对极大值；在$\left(\frac{1}{3},\frac{76}{27}\right)$取相对极小值.

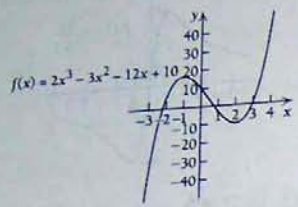


6. [3.1]，[3.2] 在(0，0)取相对极小值.

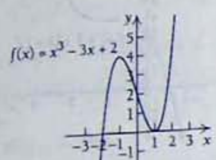


2007/08/16

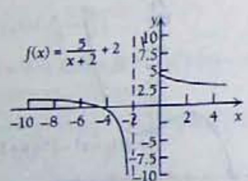
7. [3.1]，[3.2] 在(−1，17)取相对极大值；在(2，−10)取相对极小值.



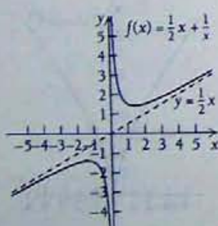
8. [3.1]，[3.2] 在(−1，4)取相对极大值；在(1，0)取相对极小值.



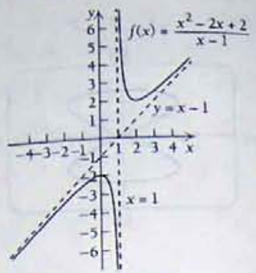
9. [3.3]



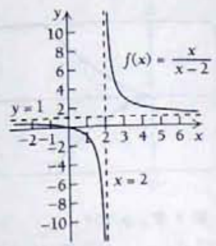
10. [3.3]



11. [3.3]



12. [3.3]

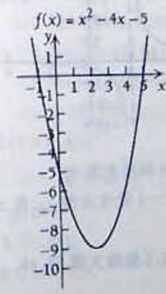


13. [3.4]没有.
14. [3.4]在 $x=-2$ 取极大值 32；在 $x=5$ 取极小值 −17.
15. [3.4]在 $x=-1$ 取极大值 19；在 $x=2$ 取极小值−35.
16. [3.4]在 $x=1$ 取极大值−2；在 $x=-1$ 取极小值 −12.
17. [3.4]在 $x=-1$ 取极小值 3.
18. [3.4]没有.
19. [3.4]在 $x=-3$ 取极大值 163；在 $x=-1$ 取极小值−1.
20. [3.4]在 $x=1$ 取极小值 10.
21. [3.4]在 $x=-4$ 取极大值 $\frac{1\,208}{15}$；在 $x=1$ 取极小值 $\frac{457}{60}$.
22. [3.4]在 $x=\frac{5}{2}$ 取极大值 $\frac{53}{4}$.
23. [3.5]30，30.
24. [3.5]$Q=-1$ 在 $x=-1$，$y=-1$.
25. [3.5]30 件；利润 451 美元.
26. [3.5]10 英尺×10 英尺×25 英尺；1 500 美元.

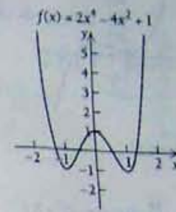
27. [3.5]12 次；30 辆自行车.
28. [3.6]$\Delta y=-0.335\,25$，$f'(x)\Delta x=-0.35$.
29. [3.6] a)$dy=(6x^2+1)dx$；b)$dy=0.25$.
30. [3.6]8.312 5.
31. [3.7]$\frac{2x^2+3y}{-2y^2-3x}$；$\frac{4}{5}$.
32. [3.7]$-1\frac{3}{4}$英尺/秒.
33. [3.7]每天 600 美元，每天 450 美元，每天 150 美元.
34. [3.4]在 $x=3$ 取极小值 0.
35. [3.7]$\frac{3x^2-4x^3-12xy^2}{12x^2y+4y^3-3y^2}$.
36. [3.1]，[3.2] 在(−9，−9 477)取相对极小值；在(0，0)取相对极大值；在(15，−37 125)取相对极小值.
37. [3.1]，[3.2] 在(−1.714，37.445)取相对极大值；在(1.714，−37.445)取相对极小值.
38. [3.1]，[3.2] 在(−3，−1)和(3，−1)取相对极小值；在(0，1.08)取相对极大值.
39. a)线性：$y=6.998\,187\,602x-124.618\,358\,1$；
二次：$y=0.043\,927\,484\,6x^2+2.881\,202\,838x-53.514\,751\,66$；
三次：$y=-0.003\,344\,154\,7x^3+0.479\,564\,360\,5x^2-11.359\,316\,22x+5.276\,985\,809$；
四次：$y=-0.000\,055\,398\,34x^4+0.006\,719\,229\,4x^3-0.099\,673\,585\,7x^2-0.840\,999\,194\,2x-0.246\,072\,967$；
d)在(78.650 443，456.759 83)取绝对极大值；最大值近似为 79 岁左右的 100 000 个女性中约出现 457 个.

测验：第 3 章，p. 281

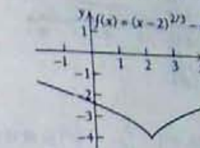
1. [3.1]，[3.2]在(2，−9)取相对极小值.



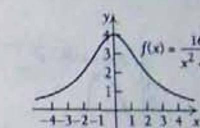
2. [3.1]，[3.2] 在(−1，−1)和(1，−1)取相对极小值；在(0，1)取相对极大值.



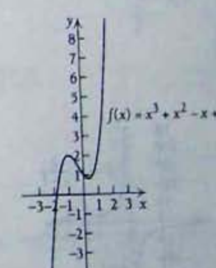
3. [3.1]，[3.2] 在(2，−4)取相对极小值.



4. [3.1]，[3.2] 在(0，4)取相对极大值.

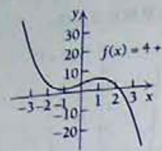


5. [3.1]，[3.2] 在(−1，2)取相对极大值；在$\left(\frac{1}{3}，\frac{22}{27}\right)$取相对极小值.

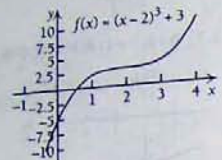


6. [3.1]，[3.2] 在(−1，2)取相对极小值；在(1，6)取相对极大值.

2007/08/16

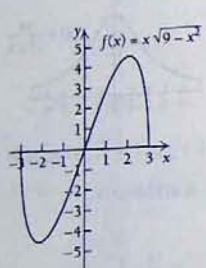


7. [3.1]，[3.2] 没有.

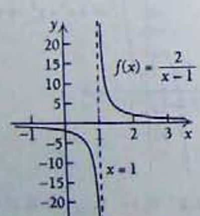


8. [3.1]，[3.2] 在$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},\ -\frac{9}{2}\right)$取相对极小值；

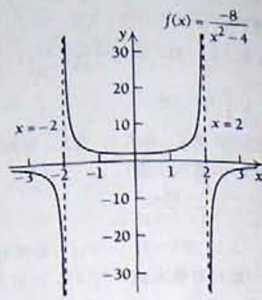
在$\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{9}{2}\right)$取相对极大值.



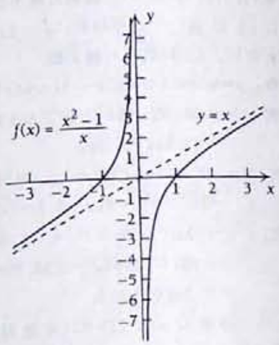
9. [3.3]



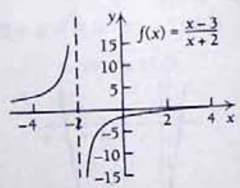
10. [3.3]



11. [3.3]



12. [3.3]



13. [3.4] 在 $x=3$ 取极大值 9.

14. [3.4] 在 $x=-1$ 取极大值 2；在 $x=-2$ 取极小值-1.

15. [3.4] 在 $x=4.3$ 取极大值 28.49.

16. [3.4] 在 $x=-1$ 取极大值 7，在 $x=1$ 取极小值 3.

17. [3.4] 没有.

18. [3.4] 在 $x=\frac{1}{6}$取极小值$-\frac{13}{12}$.

19. [3.4] 在 $x=4$ 取极小值 48.

20. [3.5] 4 和-4.

21. [3.5] $x=5$，$y=-5$；最小值 50.

22. [3.5] 最大利润 24 980 美元；500 件.

23. [3.5] 40 英寸×40 英寸×10 英寸，最大容积 16 000 立方英寸.

24. [3.5] 35 次，批量 35.

25. [3.6] $\Delta y = 1.01$，$f'(x)\Delta x=1$.

26. [3.6] $7+\frac{1}{14}\approx 7.0714$.

27. [3.7] a) $\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3}}$；b) 0.007 559 3.

28. [3.7] $-\frac{x^2}{y^2}$，$-\frac{1}{4}$.

29. [3.7] -0.96 英尺/秒.

30. [3.4] 在 $x=\sqrt[3]{2}$取极大值$\frac{1}{3}\cdot 2^{2/3}$；在 $x=0$ 取极小值 0.

31. [3.5] a) $A(x)=\frac{C(x)}{x}=100+\frac{10}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{100}$；

b) 在 $x=10\,000$ 取最小值 102.

32. [3.1]，[3.2] 在(1.09，25.1)取相对极大值；在(2.97，8.6)取相对极小值.

33. a) 线性：$y=-0.770\,714\,285\,7x+12\,691.607\,14$，

二次：$y=-0.999\,890\,476\,2x^2+299.196\,428\,6x+192.976\,190\,5$，

三次：$y=0.000\,084x^3-1.037\,690\,476x^2+303.396\,428\,6x+129.976\,190\,5$，

四次：$y=-0.000\,001\,966\,061x^4+0.001\,263\,636\,4x^3-1.256\,063\,636x^2+315.824\,740\,3x+66.781\,385\,28$；

d) 22 450；149 000 美元.

第 4 章

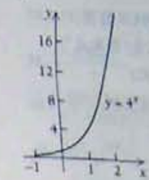
上机技术演练，p. 287

1. 156.993.　2. 16.242.

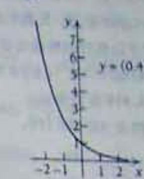
3. 0.064.　4. 0.000 114.

习题 4.1，p. 298

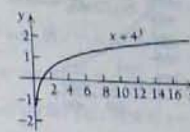
1.



3.



5.



7. $3e^{3x}$.　9. $-10e^{-5x}$.　11. e^{-x}.　13. $-7e^x$.

15. e^{3x}.　17. $x^3e^x(x+4)$.　19. $(x^2+5x-6)e^x$.

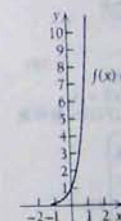
21. $\frac{e^x(x-4)}{x^5}$.　23. $(-2x+7)e^{-x^2+7x}$.

25. $-xe^{-x^2/2}$.　27. $\frac{e^{\sqrt{x-7}}}{2\sqrt{x-7}}$　29. $\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$

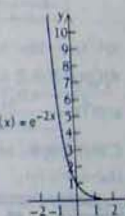
31. $(1-2x)e^{-2x}-e^{-x}+3x^2$.

33. e^{-x}.　35. ke^{-kx}.

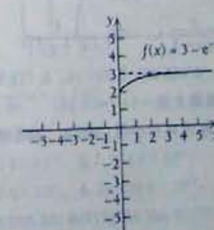
37.



39.



41.



2007/08/16

43－47. 留给学生.

49. $y=x+1$.　51. 留给学生.

53. a)5.162 百万，5.199 百万；b)5.2 百万.

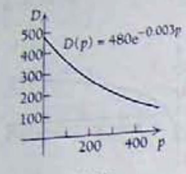
对于以色列的移动电话市场这是“饱和点”.

55. a)$C'(t)=50e^{-t}$；b)50 百万美元；

c)0.916 百万美元.

57. a)约为 335 280 173；

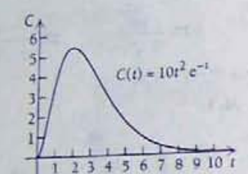
b)



c)$D'(p)=-1.44e^{-0.003p}$.

59. a)百万分之 0，百万分之 3.7，百万分之 5.4，百万分之 4.48，百万分之 0.05；

b)



c)$C'(t)=10te^{-t}(2-t)$；

d)$C\approx$百万分之 5.4，在$t=2$小时时.

61. a)$D'(t)=-\frac{64.608e^{-0.072t}}{(1+29.44e^{-0.072t})^2}$，$D'(t)$=每年死亡率的变化率；b)每千人－0.032 6.

63. $15e^{3x}(e^{3x}+1)^4$.　65. $-e^{-t}-3e^{3t}$.

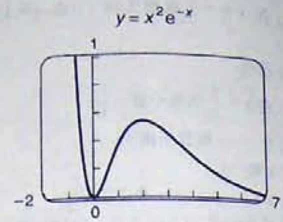
67. $\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.　69. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\sqrt{e^x}$.

71. $\frac{1}{2}e^{x/2}\left[\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right]$.　73. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

75. 2，2.25，2.488 32，2.593 74，2.716 92.

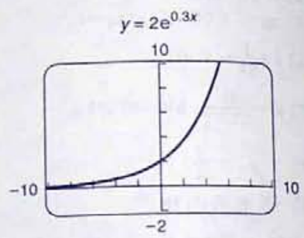
77. 在 $x=2$ 取最大值$=4e^{-2}\approx0.54$.

81. 在(0，0)取相对极小值；在(2，0.54)取相对极大值.

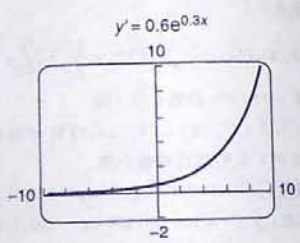


83. 见例 9. $f(x)$，$f'(x)$和 $f''(x)$的图形都是 $y=e^x$ 的图形.

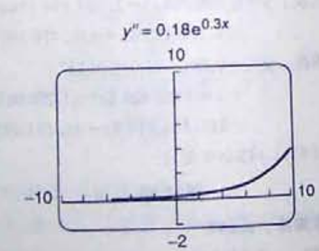
85. a)



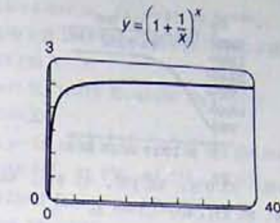
b)



c)



87.



上机技术演练，p. 302

1～4. 留给学生.

上机技术演练，p. 305

1. 1 000，5，0.699，3.

上机技术演练，p. 308

1. 6.9.　2. －4.1.　3. 74.9.

4. 46.2.　5. 38.7.

习题 4.2，p. 314

1. $2^3=8$.　3. $8^{1/3}=2$.　5. $a^J=K$.

7. $10^{-p}=h$.　9. $\log_a b=M$.　11. $\log_{10}100=2$.

13. $\log_{10}0.1=-1$.　15. $\log_M V=p$.　17. 2.708.

19. －1.609.　21. 2.609.　23. 2.995 7.

25. －1.386 3.　27. 4.　29. 8.681 690.

31. －4.006 334.　33. 8.999 619.　35. $t\approx4.6$.

37. $t\approx4.1$.　39. $t\approx2.3$.　41. $t\approx141$.

43. $-\frac{6}{x}$.　45. $x^3(1+4\ln x)-x$.

47. $\frac{1-4\ln x}{x^5}$.　49. $\frac{1}{x}$.　51. $\frac{6x+2}{3x^2+2x-1}$.

53. $\frac{1}{x\ln 4x}$.　55. $\frac{x^2+7}{x(x^2-7)}$.　57. $e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$.

59. $\frac{e^x}{e^x+1}$.　61. $\frac{2\ln x}{x}$.

63. a)1 000；

b)$N'(a)=\frac{200}{a}$，$N'(10)=20$ 件产品/千美元；

c)在 $a=1$ 千美元时取最小值 1 000.

65. 58 天.

67. a)58.69 美元，78.00 美元；

b)$63.80\ e^{-1.1t}$；c)2.7.

69. a)18.1%，69.9%；b)$P'(t)=20e^{-0.2t}$；

c)11.5.

71. a)68%；b)36%；c)3.6%；d)5%；

e)$-\frac{20}{t+1}$；f)在 $t=0$ 取最大值 68%.

73. a)2.37 英尺/秒；b)3.37 英尺/秒；c)$v'(p)=\frac{0.37}{p}$.

75. $\frac{-4(\ln x)^{-5}}{x}$.　77. $\frac{15t^2}{t^3+1}$.　79. $\frac{4[\ln(x+5)]^3}{x+5}$.

81. $\frac{5t^4-3t^2+6t}{(t^3+3)(t^2-1)}$.　83. $\frac{24x+25}{8x^2+5x}$.

85. $\frac{2(1-\ln t^2)}{t^3}$.　87. $x^n\ln x$.　89. $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

91. $\frac{3}{x\ln x}$.　93. 1.　95. $t=\frac{\ln P-\ln P_0}{k}$.

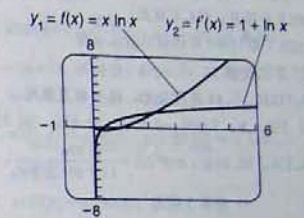
97. 令 $a=\ln x$，则 $e^a=x$，因此 $\log x=\log e^a=a\log e$.

于是 $a=\ln x=\frac{\log x}{\log e}\approx\frac{\log x}{0.434\ 3}\approx2.302\ 6\log x$.

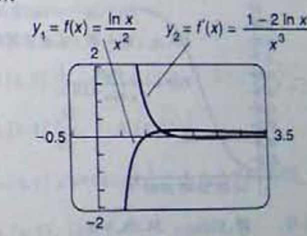
101. $\sqrt[e]{e}\approx1.444\ 667\ 861$，对满足 $x\neq e$ 的任何 $x>0$，$\sqrt[e]{e}>\sqrt[x]{x}$.

103. ∞.

105.



107.



109. $2-\frac{1}{2e}\approx-0.184$.

上机技术演练，p. 323

1. $6.532\ 2\times10^{10}$.　2. $7.064\ 4\times10^{10}$.

3. $8.262\ 6\times10^{10}$.　4. $13.220\ 4\times10^{10}$.

5. $y=6\ 172.367\ 867(1.059\ 990\ 837)^x$.

2007/08/16

$P(t)=6\,172.4e^{0.058t}$，5.8%.

6. 11 716 美元；26 485 美元；113 647 美元.

习题 4.3，p. 328

1. $Q(t)=Q_0e^{kt}$.

3. a) $N(t)=50e^{0.1t}$；b) 369；c) 6.9 年.

5. a) $P(t)=P_0e^{0.065t}$；b) 1 067.16 美元，1 138.83 美元；c) 10.7 年.

7. 6.9%. 9. 6.9 年 (2006).

11. 11.2 年；102 256.88 美元.

13. 7 500 美元；8.3 年.

15. a) $k=0.161\,602$；$V(t)=84\,000e^{0.161\,602t}$ 美元；
b) 271 283 000 美元；c) 4.3 年；d) 58 年.

17. a) $k\approx0.064\,45$，$P(t)=2\,283e^{0.064\,45t}$，其中 $P(t)$ 以美元计，t=在 1960 年之后的年数；
b) 109 125 美元；c) 2 011；d) 10.75 年.

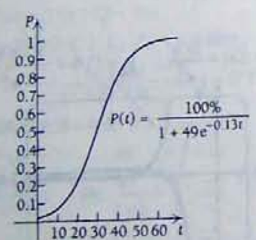
19. a) $y=0.109\,785\,424\,8(1.442\,743\,433)^x$，$P(t)=0.1e^{0.367t}$；$k=0.367$；
b) 17.0 百万，154.1 百万；
c) 20.7 年(1990 年以后)；d) 1.9 年.

21. 527 万亿美元.

23. 13.745%，5.44 百万美元，14.2 百万美元.

25. a) 2%；b) 3.8%，7.0%，21.6%，50.2%，93.1%，98.03%；c) $P'(t)=\dfrac{6.37e^{-0.13t}}{(1+49e^{-0.13t})^2}$；

d)



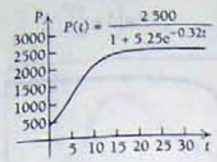
27. 19.8 年. 29. 10%. 31. 24.8 年.

33. a) $P(t)=281e^{0.009t}$；
b) 322 百万；c) 77 年.

35. 0.20%. 37. a) 约为 2.2%.

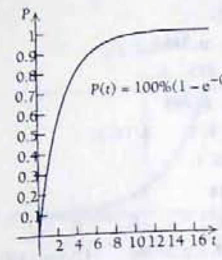
39. a) 400，520，1 214，2 059，2 396，2 478；
b) $P'(t)=\dfrac{4\,200e^{-0.32t}}{(1+5.25e^{-0.32t})^2}$；

c)



41. a) 0%，33.0%，55.1%，69.9%，86.5%，99.2%，99.8%；b) $P'(t)=0.4e^{-0.4t}$；

c)



43. 7.573%. 45. 9%. 47. $T_3=\dfrac{\ln3}{k}$.

49. 答案依赖于特定的数据.

51. 每小时 $\dfrac{\ln2}{24}\approx2.9\%$.

习题 4.4，p. 340

1. 15 059.71 美元. 3. 35 957.75 美元.

5. 每台 403.73 美元，6 台立体声音响.

7. 27 194.82 美元.

9. a) $y=(34\,001.786\,97)(0.670\,297\,771\,9)^x$，$V(t)=34\,001.786\,97e^{-0.4t}$；b) 2 068 美元，623 美元；
c) 8.8 年；d) 1.7 年.

11. f). 13. b). 15. c). 17. 每年 3.2%.

19. 每年 2.8%. 21. 每年 0.003%.

23. 9.9 克. 25. 19 109 年. 27. 7 604 年.

29. a) $A=A_0e^{-kt}$；b) 9 小时.

31. a) 0.8%；b) 78.7%W_0.

33. a) 25%I_0，6%I_0，1.5%I_0；
b) 0.000 08%I_0.

35. a) 25°；b) $k=0.05$；c) 84.2°；
d) 32 分钟.

37. 晚上 7 点.

39. a) $k=0.010\,26$，$P(t)=51.9e^{-0.010\,26t}$，其中 t 是 1995 年以后的年数；b) 42.3 百万；
c) 1 731 年.

41. a) 11 瓦；b) 173 天；c) 402 天；
d) 50 瓦.

43. a) $y=84.943\,539\,92-0.541\,283\,409\,8\ln x$；
b) 83.8%，83.7%，83.2%，83.0%；
c) 230 个月.

45. (166.16，292).

习题 4.5，p. 348

1. $e^{6.437\,8}$. 3. $e^{12.238}$. 5. $e^{k\cdot\ln4}$.

7. $e^{kT\cdot\ln8}$. 9. $(\ln6)6^x$. 11. $(\ln10)10^x$.

13. $(6.2)^x[x\ln6.2+1]$. 15. $10^xx^2[x\ln10+3]$.

17. $\dfrac{1}{\ln4}\cdot\dfrac{1}{x}$. 19. $\dfrac{2}{\ln10}\cdot\dfrac{1}{x}$.

21. $\dfrac{1}{\ln10}\cdot\dfrac{1}{x}$. 23. $x^2\left[\dfrac{1}{\ln8}+3\log_8x\right]$.

25. $8e^{8x}$. 27. $\dfrac{x4^x\ln4-4^x}{x^2}$.

29. a) $-250\,000(\ln4)\left(\dfrac{1}{4}\right)^t$.

31. a) 17 053×10 亿美元；b) 每年 914×10 亿美元；
c) 2005 年债务的增长速度.

33. 5.

35. a) $I=10^7\cdot I_0$；b) $I=10^8\cdot I_0$；
c) b) 中的密度是 20 乘 a) 中的密度；
d) $\dfrac{dI}{dR}=(I_0\cdot\ln10)\cdot10^R$.

37. a) $\dfrac{1}{\ln10}\cdot\dfrac{1}{I}$.

39. a) $\dfrac{m}{\ln10}\cdot\dfrac{1}{x}$.

41. $2(\ln3)3^{2x}$. 43. $(\ln x+1)x^x$.

45. $x^{e^x}e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$. 47. $\dfrac{1}{\ln a}\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

上机技术演练，p. 352

1. $E(p)=\dfrac{p}{300-p}$，$R(p)=p(300-p)$.

2. 留给学生.

3. 150 美元；最大收益为 22 500 美元.

习题 4.6，p. 354

1. a) $E(p)=\dfrac{p}{400-p}$；
b) $E(125)=\dfrac{5}{11}$，无弹性；c) $p=200$ 美元.

3. a) $E(p)=\dfrac{p}{50-p}$；
b) $E(46)=\dfrac{23}{2}$，有弹性；c) $p=25$ 美元.

5. a) 对于一切 $p>0$，$E(p)=1$；
b) $E(50)=1$，单位弹性；
c) 对于一切 $p>0$，总收益 $=R(p)=400$，对于一切 $p>0$，有最大值 400.

7. a) $E(p)=\dfrac{p}{1\,200-2p}$；
b) $E(100)=0.1$，无弹性；c) $p=400$ 美元.

9. a) $E(p)=\dfrac{p}{4}$；b) $E(10)=\dfrac{5}{2}$，有弹性；
c) $p=4$ 美元.

11. a) $E(p)=\dfrac{2p}{p+3}$；b) $E(1)=\dfrac{1}{2}$，无弹性；
c) $p=3$ 美元.

13. a) $E(p)=\dfrac{25p}{967-25p}$；b) $p=19.34$ 美分；
c) $p>19.34$ 美分；d) $p<19.34$ 美分；
e) $p=19.34$ 美分；f) 减少.

15. a) $E(p)=\dfrac{3p^3}{2(200-p^3)}$；b) $\dfrac{81}{346}\approx0.234$；
c) 增加.

17. a) $E(p)=n$；b) 不，依赖于常数 n；
c) 仅当 $n=1$ 时.

19. $E(p)=-pL'(p)$.

概要与复习：第 4 章，p. 356

1. [4.2] $\dfrac{1}{x}$. 2. [4.1] e^x. 3. [4.2] $\dfrac{4x^3}{x^4+5}$.

4. [4.1] $\dfrac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$. 5. [4.2] $\dfrac{1}{2x}$.

6. [4.1] $x^3e^{4x}(4+3x)$. 7. [4.2] $\dfrac{1-3\ln x}{x^4}$.

8. [4.1]，[4.2] $e^{x^2}\left(\dfrac{1}{x}+2x\ln4x\right)$.

9. [4.1]，[4.2] $4e^{4x}-\dfrac{1}{x}$. 10. [4.2] $8x^3-\dfrac{8}{x}$.

11. [4.1]，[4.2] $\dfrac{1-x}{e^x}$. 12. [4.2] 6.930 0.

13. [4.2] −3.269 8. 14. [4.2] 8.760 1.

15. [4.2] 3.259… 16. [4.2] 2.549 95

2007/08/16

17. [4.2] -3.6602. 18. [4.3] $Q(t)=Q_0e^{kt}$.

19. [4.3] 4.3%. 20. [4.3] 10.2 年.

21. [4.3] a) $k=0.050\,991$, $C(t)=4.65\,e^{0.050\,991t}$;

b) 32.28 美元，46.13 美元.

22. [4.3] a) $N(t)=60e^{0.12t}$; b) 123; c) 5.8 年.

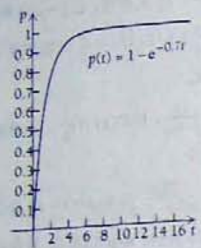
23. [4.4] 5.3 年. 24. [4.4] 每天 18.2%.

25. [4.4] a) $A(t)=800e^{-0.07t}$; b) 197 克;

c) 9.9 天.

26. [4.3] a) 0.503 4，0.753 4，0.969 8，0.999 1，0.999 9; b) $p'(t)=0.7e^{-0.7t}$.

d)



27. [4.4] 34 735.26 美元.

28. [4.5] $(\ln 3)3^x$. 29. [4.5] $\frac{1}{\ln 15}\cdot\frac{1}{x}$.

30. [4.6] a) $E(p)=\frac{2p}{p+4}$;

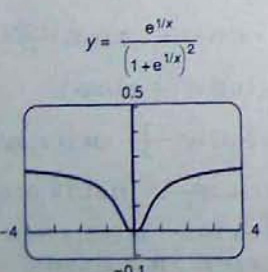
b) $E(1)=\frac{2}{5}$，无弹性;

c) $E(12)=\frac{3}{2}$，有弹性;

d) 减少; e) $p=4$ 美元.

31. [4.1] $\frac{-8}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}$. 32. [4.2] $-\frac{1}{1\,024e}$.

33. [4.1]



34. [4.1] 0.

35. [4.3] a) $y=(0.979\,050\,351)(2.120\,505\,653)^t$, $P(t)=0.979e^{0.752t}$; b) 36 562×10 亿美元，67 441 854×10 亿美元; c) 4.9 年; d) 0.9 年.

测验：第 4 章，p. 358

1. [4.1] $6e^{3x}$. 2. [4.2] $\frac{1}{x}$.

3. [4.1] $-2xe^{-x^2}$. 4. [4.2] $\frac{1}{x}$.

5. [4.1] e^x-15x^2. 6. [4.1]，[4.2] $3e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$.

7. [4.1]，[4.2] $\frac{e^x-3x^2}{e^x-x^3}$.

8. [4.1]，[4.2] $\frac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}$，或 $\frac{1-x\ln x}{xe^x}$.

9. [4.2] 1.067 4. 10. [4.2] 0.555 4.

11. [4.2] 0.405 7. 12. [4.3] $M(t)=M_0e^{kt}$.

13. [4.3] 每小时 21.3%. 14. [4.3] 10 年.

15. [4.3] a) 0.033 032 6，$C(t)=0.54e^{0.033\,032\,6t}$ 美元; b) 3.79 美元，5.28 美元.

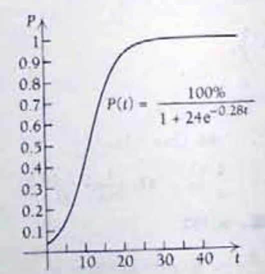
16. [4.3] a) $A(t)=3e^{-0.1t}$; b) 1.1cc; c) 6.9 年.

17. [4.4] 63 天. 18. [4.4] 每年 0.000 069%.

19. [4.4] a) 4%; b) 5.2%，14.5%，40.7%，73.5%，91.8%，99.5%，99.9%;

c) $P'(t)=\frac{6.72e^{-0.28t}}{(1+24e^{-0.28t})^2}$;

e)



20. [4.4] 28 503.49 美元.

21. [4.5] $(\ln 20)20^x$. 22. [4.5] $\frac{1}{x\ln 20}$.

23. [4.6] a) $E(p)=\frac{p}{5}$; b) $E(3)=\frac{3}{5}$，无弹性;

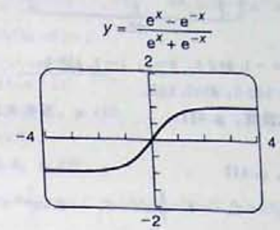
c) $E(18)=\frac{18}{5}$，有弹性;

d) 增加; e) $p=5$ 美元.

24. [4.2] $(\ln x)^2$.

25. [4.2] 在 $x=4$ 取极大值 $256/e^4\approx4.69$，在 $x=0$ 取极小值 0.

26. [4.1]



27. [4.1] 0.

28. [4.3] a) $y=706\,278.268\,3(1.074\,556\,64)^x$, $y=706\,278e^{0.072x}$; b) 1 451 001 美元; 6 124 236 美元; c) 101 年; d) 9.6 年.

第 5 章

习题 5.1，p. 371

1. $\frac{x^7}{7}+C$. 3. $2x+C$. 5. $\frac{4}{5}x^{5/4}+C$.

7. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+C$. 9. $\frac{2t^3}{3}+\frac{5t^2}{2}-3t+C$.

11. $\frac{5}{8}e^{8x}+C$. 13. $\frac{x^4}{4}-\frac{7}{15}x^{15/7}+C$.

15. $1\,000\ln x+C$. 17. $-x^{-1}+C$. 19. $\frac{2}{3}x^{3/2}+C$.

21. $-18x^{1/3}+C$. 23. $-4e^{-2x}+C$.

25. $\frac{1}{3}x^3-x^{3/2}-3x^{-1/3}+C$.

27. $3x^3+6x^2+4x+C$. 29. $f(x)=\frac{x^2}{2}-3x+13$.

31. $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x+7$.

33. $D(t)=17\,198+1\,975t-595t^2+199t^3-17\,825t^4$.

35. $C(x)=\frac{x^4}{4}-x^2+100$.

37. a) $R(x)=\frac{x^3}{3}-3x$.

39. $D(p)=\frac{4\,000}{p}+3$.

41. a) $E(t)=30t-5t^2+32$;

b) $E(3)=77\%$，$E(5)=57\%$.

43. $s(t)=t^3+4$. 45. $v(t)=2t^2+20$.

47. $s(t)=-\frac{1}{3}t^3+3t^2+6t+10$.

49. $s(t)=-16t^2+v_0t+s_0$. 51. $\frac{1}{4}$ 英里.

53. a) $M(t)=-0.001t^3+0.1t^2$;

b) 大约 6 个单词.

55. $f(t)=\frac{t^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}+8$. 57. $\frac{x^6}{6}-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+C$.

59. $\frac{2}{5}t^{5/2}+4t^{3/2}+18\sqrt{t}+C$.

61. $\frac{t^4}{4}+t^3+\frac{3}{2}t^2+t+C$，或 $\frac{(t+1)^4}{4}+C$.

63. $\frac{b}{a}e^{ax}+C$. 65. $\frac{12}{7}x^{7/3}+C$.

67. $\frac{t^3}{3}-t^2+4t+C$.

上机技术演练，p. 384

1. 0. 2. 13.75. 3. 0.535.

4. 27.972. 5. −260.

习题 5.2，p. 385

1. 8. 3. 8. 5. $41\frac{2}{3}$. 7. $\frac{1}{4}$. 9. $10\frac{2}{3}$.

11. $e^3-1\approx19.086$. 13. $3\ln 6\approx5.375$.

15. 0; x 轴上面的面积等于 x 轴下面的面积.

17. $-\frac{4}{15}$; x 轴下面的面积.

19~35. 留给学生. 37. e^b-e^a. 39. b^3-a^3.

41. $\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}$. 43. $\frac{8}{3}$. 45. $-\frac{1\,275}{34}$. 47. 4.

49. $9\frac{5}{6}$. 51. 12. 53. $e^3-\frac{1}{e}$.

57. $3\frac{1}{2}$. 59. $359\frac{7}{15}$. 61. $6\frac{3}{4}$.

63. $\frac{307}{6}$. 65. $\frac{15}{4}$.

67. 8. 69. 12. 73. 6.25.

75. 529.36. 77. 10.60. 79. 6.28.

81. $885.\overline{3}$. 83. 1.51.

上机技术演练，p. 395

1. [illegible] 在[0, 2]上 $f(x)$ 的值从 0 增

2007/08/16

加到 16，我们仍然不能认为平均值是 8，因为由图形可见，在多于一半的区间上 $f(x)$ 小于 8.

习题 5.3，p. 395

1. a) 1.491 4；b) 1.141 8；c) 0.857 1.
3. 原函数，速度.
5. 原函数，在时间 t 使用的能量.
7. 原函数，总收益.
9. 原函数，血液中药物总量.
11. 原函数，在时间 t 记住的单词数.

13. 0.　15. $e-1$.　17. $\frac{4}{3}$.

19. $m+1$.　21. $\frac{1}{n+1}$.

23. a) 2 948.26 美元；b) 2 913.90 美元；
c) $k=6.9$，因此将在第 7 天.

25. 6 300 美元.　27. 68 676 000 美元.

29. a) 每分钟 90 个单词；
b) 在 $t=1$ 时每分钟 96 个单词；
c) 每分钟 70 个单词.

31. 10 312.8×10 亿美元.　33. 90.

35. a) 42.03 微克/毫升；
b) 22.4 微克/毫升.

37. a) $\frac{95}{3}\approx 31.7°$；b) $-10°$；c) $46.25°$.

39. 9 个单词.　41. 256.8 百万.

43. a) 100，10 小时；b) $33\frac{1}{3}$.

45. 47.5.　47. 5.333.　49. 2.159.

习题 5.4，p. 406

1. $\frac{1}{4}$.　3. $\frac{9}{2}$.　5. $\frac{125}{6}$.

7. $\frac{9}{2}$.　9. $\frac{3}{10}$.　11. $\frac{125}{3}$.

13. $\frac{32}{3}$.　15. 3.　17. $\frac{256}{3}$.　19. 128.

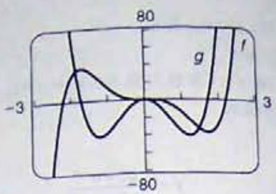
21. 0.　23. $17\frac{1}{3}$.　25. a) B；b) 2.

27. $\frac{(e-1)^2}{e}$，或 ≈ 1.086.　29. $\frac{2}{3}$.

31. 96.　33. $\frac{\pi pR^4}{8Lv}$.　35. 24.961.

37. 16.708 3.

39. a)



b) $a=-1.8623$，$b=0$，$c=1.4594$；
c) 64.523 9；d) 17.683.

上机技术演练，p. 411

1. $62.\overline{03}$.

习题 5.5，p. 412

1. $\ln(7+x^3)+C$.　3. $\frac{1}{7}e^{7x}+C$.　5. $2e^{x/2}+C$.

7. $\frac{1}{4}e^{x^4}+C$.　9. $-\frac{1}{3}e^{-t^3}+C$.

11. $\frac{(\ln 4x)^2}{2}+C$.　13. $\ln(1+x)+C$.

15. $-\ln(4-x)+C$.　17. $\frac{1}{24}(t^3-1)^8+C$.

19. $\frac{1}{8}(x^4+x^3+x^2)^8+C$.　21. $\ln(4+e^x)+C$.

23. $\frac{1}{4}(\ln x^2)^2+C$，或 $(\ln x)^2+C$.　25. $\ln(\ln x)+C$.

27. $\frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2}+C$.　29. $\frac{b}{a}e^{ax}+C$.

31. $\frac{-1}{4(1+x^3)^4}+C$.　33. $-2(1-x^2)^{3/4}+C$.

35. $e-1$.　37. $\frac{21}{4}$.　39. $\ln 5$.　41. $\ln 19$.

43. $1-\frac{1}{e^b}$.　45. $1-\frac{1}{e^{mb}}$.　47. $\frac{208}{3}$.

49. $\frac{1\,640}{6\,561}$.　51. $\frac{315}{8}$.　53. 留给学生.

55. a) $P(T)=2\,000T^2+[-250\,000(e^{-0.1T}-1)]-250\,000$，或 $2\,000T^2-250\,000e^{-0.1T}$；
b) $P(10)=108\,030$ 美元.

57. a) $\frac{100\,000}{0.025}(e^{2.475}-1)\approx 43\,526\,828$；
b) $\frac{100\,000}{0.025}(e^{2.475}-e^2)\approx 17\,970\,604$.

59. $\frac{128}{3}$.　61. $-\frac{5}{12}(1-4x^2)^{3/2}+C$.

63. $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$.　65. $-e^{1/t}+C$.

67. $-\frac{1}{3}(\ln x)^{-3}+C$.　69. $\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2}+C$.

71. $\frac{3}{4}(x^2-6x)^{2/3}+C$.　73. $t+\frac{1}{t+1}+C$.

75. $x+2\ln(x+1)+C$.

77. $-\frac{1}{n-1}(\ln x)^{-n+1}+C$.　79. $\ln(e^x+e^{-x})+C$.

81. $\ln[\ln(\ln x)]+C$.

83. $\frac{9(7x^2+9)^{n+1}}{14(n+1)}+C$.

上机技术演练，p. 418

1. 1.940 7.

习题 5.6，p. 420

1. $xe^{5x}-\frac{1}{5}e^{5x}+C$.　3. $\frac{1}{2}x^6+C$.

5. $\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$.　7. $-\frac{x}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$.

9. $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$.　11. $\frac{1}{2}x^2\ln\sqrt{x}-\frac{x^2}{8}+C$.

13. $(x+3)\ln(x+3)-x+C$. 令 $u=\ln(x+3)$，$dv=dx$，且选择 $v=x+3$ 作为 v 的原函数.

15. $\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-2x+C$.

17. $\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}+x+C$.

19. $\frac{2}{3}x(x+2)^{3/2}-\frac{4}{15}(x+2)^{5/2}+C$.

21. $\frac{x^4}{4}\ln 2x-\frac{x^4}{16}+C$.　23. $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$.

25. $\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C$.

27. $e^{-2x}\left(-\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)+C$.

29. $e^{3x}\left[\frac{1}{3}(x^4+1)-\frac{4}{9}x^3+\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{27}x+\frac{8}{81}\right]+C$.

31. $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$.　33. $9\ln 9-5\ln 5-4$.　35. 1.

37. $C(x)=\frac{8}{3}x(x+3)^{3/2}-\frac{16}{15}(x+3)^{5/2}$.

39. a) $10[e^{-T}(-T-1)+1]$；b) ≈ 9.084.

41. $\frac{2}{9}x^{3/2}[3\ln x-2]+C$.　43. $\frac{e^t}{t+1}+C$.

45. $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$.

47. $(13t^2-48)\left[\frac{5}{16}(4t+7)^{4/5}\right]-t\left[\frac{325}{288}(4t+7)^{9/5}\right]+\frac{1\,625}{16\,128}(4t+7)^{14/5}+C$.

49. 令 $u=x^n$，$dv=e^x dx$，则 $du=nx^{n-1}dx$，$v=e^x$，然后使用分部积分.

53. 355 986.

习题 5.7，p. 426

1. $\frac{1}{9}e^{-3x}(-3x-1)+C$.　3. $\frac{5^x}{\ln 5}+C$.

5. $\frac{1}{8}\ln\left(\frac{4+x}{4-x}\right)+C$.　7. $5-x-5\ln(5-x)+C$.

9. $\frac{1}{5(5-x)}+\frac{1}{25}\ln\left(\frac{x}{5-x}\right)+C$.

11. $(\ln 3)x+x\ln x-x+C$.

13. $\frac{x^5e^{5x}}{5}-\frac{4}{25}x^4e^{5x}+\frac{12}{125}x^3e^{5x}-\frac{24}{3\,125}e^{5x}(5x-1)+C$.

15. $x^4\left(\frac{1}{4}\ln x-\frac{1}{16}\right)+C$.　17. $\ln(x+\sqrt{x^2+7})+C$.

19. $\frac{2}{5-7x}+\frac{2}{5}\ln\left(\frac{x}{5-7x}\right)+C$.

21. $-\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right|+C$.

23. $m\sqrt{m^2+4}+4\ln(m+\sqrt{m^2+4})+C$.

25. $\frac{5\ln x}{2x^2}+\frac{5}{4x^2}+C$.

27. $x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x+C$.

29. $\frac{1}{15}(3x-1)(1+2x)^{3/2}+C$.

31. $S(p)=100\left[\frac{20}{20-p}+\ln(20-p)\right]$.

33. $-4\ln\left(\frac{x}{3x-2}\right)+C$.

35. $\frac{1}{-2(x-2)}+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)+C$.

37. $\frac{-3}{(e^{-x}-3)}+\ln(e^{-x}-3)+C$.

概要与复习：第 5 章，p. 427

1. [5.1] $4x^5+C$.　2. [5.1] $3e^x+2x+C$.

3. [5.1] $t^3+\frac{7}{2}t^2+\ln t+C$.　4. [5.2] 9.

5. [5.2] $\frac{62}{3}$.

6. [5.3] 在 t 分钟内所写单词的总数；原函数.

7. [5.3] 在第 t 天结束时的总销售额；原函数.

8. [5.2] $\frac{1}{6}(b^6-a^6)$. 9. [5.2] $-\frac{2}{5}$.

10. [5.2] $e-\frac{1}{2}$. 11. [5.2] 2ln4.

12. [5.2] 0. 13. [5.2]非负的. 14. [5.2] 正的.

15. [5.4] $\frac{27}{2}$. 16. [5.5] $\frac{1}{4}e^{x^4}+C$.

17. [5.5] $\ln(4t^6+3)+C$. 18. [5.5] $\frac{1}{4}(\ln 4x)^2+C$.

19. [5.5] $-\frac{2}{3}e^{-3x}+C$.

20. [5.6] $e^{3x}\left(x-\frac{1}{3}\right)+C$.

21. [5.6] $-\frac{2x}{3}+x\ln x^{2/3}+C$.

22. [5.6] $x^3\ln x-\frac{x^3}{3}+C$.

23. [5.7] $\frac{1}{14}\ln\left(\frac{7+x}{7-x}\right)+C$.

24. [5.7] $\frac{1}{5}x^2e^{5x}-\frac{2}{25}xe^{5x}+\frac{2}{125}e^{5x}+C$.

25. [5.7] $\frac{1}{49}+\frac{x}{7}-\frac{1}{49}\ln(7x+1)+C$.

26. [5.7] $\ln(x+\sqrt{x^2-36})+C$.

27. [5.7] $x^7\left(\frac{\ln x}{7}-\frac{1}{49}\right)+C$.

28. [5.7] $\frac{1}{64}e^{8x}(8x-1)+C$. 29. [5.3] 3.667.

30. [5.3] $\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{e^2}\right)$. 31. [5.3] 80.

32. [5.5] $e^{12}-1$，或约为 162 754 美元.

33. [5.6] $e^{0.1x}(10x^3-300x^2+6\,000x-60\,000)+C$.

34. [5.5] $\ln(4t^3+7)+C$.

35. [5.7] $\frac{2}{75}(5x-8)\sqrt{4+5x}+C$.

36. [5.5] $e^{x^5}+C$. 37. [5.5] $\ln(x+9)+C$.

38. [5.5] $\frac{1}{96}(t^8+3)^{12}+C$.

39. [5.6] $x\ln 7x-x+C$.

40. [5.6] $\frac{x^2}{2}\ln 8x-\frac{x^2}{4}+C$.

41. [5.5]，[5.7] $\frac{1}{10}[\ln(t^5+3)]^2+C$.

42. [5.5] $-\frac{1}{2}\ln(1+2e^{-x})+C$.

43. [5.5]，[5.6]，[5.7] $(\ln\sqrt{x})^2+C$.

44. [5.6]，[5.7] $\frac{x^{92}}{92}\left(\ln x-\frac{1}{92}\right)+C$.

45. [5.6] $(x-3)\ln(x-3)-(x-4)\ln(x-4)+C$.

46. [5.5] $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+C$. 47. [5.4] 1.333.

测验：第 5 章，p. 428

1. [5.1] $x+C$. 2. [5.1] $200x^5+C$.

3. [5.1] $e^x+\ln x+\frac{8}{11}x^{11/8}+C$.

4. [5.2] $\frac{1}{6}$. 5. [5.2] 4ln3.

6. [5.3] 原函数，在 t 分钟所打的单词总数.

7. [5.2] 12. 8. [5.2] $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^2}-1\right)$.

9. [5.2] $\ln a$. 10. [5.2] 正的.

11. [5.5] $\ln|x+11|+C$. 12. [5.5] $-2e^{-0.5x}+C$.

13. [5.5] $\frac{1}{40}(t^4+1)^{10}+C$.

14. [5.6] $\frac{x}{5}e^{5x}-\frac{e^{5x}}{25}+C$.

15. [5.6] $\frac{x^4}{4}\ln x^4-\frac{x^4}{4}+C$. 16. [5.7] $\frac{2^x}{\ln 2}+C$.

17. [5.7] $\frac{1}{7}\ln\left(\frac{x}{7-x}\right)+C$. 18. [5.3] 6.

19. [5.4] $\frac{1}{3}$. 20. [5.3] 95.

21. [5.3] 49 000 美元. 22. [5.3] 94 个单词.

23. [5.7] $\frac{1}{10}\ln\left(\frac{x}{10-x}\right)+C$.

24. [5.6] $e^x(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120)+C$.

25. [5.5] $\frac{1}{6}e^{x^6}+C$.

26. [5.6] $\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x-\frac{4}{9}x^{3/2}+C$.

27. [5.6]，[5.7] $\frac{1}{15}(3x^2-8)(x^2+4)^{3/2}+C$.

28. [5.7] $\frac{1}{16}\ln\left(\frac{8+x}{8-x}\right)+C$.

29. [5.6] $-e^{-0.1x}(10x^4+400x^3+12\,000x^2+240\,000x+2\,400\,000)+C$.

30. [5.6] $\frac{x^2}{2}\ln 13x-\frac{x^2}{4}+C$.

31. [5.5] $\frac{(\ln x)^4}{4}-\frac{4}{3}(\ln x)^3+5\ln x+C$.

32. [5.5] $(x+3)\ln(x+3)-(x+5)\ln(x+5)+C$

33. [5.7] $\frac{3}{10}(8x^3+10)(5x-4)^{2/3}-\frac{108}{125}x^2(5x-4)^{5/3}+\frac{81}{625}x(5x-4)^{8/3}-\frac{243}{34\,375}(5x-4)^{11/3}+C$.

34. [5.4] 8.

第 6 章

上机技术演练，p. 434

1. (2，9).

习题 6.1，p. 439

1. a)(6，5)；b)15 美元；c)9 美元.

3. a)(1，9)；b)3.33 美元；c)1.67 美元.

5. a)(3，9)；b)36 美元；c)18 美元.

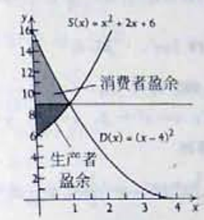
7. a)(50，500)；b)12 500 美元；c)6 250 美元.

9. a)(2，3)；b)2 美元；c)0.35 美元.

11. a)(100，10)；b)1 000 美元；
c)333.33 美元.

13. a)(5，0.61)；b)86.36 美元；
c)2.45 美元.

17. a)(1，9)；
b)



c)3.33 美元；d)1.67 美元.

19. a)线性；b)$y=-2.5x+22.5$；
c)45 美元；d)24.20 美元.

上机技术演练，p. 441

1. $f(0)=1\,000$ 美元，$f(1)=1\,083.29$ 美元，
$f(2)=1\,173.51$ 美元，$f(3)=1\,271.25$ 美元.

上机技术演练，p. 441

1. 3 390.61 美元.

习题 6.2，p. 446

1. 131 美元. 3. 5 610.72 美元.

5. 340 754.12 美元. 7. 949.94 美元.

9. 259.37 美元. 11. 8 264.94 美元.

13. 60 653 美元. 15. 17 802.91 美元.

17. 966 112.17 美元. 19. 752 848 美元.

21. 1 421 397 美元. 23. 7 302.6 百万吨.

25. 52 年(2053). 27. 19.994 磅.

29. a)$k=1.56\%$；b)37.3×10 亿桶；
c)28.8 年(2029).

31. 2 383 120 美元. 33. 125.30 美元.

37. 面积和连续资金流量是相同的，两者都是 5 610.72.

上机技术演练，p. 449

1. 1.

上机技术演练，p. 449

1. ∞.

习题 6.3，p. 452

1. 收敛，$\frac{1}{3}$. 3. 发散. 5. 收敛，1.

7. 收敛，$\frac{1}{2}$. 9. 发散. 11. 收敛，5.

13. 发散. 15. 发散. 17. 发散.

19. 收敛，1. 21. 收敛，$\frac{1\,000}{\pi^{0.001}}$. 23. 发散.

25. $\frac{1}{2}$. 27. 1. 29. 45 000 美元.

31. 6 250 美元. 33. 4 500 美元. 35. 62 500 美元.

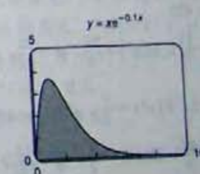
37. 900 000 美元. 39. 33 333 磅.

41. a)每年 $k=420.963\%$；b)0.702 858 雷姆；
c)2.375 51 雷姆.

43. 发散. 45. 收敛，2. 47. 收敛，$\frac{1}{2}$.

49. $\frac{1}{k^2}$；药物的总剂量.

53.



55. 1.25.

习题 6.4，p. 464

1. $\int_0^1 2x\,dx=[x^2]_0^1=1^2-0^2=1$.

2007/08/16

3. $\int_3^8 \frac{1}{5}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x\right]_3^8 = \frac{1}{5}(8-3) = 1.$

5. $\int_1^3 \frac{3}{26}x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{26}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{26}(3^3-1^3) = 1.$

7. $\int_1^e \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1-0 = 1.$

9. $\int_{-1}^1 \frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1$

$= \frac{1}{2}(1^3-(-1)^3)$

$= \frac{1}{2}(1+1) = 1.$

11. $\int_0^\infty 3e^{-3x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b 3e^{-3x}\mathrm{d}x$

$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{3}{-3}e^{-3x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}[-e^{-3x}]_0^b$

$= \lim_{b\to\infty}[-e^{-3b}-(-e^{-3\cdot 0})]$

$= \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^{3b}}\right) = 1.$

13. $\frac{1}{4}$; $f(x) = \frac{1}{4}x$. 15. $\frac{3}{2}$; $f(x) = \frac{3}{2}x^2$.

17. $\frac{1}{5}$; $f(x) = \frac{1}{5}$.

19. $\frac{1}{2}$; $f(x) = \frac{2-x}{2}$. 21. $\frac{1}{\ln 3}$; $f(x) = \frac{1}{x\ln 3}$.

23. $\frac{1}{e^3-1}$; $f(x) = \frac{e^x}{e^3-1}$. 25. a) $\frac{8}{25}$.

27. $\frac{1}{2}$. 29. 0.329 7. 31. 0.999 95. 33. 0.393 5.

35. a) $k = 5.693\times 10^{-7}$; b) 0.024 034 5.

37. 0.950 2. 39. b $= \sqrt[4]{4}$, 或 $\sqrt{2}$.

43~53. 留给学生.

上机技术演练，p. 475

1. a) 0.63，或 63%；b) 0.023，或 2.3%.

2. a) 0.010 2%；b) 约为 90%.

习题 6.5，p. 475

1. $\mu=E(x)=\frac{11}{2}$, $E(x^2)=\frac{97}{3}$, $\sigma^2=\frac{25}{12}$, $\sigma=\frac{5}{2\sqrt{3}}$.

3. $\mu=E(x)=2$, $E(x^2)=\frac{9}{2}$, $\sigma^2=\frac{1}{2}$, $\sigma=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

5. $\mu=E(x)=\frac{14}{9}$, $E(x^2)=\frac{5}{2}$, $\sigma^2=\frac{13}{162}$,

$\sigma=\sqrt{\frac{13}{162}}=\frac{1}{9}\sqrt{\frac{13}{2}}$.

7. $\mu=E(x)=-\frac{5}{4}$, $E(x^2)=\frac{11}{2}$, $\sigma^2=\frac{51}{80}$,

$\sigma=\sqrt{\frac{51}{80}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{51}{5}}$.

9. $\mu=E(x)=\frac{2}{\ln 3}$, $E(x^2)=\frac{4}{\ln 3}$,

$\sigma^2=\frac{4\ln 3-4}{(\ln 3)^2}$, $\sigma=\frac{2}{\ln 3}\sqrt{\ln 3-1}$.

11. 0.496 4. 13. 0.366 5. 15. 0.644 2.

17. 0.007 8. 19. 0.171 6. 21. 0.001 3.

23. a) 0.682 6；b) 68.26%.

25. 0.289 8. 27. 0.451 4. 29~45. 留给学生.

47. 0.62%. 49. 0.791 0. 51. 0.111 5.

53. a) 966；b) 1 055；c) 1 217.

55. $\mu = E(x) = \frac{a+b}{2}$, $E(x^2) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$, 或

$\frac{b^2+ba+a^2}{3}$, $\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

57. $\sqrt{2}$. 59. $\frac{\ln 2}{k}$. 61. 5.801 盎司.

习题 6.6，p. 480

1. $\frac{\pi}{3}$. 3. $\frac{7\pi}{3}$. 5. $\frac{\pi}{2}(e^{10}-e^{-4})$. 7. $\frac{2\pi}{3}$.

9. $4\pi\ln 3$. 11. 32π. 13. $\frac{32\pi}{5}$. 15. 56π.

17. $\frac{32\pi}{3}$. 19. $2\pi e^3$. 21. π.

习题 6.7，p. 487

1. $y=x^4+C$; $y=x^4+3$, $y=x^4$, $y=x^4-796$；答案可有多种.

3. $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+C$; $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2-5$; $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+7$; $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2$；答案可有多种.

5. $y=3\ln x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^6+C$; $y=3\ln x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^6-15$; $y=3\ln x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^6-7$; $y=3\ln x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^6$；答案可有多种.

7. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+4$.

9. $f(x)=\frac{3}{5}x^{5/3}-\frac{1}{2}x^2-\frac{61}{10}$.

11. $y''=\frac{1}{x}$. 则

$$\begin{array}{c|c} y''-\frac{1}{x} & 0 \\ \hline \frac{1}{x}-\frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \end{array}$$

13. $y'=4e^x+3xe^x$, $y''=7e^x+3xe^x$. 则

$$\begin{array}{c|c} y''-2y'+y & 0 \\ \hline (7e^x+3xe^x)-2(4e^x+3xe^x)+(e^x+3xe^x) & 0 \\ 7e^x+3xe^x-8e^x-6xe^x+e^x+3xe^x & \\ 0 & \end{array}$$

15. $y=C_1e^{x^4}$，其中 $C_1=e^C$. 17. $y=\sqrt[3]{\frac{5}{2}x^2+C}$.

19. $y=\sqrt{2x^2+C_1}$, $y=-\sqrt{2x^2+C_1}$，其中 $C_1=2C$.

21. $y=\sqrt{6x+C_1}$, $y=-\sqrt{6x+C_1}$，其中 $C_1=2C$.

23. $y=-3+8e^{x^2/2}$. 25. $y=\sqrt[3]{15x-3}$.

27. $y=C_1e^{3x}$，其中 $C_1=e^C$.

29. $P=C_1e^{2t}$，其中 $C_1=e^C$.

31. $f(x)=\ln x-2x^2+\frac{2}{3}x^{3/2}+9$.

33. $C(x)=2.6x-0.01x^2+120$,

$A(x)=2.6-0.01x+\frac{120}{x}$.

35. a) $P(C)=\frac{400}{(C+3)^{1/2}}-40$；b) 97 美元.

37. a) $R=k\cdot\ln(S+1)+C$；

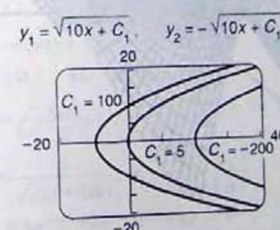
b) $R=k\cdot\ln(S+1)$；

c) 没有产品；没有来自它们的反映.

39. $x=200-p$. 41. $x=\frac{C_1}{p^k}$.

43. $R=C_1\cdot S^k$，其中 $C_1=e^C$.

45.



概要与复习：第 6 章，p. 489

1. [6.1] (2, 16). 2. [6.1] 18.67 美元.

3. [6.1] 5.33 美元. 4. [6.2] 83 560.54 美元.

5. [6.2] 251.50 美元. 6. [6.2] 282 732 千吨.

7. [6.2] 183 年. 8. [6.2] 247.88 美元.

9. [6.2] 44 517 美元.

10. [6.2]，[6.3] 53 333 美元.

11. [6.3] 收敛，1. 12. [6.3] 发散.

13. [6.3] 收敛，$\frac{1}{2}$. 14. [6.4] $\frac{8}{3}$；$f(x)=\frac{8}{3x^3}$.

15. [6.4] 0.6. 16. [6.5] $\frac{3}{10}$. 17. [6.5] $\frac{1}{2}$.

18. [6.5] $\frac{1}{2}$. 19. [6.5] $\frac{1}{20}$. 20. [6.5] $\frac{1}{2\sqrt{5}}$.

21. [6.5] 0.467 8. 22. [6.5] 0.882 7.

23. [6.5] 0.100 2. 24. [6.5] 0.500 0.

25. [6.5] 0.091 8. 26. [6.6] $\frac{127\pi}{7}$. 27. [6.6] $\frac{\pi}{6}$.

28. [6.7] $y=C_1e^{x^{11}}$，其中 $C_1=e^C$.

29. [6.7] $y=\pm\sqrt{4x+C_1}$，其中 $C_1=2C$.

30. [6.7] $y=5e^{4x}$. 31. [6.7] $v=\sqrt[3]{15t+19}$.

32. [6.7] $y=\pm\sqrt{3x^2+C_1}$，其中 $C_1=2C$.

33. [6.7] $y=8-C_1e^{-x^2/2}$，其中 $C_1=e^{-C}$.

34. [6.7] $x=100-p$.

35. [6.7] $V=36.37-6.37e^{-kt}$.

36. [6.4] $c=\sqrt[3]{4.5}$. 37. [6.3] 收敛，$-\frac{1}{5}$.

38. [6.3] 收敛，3. 39. [6.3] 1.

测验：第 6 章，p. 491

1. [6.1] (3, 16). 2. [6.1] 45 美元.

3. [6.1] 22.50 美元. 4. [6.2] 29 192 美元.

5. [6.2] 344.66 美元. 6. [6.2] 37 121 870 千吨.

7. [6.2] 39 年. 8. [6.2] 2 465.97 美元.

9. [6.2] 30 717.71 美元.

10. [6.2] 34 545.45 美元.

11. [6.3] 收敛，$\frac{1}{4}$. 12. [6.3] 发散.

13. [6.4] $\frac{1}{4}$；$f(x)=\frac{x^3}{4}$. 14. [6.4] 0.864 7.

15. [6.5] $E(x)=\frac{13}{6}$. 16. [6.5] $E(x^2)=5$.

2007/08/16

17. [6.5] $\mu=\frac{13}{6}$. 18. [6.5] $\sigma^2=\frac{11}{36}$.

19. [6.5] $\sigma=\frac{\sqrt{11}}{6}$. 20. [6.5] 0.433 2.

21. [6.5] 0.136 5. 22. [6.5] 0.907 1.

23. [6.5] 0.420 7. 24. [6.6] $\pi\ln 5$.

25. [6.6] $\frac{5\pi}{2}$.

26. [6.7] $y=C_1e^{x^2}$，其中 $C_1=e^C$.

27. [6.7] $y=\sqrt{18x+C_1}$，$y=-\sqrt{18x+C_1}$，其中 $C_1=2C$.

28. [6.7] $y=11e^{6t}$.

29. [6.7] $y=5-C_1e^{-x^2/2}$，其中 $C_1=e^{-C}$.

30. [6.7] $v=\pm\sqrt[4]{8t+C_1}$，其中 $C_1=4C$.

31. [6.7] $y=C_1e^{4x+x^2/2}$，其中 $C_1=e^C$.

32. [6.7] $x=\frac{C_1}{p^t}$.

33. [6.7] a) $V(t)=36(1-e^{-kt})$；
b) $k=0.12$；c) $V(t)=36(1-e^{-0.12t})$；
d) $V(12)\approx27.47$ 美元；e) $t\approx14.9$ 个月.

34. [6.4] $b=\sqrt[3]{6}$.

35. [6.3] 收敛，$-\frac{1}{4}$.

36. [6.3] 3.14.

第 7 章

上机技术演练，p. 498

1. 8 161 517 629.

习题 7.1，p. 501

1. $f(0,-2)=0$，$f(2,3)=-8$.
$f(10,-5)=200$.

3. $f(0,-2)=1$，$f(-2,1)=-13\frac{8}{9}$.
$f(2,1)=23$.

5. $f(e,2)=\ln e+2^3=1+8=9$，$f(e^2,4)=66$，
$f(e^3,5)=128$.

7. $f(-1,2,3)=6$，$f(2,-1,3)=12$.

9. 151 571.66 美元. 11. 5.64%.

13. 244.7 英里/小时.

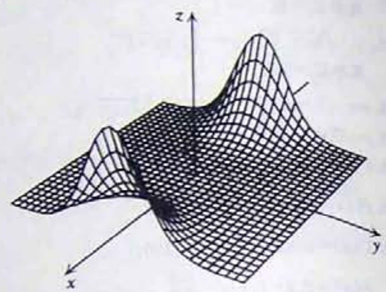
15. 1.938 53 米^2.

19. 0°. 21. -22°.

23.

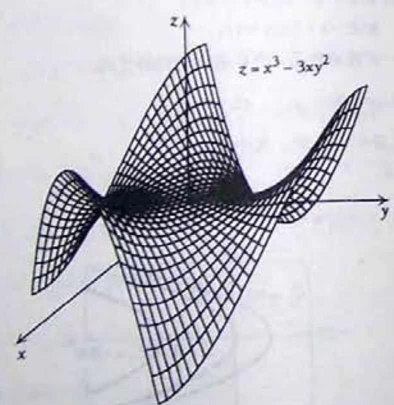


25.



$z=(x^4-16x^2)e^{-y^2}$

27.



习题 7.2，p. 508

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=2-3y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-3x$，$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,-3)}=11$，
$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,-3)}=0$.

3. $\frac{\partial z}{\partial x}=6x-2y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+1$.
$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-2,-3)}=-6$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,-3)}=1$.

5. $f_x=2$，$f_y=-3$，$f_x(-2,4)=2$，$f_y(4,-3)=-3$.

7. $f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，
$f_x(-2,1)=\frac{-2}{\sqrt{5}}$，$f_y(-3,-2)=\frac{-2}{\sqrt{13}}$.

9. $f_x=2e^{2x-y}$，$f_y=-e^{2x-y}$.

11. $f_x=ye^{xy}$，$f_y=xe^{xy}$.

13. $f_x=\frac{y}{x+y}$，$f_y=\frac{y}{x+y}+\ln(x+y)$.

15. $f_x=1+\ln xy$，$f_y=\frac{x}{y}$.

17. $f_x=\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}$，$f_y=-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}$.

19. $f_x=12(2x+y-5)$，$f_y=6(2x+y-5)$.

21. $\frac{\partial f}{\partial b}=12m+6b-30$，$\frac{\partial f}{\partial m}=28m+12b-64$.

23. $f_x=3y-2\lambda$，$f_y=3x-\lambda$，$f_\lambda=-(2x+y-8)$.

25. $f_x=2x-10\lambda$，$f_y=2y-2\lambda$，$f_\lambda=-(10x+2y-4)$.

27. a) 3 888 064 件；b) $\frac{\partial p}{\partial x}=1\,117.8\left(\frac{y}{x}\right)^{0.379}$，
$\frac{\partial p}{\partial y}=682.2\left(\frac{x}{y}\right)^{0.621}$；d) 965.8，866.8.

29. 1.274 百万美元.

31. 99.6°. 33. 121.3°.

37. a) $\frac{\partial S}{\partial h}=\frac{\sqrt{w}}{120\sqrt{h}}$；b) $\frac{\partial S}{\partial w}=\frac{\sqrt{h}}{120\sqrt{w}}$；
c) $-0.022\,8$ 米^2.

39. 78.244. 41. -0.846.

43. $f_x=\frac{-4xt^2}{(x^2-t^2)^2}$，$f_t=\frac{-4x^2t}{(x^2-t^2)^2}$.

45. $f_x=\frac{1}{\sqrt{x}(1+2\sqrt{t})}$，$f_t=\frac{-1-2\sqrt{x}}{\sqrt{t}(1+2\sqrt{t})^2}$.

47. $f_x=4x^{-1/3}-2x^{-3/4}t^{1/2}+6x^{-3/2}t^{1/2}$，
$f_t=-4x^{1/4}t^{-1/2}-18x^{-1/2}t^{1/2}$.

习题 7.3，p. 512

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}=-1$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=7$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

5. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=20x^3y^3+6xy^2$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$
$=20x^4y^2+6x^2y$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12x^5y^2+2x^3$.

7. $f_{xx}=0$，$f_{yx}=0$，$f_{xy}=0$，$f_{yy}=0$.

9. $f_{xx}=4y^2e^{2xy}$，$f_{yx}=f_{xy}=4xye^{2xy}+2e^{2xy}$，
$f_{yy}=4x^2e^{2xy}$.

11. $f_{xx}=0$，$f_{yx}=f_{xy}=0$，$f_{yy}=e^y$.

13. $f_{xx}=-\frac{y}{x^2}$，$f_{yx}=f_{xy}=\frac{1}{x}$，$f_{yy}=0$.

15. $f_{xx}=\frac{-6y}{x^4}$，$f_{yx}=f_{xy}=\frac{2(y^3-x^3)}{x^3y^3}$，$f_{yy}=\frac{6x}{y^4}$.

17. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$，因此和是 0.

19. a) $-y$；b) x；c) $f_{yx}(0,0)=1$，$f_{xy}(0,0)=-1$；
因此 $f_{yx}(0,0)\neq f_{xy}(0,0)$.

习题 7.4，p. 520

1. 在$\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$取相对极小值$-\frac{1}{3}$.

3. 在$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$取相对极大值$\frac{4}{27}$.

5. 在(1，1)取相对极小值 −1.

7. 在(1，−2)取相对极小值−7.

9. 在(−1，2)取相对极小值−5. 11. 没有.

13. 在(0，0)取相对极小值 e.

15. 17 美元收音机 6 千，21 美元收音机 5 千.

17. 当 $a=10$(百万美元)和 $p=3$ 美元时 P 取最大值 35(百万美元).

19. 底的尺寸是 8 英尺乘 8 英尺，高是 5 英尺.

21. a) $R(p_1,p_2)=64p_1-4p_1^2-4p_1p_2+56p_2-4p_2^2$；
b) $p_1=6$(60 美元)，$p_2=4$(40 美元)；
c) $q_1=32$(百台)，$q_2=28$(百台)；
d) 304 000 美元.

23. 没有；鞍点为(0，0).

25. 在(0，0)取最小值 0；鞍点为(2，1)和(−2，1).

29. 在(0，0)取相对极小值−5.

31. 没有.

习题 7.5，p. 529

1. a) $y=2.525x+33.178$；
 b) 73.58 美元，86.20 美元.
3. a) $y=0.176\,571x-272.962$；
 b) 81.9 年，82.8 年.
5. a) $y=1.068\,421x-1.236\,842$；b) 85.3.
9. a) $y=-0.005\,937\,96x+15.571\,9$；
 b) 3:39.98，3:36.42；
 c) 用回归线法预测的值是 3:42.12.

习题 7.6，p. 536

1. 在(2，4)取极大值 8.
3. 在(2，4)取极大值−16.
5. 在(4，2)取极小值 20.
7. 在(8，−12)取极小值−96.
9. 在$\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$取极小值$\frac{3}{2}$.　11. 35 和 35.
13. 3 和−3.　15. 在$\left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right)$取极小值$\frac{7}{2}$.
17. $9\frac{3}{4}$英寸，$9\frac{3}{4}$英寸，$95\frac{1}{16}$平方英寸；没有.
19. $r=\sqrt[3]{\frac{27}{2\pi}}\approx1.6$ 英尺；$h=2\cdot r\approx3.2$ 英尺；最小表面积≈45.97 平方英尺.
21. 在 $L=20$，$M=60$ 时 S 取最大值 800.
23. a) $C(x,y,z)=7xy+6yz+6xz$；b) $x=60$ 英尺，$y=60$ 英尺，$z=70$ 英尺；75 600 美元.
25. 机器 A：10 000 件，机器 B：100 件.
27. 在$\left(-\frac{7}{16},-\frac{3}{4}\right)$取极小值$-\frac{155}{128}$.
29. 在$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$取极大值$\frac{1}{27}$.
31. 在$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$取极大值 2.
33. $\lambda=\frac{p_x}{c_1}=\frac{p_y}{c_2}$.　37～41. 留给学生.

习题 7.7，p. 542

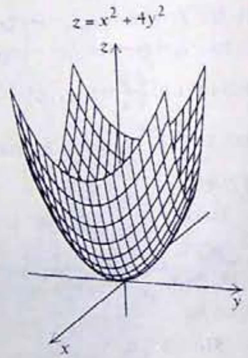
1. 1.　3. 0.　5. 6.　7. $\frac{3}{20}$.　9. $\frac{1}{2}$.

11. 4.　13. $\frac{4}{15}$.

15. 1.　17. 39.　19. $\frac{13}{240}$.

概要与复习：第 7 章，p. 543

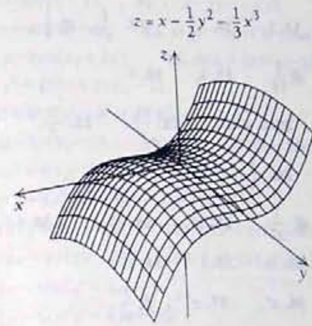
1. [7.1] 1.　2. [7.2] $3y^2$.　3. [7.2] e^x+9xy^2+2.
4. [7.3] $9y^2$.　5. [7.3] $9y^2$.　6. [7.3] 0.
7. [7.3] e^x+18xy.　8. [7.2] $6x^2\ln y+y^2$.
9. [7.2] $\frac{2x^3}{y}+2xy$.　10. [7.3] $\frac{6x^2}{y}+2y$.
11. [7.3] $\frac{6x^2}{y}+2y$.　12. [7.3] $12x\ln y$.
13. [7.3] $2x-\frac{2x^3}{y^2}$.
14. [7.4] 在$\left(5,\frac{27}{2}\right)$取极小值$-\frac{549}{20}$.
15. [7.4] 在(0，−2)取极小值−4.
16. [7.4] 在$\left(\frac{3}{2},-3\right)$取极大值$\frac{45}{4}$.
17. [7.4] 在(−1，2)取极小值 29.
18. [7.5] a) $y=0.070\,55x+0.513$；
 b) 1.43 百万美元，1.78 百万美元.
19. [7.5] a) $y=0.6x+6.7$；b) 9.1 百万.
20. [7.6] 在$\left(-\frac{3}{2},-3\right)$取极小值$\frac{125}{4}$.
21. [7.6] 在(5，10)取极大值 300.
22. [7.7] $\frac{97}{30}$.　23. [7.7] $\frac{1}{60}$.　24. [7.7] 0.
25. [7.4]，[7.6] 圆柱形容器.
26. [7.1]



测验：第 7 章，p. 544

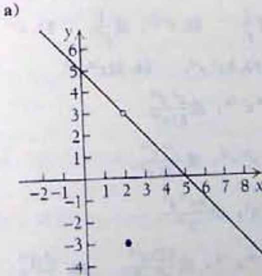
1. [7.1] $e^{-1}-2$.
2. [7.2] e^x+6x^2y.
3. [7.2] $2x^3+1$.
4. [7.3] e^x+12xy.

5. [7.3] $6x^2$.
6. [7.3] $6x^2$.　7. [7.3] 0.
8. [7.4] 在$\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$取极小值$-\frac{7}{16}$.
9. [7.4] 没有.
10. [7.5] a) $y=\frac{9}{2}x+\frac{17}{3}$；
 b) 23.67 百万美元.
11. [7.6] 在(4，5)取极大值−19.
12. [7.7] 1.
13. [7.4] 关于人力，400 000 美元；关于资本，200 000 美元.
14. [7.2] $f_x=\frac{-x^4+4xt+6x^2t}{(x^3+2t)^2}$，$f_t=\frac{-2x^3(x+1)}{(x^3+2t)^2}$.
15. [7.1]

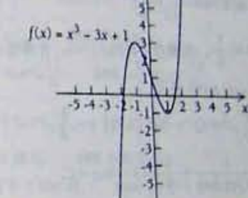


总复习题，p. 547

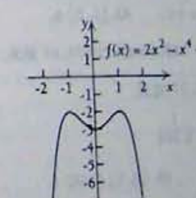
1. [1.4] $y=-4x-27$.
2. [1.2] $x^2+2xh+h^2-5$.
3. [2.2] a)



 b) 3；c) −3；d) 不连续.
4. [2.2] −8.　5. [2.2] 3.　6. [2.2] 不存在.
7. [3.3] 4.　8. [2.2] $3x$.　9. [3.3] 0.
10. [2.5] −9.　11. [2.5] $2x-7$.
12. [2.5] $\frac{1}{4}x^{-3/4}$.　13. [2.5] $-6x^{-7}$.
14. [2.8] $(x-3)5(x+1)^4+(x+1)^5$，
 或 $2(x+1)^4(3x-7)$.
15. [2.7] $\frac{5-2x^3}{x^6}$.　16. [4.1] $\frac{1-x}{e^x}$.
17. [4.2] $\frac{2x}{x^2+5}$.　18. [4.2] 1.
19. [4.1] $3e^{3x}+2x$.　20. [4.1] $\frac{e^{\sqrt{x-3}}}{2\sqrt{x-3}}$.
21. [4.2] $\frac{e^x}{e^x-4}$.　22. [2.9] $2-4x^{-3}$.
23. [3.7] $3xy^2+\frac{y}{x}$.　24. [2.4] $y=x-2$.
25. [3.1]，[3.2] 在(−1，3)取相对极大值；在(1，−1)取相对极小值.

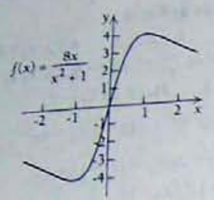


26. [3.1]，[3.2] 在(−1，−2)和(1，−2)取相对极大值；在(0，−3)取相对极小值.



27. [3.1]，[3.2] 在(−1，−4)取相对极小值；在(1，4)取相对极大值.

2007/08/16



28. [3.1] 在(0, −2)取相对极大值. 图形见 3.3 节例 7.

29. [3.4] 在 $x=1$ 取极小值−7.

30. [3.4] 没有.

31. [3.4] 在 $x=-1$ 取极大值 $6\frac{2}{3}$；

在 $x=-2$ 取极小值 $4\frac{1}{3}$.

32. [3.5] 15.　33. [3.5] 30 次；批量为 15.

34. [3.6] $\Delta y=3.03$；$f'(x)\Delta x=3$.

35. [4.3] a) $N(t)=8\,000e^{0.1t}$；

b) 17 804；c) 6.9 年.

36. [4.6] a) $E(p)=\frac{p}{12-p}$；

b) $E(2)=\frac{1}{5}$，无弹性；c) $E(9)=3$，有弹性；

d) 增加；e) $p=6$ 美元.

37. [5.1] $\frac{1}{2}x^4+C$.　38. [5.2] $3-\frac{2}{e}$.

39. [5.7] $\frac{7}{9(7-3x)}+\frac{1}{9}\ln(7-3x)+C$.

40. [5.5] $\frac{1}{4}e^{x^4}+C$.

41. [5.1], [5.7] $\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-3x+C$.

42. [5.1] $260\ln x+C$.　43. [5.2] 4.

44. [5.2] $\frac{232}{3}$.　45. [6.2] 22 679.49 美元.

46. [6.2] 60 792.27 美元.

47. [6.3] 收敛，$\frac{1}{4\,374}$.

48. [6.4] $\frac{3}{2}\ln 3$.　49. [6.5] 0.682 6.

50. [6.1] (169, 7)；751.33 美元.

51. [6.6] $-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e^{16}}-1\right)$.

52. [6.7] $y=C_1e^{x^2/2}$，其中 $C_1=e^C$.

53. [4.3] a) $P(t)=1-e^{-kt}$；b) $k=0.12$；

c) $P(t)=1-e^{-0.12t}$；

d) $P(20)=0.909\,3$，或 90.93%.

54. [7.2] $8xy^3+3$.　55. [7.3] e^y+24x^2y.

56. [7.4] 没有.　57. [7.6] 在(3, 3)取最大值 4.

58. [7.7] $3(e^2-1)$.

附录

习题，p. 551

1. 5・5・5，或 125.　2. 7・7，或 49.

3. (−7)(−7)或 49.　4. (−5)(−5)(−5)，或−125.

5. 1.020 1.　6. 1.030 301.　7. $\frac{1}{16}$.

8. $\frac{1}{64}$.　9. 1.　10. $6x$.　11. t.

12. 1.　13. 1.　14. $\frac{1}{3}$.　15. $\frac{1}{3^2}$，或 $\frac{1}{9}$.

16. $\frac{1}{4^2}$，或 $\frac{1}{16}$.　17. 8.　18. 4.

19. 0.1.　20. 0.000 1.　21. $\frac{1}{e^b}$.　22. $\frac{1}{t^k}$.

23. $\frac{1}{b}$.　24. $\frac{1}{h}$.　25. x^5.　26. t^7.

27. x^{-6}，或 $\frac{1}{x^6}$.　28. x^6.　29. $35x^2$.　30. $8t^7$.

31. x^4.　32. x.　33. 1.　34. 1.

35. x^3.　36. x^4.　37. x^{-3}，或 $\frac{1}{x^3}$.

38. x^{-4}，或 $\frac{1}{x^4}$.　39. 1.　40. 1.　41. e^{t-4}.

42. e^{k-3}.　43. t^{14}.　44. t^{12}.　45. t^2.

46. t^{-4}，或 $\frac{1}{t^4}$.　47. a^6b^5.　48. x^2y^2.

49. t^{-6}，或 $\frac{1}{t^6}$.　50. t^{-12}，或 $\frac{1}{t^{12}}$.　51. e^{4x}.

52. e^{5x}.　53. $8x^6y^{12}$.　54. $32x^{10}y^{20}$.

55. $\frac{1}{81}x^8y^{20}z^{-16}$，或 $\frac{x^8y^{20}}{81z^{16}}$.

56. $\frac{1}{125}x^{-9}y^{21}z^{15}$，或 $\frac{y^{21}z^{15}}{125x^9}$.

57. $9x^{-16}y^{14}z^4$，或 $\frac{9y^{14}z^4}{x^{16}}$.

58. $625x^{16}y^{-20}z^{-12}$，或 $\frac{625x^{16}}{y^{20}z^{12}}$.　59. $\frac{c^4d^{12}}{16q^8}$.

60. $\frac{64x^6y^3}{a^3b^3}$.　61. $5x-35$.　62. $x+xt$.

63. $x^2-7x+10$.　64. $x^2-7x+12$.　65. a^3-b^3.

66. x^3+y^3　67. $2x^2+3x-5$.　68. $3x^2+x-4$.

69. a^2-4.　70. $9x^2-1$.　71. $25x^2-4$.

72. t^2-1.　73. $a^2-2ah+h^2$.

74. $a^2+2ah+h^2$.　75. $25x^2+10xt+t^2$.

76. $49a^2-14ac+c^2$.　77. $5x^3+30x^2+45x$.

78. $-3x^4+48x^2$.　79. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

80. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

81. $x^3-15x^2+75x-125$.

82. $8x^3+36x^2+54x+27$.

83. $x(1-t)$.　84. $x(1+h)$.　85. $(x+3y)^2$.

86. $(x-5y)^2$.　87. $(x-5)(x+3)$.

88. $(x+5)(x+3)$.　89. $(x-5)(x+4)$.

90. $(x-10)(x+1)$.　91. $(7x-t)(7x+t)$.

92. $(3x-b)(3x+b)$.　93. $4(3t-2m)(3t+2m)$.

94. $(5y-3z)(5y+3z)$.　95. $ab(a+4b)(a-4b)$.

96. $2(x^2+4)(x+2)(x-2)$.

97. $(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

98. $(6y-5)(6y+7)$.　99. $10x(a+2b)(a-2b)$.

100. $xy(x+5y)(x-5y)$.

101. $2(1+4x^2)(1+2x)(1-2x)$.

102. $2x(y+5)(y-5)$.　103. $(9x-1)(x+2)$.

104. $(3x-4)(2x-5)$.　105. $(x+2)(x^2-2x+4)$.

106. $(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$.

107. $(y-4t)(y^2+4yt+16t^2)$.

108. $(m+10p)(m^2-10mp+100p^2)$

109. $(3x^2-1)(x-2)$.　110. $(y^2-2)(5y+2)$.

111. $(x-3)(x+3)(x-5)$.

112. $(t-5)(t+5)(t+3)$.　113. $\frac{7}{4}$.

114. $\frac{79}{12}$.　115. −8.　116. $\frac{4}{5}$.　117. 120.

118. 140.　119. 200.　120. 200.

121. 0, −3, $\frac{4}{5}$.　122. 0, 2, $-\frac{3}{2}$.　123. 0, 2.

124. 3, −3.　125. 0, 3.　126. 0, 5.

127. 0, 7.　128. 0, 3.　129. 0, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$.

130. 0, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$.　131. 1.　132. 2.

133. 无解.　134. 无解.

135. −23.　136. −145.　137. 5.

138. $-\sqrt{7}$, $\sqrt{7}$.　139. $x\geqslant-\frac{4}{5}$.

140. $x\geqslant3$.　141. $x>-\frac{1}{12}$.

142. $x>-\frac{5}{13}$.　143. $x>-\frac{4}{7}$.　144. $x\leqslant-\frac{6}{5}$.

145. $x\leqslant-3$.　146. $x\geqslant-2$.　147. $x>\frac{2}{3}$.

148. $x\leqslant\frac{5}{3}$.　149. $x<-\frac{2}{5}$.　150. $x\leqslant\frac{5}{4}$.

151. $2<x<4$.　152. $2<x\leqslant4$.

153. $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{11}{2}$.　154. $\frac{6}{5}\leqslant x<\frac{16}{5}$.

155. $-1\leqslant x\leqslant\frac{14}{5}$.　156. $-5\leqslant x<-2$.

157. 650 美元.　158. 800 美元.

159. 多于 7 000 件.　160. 多于 4 200 件.

161. 480 磅.　162. 340 磅.

163. 810 000.　164. 720 000.

165. $60\%\leqslant x<100\%$.　166. $50\%\leqslant x<90\%$.

2007/08/16

应用索引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致.

商业与经济

Accumulated present value(累积现值)，445，446，447，451，452，490，491，548
Accumulated sales(累积销售)，397，428
Advertising results(广告效应)，119，154，200，247，271，282，312，315，330，358，548
Annual interest rate(年利率)，328
Annuities(年金)，13
Area(面积)，maximizing(～最大化)，249，261，262，263
Average cost(平均成本)，232，271
  minimizing(～最小化)，282
Average rate of change(平均变化率)，113
Beverage-can problem(饮料罐问题)，534
Box-office revenue(票房收入)，285，326，360
Capitalized cost(资本化成本)，447，452
Cellular phones(移动电话)，298
Coal demand(煤的需求)，328
Cobb-Douglas production function(科布-道格拉斯生产函数)，507，508，544
Compound interest(复利，见 Interest)
Constant elasticity curve(定常弹性曲线)，356
Construction costs(建筑成本)，minimizing(～最小化)，537
Consumer credit(消费者信贷)，173
Consumer price index(消费物价指数)，329，341
Consumer's surplus(消费者盈余)，435，436，440
Container cost(容器成本)，minimizing(～最小化)，522，537
Continuous money flow(连续资金流量，见 Accumulated present value)，442，446，447，490，491
Cost(成本，见 Marginal revenue，cost，and profit；Profit-and-loss analysis)，49，120，215，233，248，276，277，392，421，429
  average(平均～)，232，271
  capitalized(资本化～)，447，452
  minimizing(～最小化)，263，264，265
Cost of college(学院的学费)，projected(预算～)，324
Cost of a first-class postage stamp(一张一类邮票的价格)，330
Cost of a Hershey bar(一块 Hershey(名牌巧克力)的价格)，330
Cost of milk(牛奶的价格)，358
Cost of pollution control(污染控制成本)，232
Cost of a prime rib dinner(牛排午餐的价格)，357
Cost of storage equipment(储存设备的成本)，497，502
Credit cards(信用卡)，88
Credit market debt(信贷市场债务)，371，397
Demand(需求，见 Elasticity of demand；Marginal demand；Supply and demand)，69，73，90，154，372，412
  for chocolate chip cookies(巧克力饼的～)，355
  for hand-held radios(便携式收音机的～)，352
  for oil(石油的～)，355
  for tomato plants(番茄苗的～)，355
  for videogames(电子游戏的～)，355
  for videotape rentals(录像带出租的～)，351
Depreciation(折旧)，232
  double declining-balance(复式均衡下跌～)，348
  straight-line(直线～)，53
Discounting(贴现)，337
Disney World admission(迪斯尼乐园的门票)，77，79
Distance(距离)，minimizing(～最小化)，265
Domar's capital expansion model(Domar 的资本扩展模型)，488
Double declining-balance depreciation(复式均衡下跌折旧)，348
Doubling time(倍增时间)，320
Economic ordering quantity(经济订购量)，261
Effective annual yield(实际年收益)，332
Efficiency of a machine operator(机器操作员的效率)，372
Elasticity of demand(需求弹性)，357，359，485，

488，490，492，548
Equilibrium point(平衡点)，70，89
Equimarginal Productivity(等边际生产率)，Law of(～法则)，538
Exponential demand curve(指数需求曲线)，356
Failure(故障)，time to(发生～的时间)，464
Federal budget(联邦预算)，28，329
Financial predictions(财务预测)，430
Franchise expansion(特许经营的发展)，328，357，548
Gold and stock prices(黄金和股票价格)，64
Gross domestic product(国内生产总值)，163，272
Household income，median，by age(按年龄划分的家庭平均收益)，82
Household liability(家庭债务)，348
Interest(利率)
  annual rate(年利率)，328
  compounded annually(年复利)，10，13，28，36，86，89，173
  compounded continuously(永续复利)，320，328，329，357，358，446
  effective annual yield(实际年收益)，332
  compounded n times a year(一年计 n 次复利)，11，13，38，86，173
  doubling time(倍增时间)，320
  prime rate(最优惠利率)，84，85
Internet(因特网)
  shopping on(～上购物)，358
  use of(～的使用)，322
Inventory costs(存货成本)，minimizing(～最小化)，258，260，263，264，280，281，547
Investment(投资)，52，136，413，441，562
Juice-can problem(饮料罐问题)，537
Labor force(人力，劳动力)，215，248，529
Law of Equimarginal Productivity(等边际生产率法则)，538
Life of a product(产品的使用期)，459
Loan payments(贷款偿付)，13
Mail orders(邮购订单)，476
Major league baseball ticket prices(职业棒球大联赛票价)，28，120，135，155，272
Manhattan Island(曼哈顿岛)，value of(～的价值)，330
Manufacturing(制造业)，476
Marginal analysis(边际分析)，254
Marginal demand(边际需求)，163，164，173，299
Marginal productivity(边际生产率)，154，507
Marginal revenue，cost，and profit(边际收益，边际成本，边际利润)，152，154，155，163，172，173，179，181，269，298，299，315
Marginal supply(边际供给)，299
Movie revenue(影片票房收入)，24，28
Net revenues(净收入)，83，84
NHL ticket prices(曲棍球比赛的票价)，84，85，529
Nitrogen prices(氮的价格)，262
Nursing facilities(护理机构)，508
Oil demand(石油需求)，328
Overflow(溢出)，vending machine(自动售货机)，477
Paper shredder sales(碎纸机的销售)，329，330
Payrolls of professional basketball teams(职业篮球队员的薪金)，91
Per capita income(人均国民收入)，329
Phone call duration(电话通话的持续时间)，464
Pizza sales(比萨饼的销售)，490
Pollution control(污染控制)，cost(～成本)，232
Postage function(邮费函数)，105，135
Practice(训练)，results of(～的效果)，397
Present value(现值)，336，340，341，357，359，445，446，490，491，548
  accumulated(累积～)，445，446，447，451，452，490，491，548
Price-earnings ratio(价格收益比)，502
Prime rate and stock prices(最优惠利率和股票价格)，73
Producer's surplus(生产者盈余)，437
Production(产量)，113
  maximizing(～最大化)，538，544
  total(总～)，452
Productivity(生产率)
  equimarginal(等边际～)，538
  marginal(边际～)，154，507
  monthly(月～)，247

2007/08/16

Profit (利润，见 Marginal revenue, cost, and profit), 215, 276, 277, 413, 421, 508.
  maximizing (～最大化), 247, 248, 256, 262, 263, 280, 282, 495, 518, 521, 522, 547
Profit-and -loss analysis (损益分析), 50, 52, 53, 87, 89
Purchasing price(购货价格), 233
Quality control(质量控制), 462
Rates of change(变化率), comparing(比较～), 122
Recycling aluminum cans(铝罐再利用), 348
Reliability of a machine(机器的可靠性), 464
Retirement plans(退休计划), 122
Revenue (收益，见 Marginal revenue, cost, and profit; Profit-and-loss analysis), 120, 215, 233, 276, 277
  maximizing(～最大化), 254, 262, 263, 522
Room area(房间面积), maximizing(～最大化), 537
Salary, average, of major-league baseball players(职业棒球大联赛球员的平均薪金), 330
Sales(销售), 154, 277
  accumulated(累积～), 397
  modeling(～模型), 341
  of paper shredders(碎纸机的～), 329, 330
Salvage value(残值), 53, 341
Service area(服务范围), 275
Small business(小企业), 248, 349
Stereo production(立体声产品), 476
Stocks(股票)
  and gold(～与黄金), 64
  growth in value(～的增值), 315, 488, 490, 492
  prime rate and prices(最优惠利率和～价格), 73
  yield(～收益), 502
Straight-line depreciation(直线折旧法), 53
Sugar production(食糖生产), 477
Supply(供给), 69, 154, 271, 372, 426
Supply and demand(供应与需求), 341, 344, 548
Surface area(表面积), minimizing(～最小化), 253, 262, 537, 544
Surplus (盈余，见 Consumer's surplus; Producer's surplus)
Taxicab fares(出租车费), 106, 135
Telephone calls(电话), times of (通话时间), 492
Television commercial(电视商业广告), average price (平均价格), 359
Ticket prices(票价)
  determining(确定～), 256
  major league baseball(职业棒球大联赛～), 28, 120, 135, 155, 272
  NHL(美国曲棍球联盟～), 84, 85, 529
Ticket profits(门票利润), 90, 91
Total cost(总成本，见 Profit-and-loss analysis), 49, 120, 215, 233, 248, 280, 369, 371, 397, 452, 488, 497
  minimizing(～最小化), 537
Total profit(总利润，见 Profit-and -loss analysis), 215, 280, 397, 406, 452, 488
Total revenue(总收益，见 Profit-and-loss analysis), 120, 215, 233, 280, 330, 371, 397, 488, 562
Total sales(总销售额), 560
  maximizing(～最大化), 537
  predicting(预测～), 544
Trade deficit(贸易逆差), 83, 85
Transportation planning(运输规划), 463, 464
Travel time in a building(在大厦中的行走时间), minimizing(～最小化), 545
Typing area (打印面积), maximizing (～最大化), 537
Typing speed(打字速度), 397
Utility(效用), 93, 119, 173, 488
Van Gogh painting (梵高油画), value of (～的价值), 329
Vanity license plates(个性化车号牌照), 263
Waiting time(等候时间), 490
Yield(收益), maximizing(～最大化), 262
Yield of a stock(股票的收益), 502

生命科学与物理学

Acceleration(加速度), 149
Acceptance of a new medicine(一种新药的可接受度), 316
Alcohol absorption and the risk of having an accident (饮酒量与事故风险率), 324
Aluminum ore, demand and depletion(铝矿的需求与消耗), 447

Atmospheric pressure(气压), 343
Average velocity(平均速度), 12
Baseball path(棒球的轨迹), 181
Bauxite, demand and depletion(铝土矿的需求与消耗), 447
Beer-Lambert Law(Beer-Lambert 定律), 342
Bicentennial growth of the United States(美国两百周年的人口增长), 331
Blood alcohol level(血液酒精浓度), 324, 331
Blood flow(血流量), total(总～), 407
Blood pressure(血压), 156, 185, 248
Body fluids(体液), 89
Body surface area (人体的表面积), 272, 277, 502, 509
Body weight(体重), 87
Brain weight(脑髓的重量), 53
Braking distance(刹车距离), 84
Breast cancer incidence(乳腺癌发病率), 12, 13, 36, 280
Caloric intake(吸入热量)
  and life expectancy(～与估计寿命), 201
  and infant mortality(～与婴儿死亡率), 201
Cancer research spending(癌症研究的总支出), 48
Cancer treatment(癌症的治疗), 342
Cancer tumor, volume(癌肿瘤体积), 150
Carbon dating(碳定年代法), 335, 342, 344
Cardiovascular diseases(心血管疾病)
  female(女性～), 85
  male(男性～), 85
Chemical reaction(化学反应), 342
Chemotherapy(化学疗法), 28, 173
Coffee, scalding(咖啡加热), 338
Conservation of energy(能量守恒), 53
Contractions during pregnancy(怀孕期间的收缩作用), 248
Cooling(冷却), 343
  and solving a crime(～与破案), 339, 343
Copper, demand and depletion (铜的需求与消耗), 443
Coughing velocity(咳嗽的速度), 215
Daytime accidents(日间事故), 85
Death rate(死亡率), 299
Decay, radioactive(放射性衰减), 333, 342
Decay rate(衰减率), 357, 358
Deer population in California(加州鹿的数目), 14
Demand for natural resources(自然资源的需求), 443
Depletion of natural resources(自然资源的消耗), 443
Distance(距离), 149
  from velocity and acceleration(由速度和加速度确定～), 370, 372, 373, 398, 428
Drug dosage(药物剂量), 358, 421, 453
  average(平均～), 398
  response to(～反应), 350
Earthquake intensity and magnitude(地震强度和震级), 349
Electrical energy usage(电能消费), 421
Emission control(排放控制), 405
Energy conservation(能量守恒), 53
Engine emissions(发动机的排放物), 395
Fever(发烧，见 Temperature)
Fruit stacking(水果分层堆放), 73
Gas mileage(油耗里程), 121, 245
Growth of a baby(婴儿的成长), 120, 155, 177
Half-life(半衰期), 335, 342, 357, 358
Harvest(收获量), maximum sustainable(最大可持续～), 283
Healing wound(正在愈合的伤口), 156, 272, 277
Hearing impaired Americans(有听力障碍的美国人), 1, 13, 39
Heart rate(心率), maximum(最大～), 90, 91
Heat index(热指标), 509
Heights(高度), estimating(anthropology)(估计～), 54
Home range of an animal (动物栖息地范围), 68, 156
Homing pigeons, flights of(信鸽的飞行距离), 265
Infant mortality and caloric intake(婴儿死亡率与吸入热量), 201
Iron ore, demand and depletion(铁矿石的需求与消耗), 491
Life expectancy(估计寿命)
  and caloric intake(～与吸入热量), 201
  men(男人～), 529
  women(女人～), 529
Light through sea water(光线穿过海水), 343

2007/08/16

Light through smog(光线穿过烟雾), 342
Live births and age of mother(活产与母亲的年龄), 81, 82, 86
Lung cancer(肺癌), 39
Mallard population(野鸭的数目), 54
Manatee population(海牛的数目), 54
Medical dosage(药物剂量), 272
Medication in the bloodstream (血液中的药物), 233, 299
Memory(记忆力), 121
Mortality rate(死亡率), 465
Murder(谋杀案), time of (～发生时间), 339
Muscle weight(肌肉的重量), 53, 87
Natural gas, demand and depletion(天然气的需求与消耗), 447
Natural resources, demand and depletion(自然资源的需求与消耗), 443, 447, 490, 491
Nerve impulse speed(神经脉冲速度), 53
Newton's Law of Cooling(牛顿冷却定律, 见 Cooling), 338, 339, 344
Oil, demand and depletion(石油的需求与消耗), 447
Poiseuille's Law (普瓦瑟耶定律), 277, 407, 502
Pollution(污染)
control(～控制), 74
total(～总量), 398
Population decrease(人口递减), 343
Population growth (人口增长, 种群增长), 150, 177, 179
limited(有限～), 331
uninhibited (无约束～), 106, 322, 323, 330, 357, 489
Potash, demand and depletion(碳酸钾的需求与消耗), 490
Radioactive buildup(放射性物质的累积), 447, 453
Radioactive decay(放射性衰减), 333, 342
Radioactive implant treatments (放射性注入疗法), 453
Reaction time(反应时间), 54
Reynolds number(雷诺数), 316
Richter scale(里氏震级), 349
Satellite power(人造卫星的电源), 343
Scaling stress factors(按比例换算压力系数), 28
Sensitivity to medication(药剂的敏感度), 156
Sleep and death rate(睡眠和死亡率), 80, 82
Solar eclipse(日蚀), 200
Sound intensity and loudness(声音的强度和响度), 349, 350
Spread of influenza(流行性感冒的扩散), 373
Stopping distance on glare ice(在薄冰上的刹车距离), 54, 155
Stress factors(压力系数), scaling(按比例换算～), 28
Surface area(表面积)
body(人体～), 272, 277, 502, 509
and mass(～与质量), 74
Gabriel's horn(Gabriel 喇叭的～), 480
Tale of the tape, baseball (磁带记录棒球的轨迹), 183
Temperature(温度, 体温), 398, 522
average monthly high in Dallas(在达拉斯平均每月的最高～), 84
during an illness(患病期间的～), 156, 164, 200
New York(纽约的～), 216, 398
Temperature-humidity heat index (温度-湿度热指标), 509
Territorial area of an animal (动物的栖息地), 73, 156
Time(时间), 373
Tumor(肿瘤), volume(～的体积), 150
U. S. energy consumption(美国能源消耗), 26
Velocity(速度), 148, 149
average(平均～), 121
Weight(重量, 体重)
body(人体的～), 87
brain(脑髓的～), 53
gain(～增长), 560, 562
loss(衰减), 342
on the moon(在月球上的～), 43
muscle(肌肉的～), 53, 87
Wind speed of a tornado(龙卷风的风速), 502
Zipf's Law(Zipf 定律), 74

社会科学

Beef consumption(牛肉消费), 344
Brentano-Stevens Law(Brentano-Stevens 定律), 489
Diffusion of information(信息的扩散), 331

Divorce(离婚), 413
Ebbinghaus learning model(衰减记忆模型), 300
Forgetting(遗忘), 312, 316, 344
Gravity model(引力模型), 498
Home computer time(在家用计算机上的时间), 89, 91, 216
Hullian learning model (赫尔学习模型), 316, 331, 357
Intelligence quotient(智商), 503
Learning curve(学习曲线), 399, 429
Learning rate(学习速率), 426
Love(爱好), three aspects(～的三个方面), 216
Marriage age, median(平均结婚年龄), 55, 157
Maze(迷宫), time in(在～中的时间), 465
Memory(记忆力), 181, 363, 373, 399, 407
Population growth (人口增长, 种群增长), 121, 156, 164, 562
average(平均～), 399
Power Law of Stimulus-Response(刺激-反应的幂法则), 489
Reading ease(易读程度), 509
Rumor, spread of(谣言的传播), 331
Stimulus-response model (刺激-反应模型), 486, 489
Studying, results of(学习成绩), 79, 88, 399
Telephone calls between cities (在城市之间的电话), 498
Test score distribution(测验分数的分布), 476
Urban population(都市人口), 55
Walking speed(步行速度), 316
Weber-Fechner Law(Weber-Fechner 定律), 486

一般兴趣

Bowling scores(保龄球分数), 433, 476
Bungee jumping(蹦极跳跃), 440
Cost of fencing(栅栏的成本), minimizing(～最小化), 264
Earned-run average(得分平均值), 233
Grade average(平均成绩), 562
Grade predictions(评分的预测), 530
High jump(跳高), predicting world record(预测～世界纪录), 530
Light(光线), maximizing(使～最好), 264
Mile run(一英里跑), predicting world record(预测～世界纪录), 530
Related rates(相关变化率), 278, 280, 282
SAT scores(SAT 分数), 475
View to the horizon(眺望地平线), 157
Volume (体积), maximizing (～最大化), 251, 262, 264
Wind chill temperature(风寒温度), 503

上机技术的深入应用

The Business of Motion-Picture Box-Office Revenue (科幻影片的票房收入), 360
Curve Fitting and the Volume of a Bottle of Soda(曲线拟合与汽水瓶的体积), 493
Financial Predictions for Sherwin-Williams, Intel, Sprint, and The Gap(关于 Sherwin-Williams, Intel, Sprint 和 The Gap 公司的财务预测), 430
Maximum Sustainable Harvest (可持续最大捕获量), 283
Minimizing Employees' Travel Time in a Building(在大厦内雇员的行走时间最小化), 545
Path of a Baseball: The Tale of the Tape(棒球的轨迹：磁带记录), 181
Payrolls of Professional Basketball Teams(职业篮球队员的薪金), 91

2007/08/16

上机技术演练索引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致.

下述索引按照课题列出了 64 个供选学的上机技术演练. 这些上机技术演练穿插在课文的适当位置，给出注释，且用虚线框起来. 其中包括引导性探索和练习，解释并引导使用科技手段去探究问题. 在前言中介绍过，上机技术演练专项、习题中的上机技术演练习题，以及上机技术的深入应用等自成一个技术整体而列入课程的教学内容.《Graphing Calculator Manual》(绘图计算器手册)对于学生是有用的，该手册汇集了某些计算器模型的按键指令.

1. 介绍绘图计算器的使用：窗口与图形 7
2. TABLE 选项 18
3. 图形与函数值 21
4. 作分段函数的图形 23
5. TRACE 选项 25
6. 确定定义域和值域 35
7. 探索：目检斜率 41
8. 探索 $f(x)=mx+b$ 中的 b 44
9. 探索 x 截距和解 59
10. 解多项式方程 61
11. 有理函数的图形 64
12. 作根式函数的图形 67
13. 求平衡点 71
14. 线性回归：求一个线性函数与一组数据拟合 79
15. 用回归建立数学模型：求二次函数或其他多项式函数与一组数据拟合 81
16. 利用 TABLE 选项和 TRACE 选项求极限 96
17. 探索：曲线的切线 124
18. 曲线与切线 131
19. 数值求导法与切线的画法 134
20. 关于数值求导和画切线的其他方法 139
21. 探索：常值函数的导数 140
22. 探索：和的导数 142
23. 水平切线 144
24. 商业：边际收益、边际成本和边际利润 152
25. 用图示法验证导数 160
26. 商业：需求与收益 161
27. 探索：递增函数和递减函数及其导数 187
28. 探索：相对极值与临界点 194
29. 求相对极值 195

30. 探索：凹性 203
31. 探索：相对极值与一阶导数和二阶导数 205
32. 探索：拐点 208
33. 验证极限 219
34. 垂直渐近线 223
35. 水平渐近线 224
36. 斜渐近线 225
37. 求 x 截距和 y 截距 226
38. 求绝对极值 238
39. 求绝对极值 240
40. 求绝对极值 244
41. 探索练习：总存货成本最小化 258
42. 探索：逼近 e 292
43. 探索：求 $f(x)=e^x$ 的导数 293
44. 作对数函数的图形 302
45. 解指数方程 307
46. 作对数函数的图形 308
47. 探索：求 $f(x)=\ln x$ 的导数 308
48. 探索练习：增长 320
49. 指数回归：建立世界人口的增长模型 323
50. 探索：指数增长与衰减 333
51. 经济学：便携式收音机的需求 352
52. 探索：原函数 368
53. 探索练习：求面积 376
54. 近似计算定积分 384
55. 用图示说明函数的平均值 395
56. 求以两个图形为边界的面积 404
57. 求平衡点 434
58. 探索：消费者盈余 436
59. 探索：连续资金流量 442
60. 探索：累积现值 451
61. 探索：概率密度函数 458
62. 探索：标准正态分布 471
63. 绘图器上的统计学 475
64. 线性回归 528

索 引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致.

A

Absolute maximum or minimum (绝对极大值或极小值), 235, 242
Absolute-value function (绝对值函数), 65, 75
Absorption, coefficient of (吸收系数), 342
Acceleration (加速度), 149
Accumulated present value (累积现值), 445, 446, 451
Addition of exponents (指数的加法), 553
Addition principle (加法原理), 556
Algebra (代数)
  exponential notation (指数记号), 551-552
  factoring (分解因式), 555
  multiplication (乘法), 554-555
  properties of exponents (指数的性质), 552-554
  rational equations (有理方程), 557-559
  solutions to equations (解方程), 556-557
  solutions to inequalities (解不等式), 559-560
Algebraic-graphical connection (代数法与图示法的关系), 59
Anticlastic curve (马鞍曲线), 515
Antiderivative (原函数), 364
  as area under a curve (～看作曲线下的面积), 378, 379
  general form (～一般形式), 365
  graph of (～的图形), 368
  as indefinite integral (～看作不定积分), 365
Antidifferentiation (反微分), 364
  as integration (～看作积分), 365
Applications (应用, 见应用索引)
Approximation of definite integral (定积分的近似计算), 387, 399, 400
Area (面积)
  between curves (曲线间的～), 402
  maximizing (最大化), 249
  under a curve (曲线下的～), 377-379, 382, 387
Asymptotes (渐近线)
  horizontal (水平～), 222
  oblique (斜～), 224, 225
  vertical (垂直～), 221
Average cost (平均成本), 153
Average growth rate (平均增长率), 121
Average rate of change (平均变化率), 48, 114
  and difference quotient (～与差商), 116, 147
Average value of a function (函数的平均值), 394
Average velocity (平均速度), 121, 148
Axes (轴), 4, 499

B

Base (底)
  of an exponential expression (指数表达式的～), 551
  of an exponential function (指数函数的～), 287
  logarithmic (对数的～), 301
Beer-Lambert Law(Beer-Lambert 定律), 342
Binomials (二项式), multiplying (乘法), 554
Book value (账面值), 52
Boundary condition (or value) (边界条件(或值)), 369
Break-even value (够本值), 50
Business applications (商业应用, 见应用索引)

C

CALC menu (**CALC** 菜单), 21
Capital(资本), marginal productivity of (～的边际生产率), 507
Carbon dating (碳定年代法), 335
Chain Rule (链式法则), 170
Change of variable (变量代换), 409
Cobb-Douglas production function (科布-道格拉斯生产函数), 507
Coefficient (系数)

  of absorption (吸收～), 342
  correlation (相关), 528
  of a polynomial function (多项式函数的～), 60
Common logarithms (常用对数), 304
Complex numbers (复数), 58
Composed function (复合函数), 169
Composition of functions (函数的复合), 169
  derivative of (～的导数), 170
Compound interest (复利, 见 Interest)
Concavity (凹性) 202, 203
CONNECTED mode (**CONNECTED** 模式), 64
Constant elasticity curve (定常弹性曲线), 356
Constant function (常值函数), 44
  derivative of (～的导数), 140
Constant of integration (积分常数), 365
Constant of proportionality (比例常数), 43
Constant times a function (常数与函数的乘积),
  derivative (～的导数), 141
Constrained maximum and minimum values (约束极大值和极小值), 532
Constraint (约束), 531
Consumer's surplus (消费者盈余), 435, 436
Continuity (连续性)
  and differentiability (～与可微性), 133
  over (or on) an interval (在一个区间上的～), 100, 102
  at a point (在一点处的～), 100, 102
  principles (～原理), 103
Continuous function (连续函数, 见 Continuity), 100
Continuous money flow (连续资金流量), 442
Continuous random variable (连续随机变量), 456
  expected value (期望值), 467
  exponentially distributed (指数分布), 462
  mean (均值), 468
  median (中值), 477
  normally distributed (正态分布), 471
    standardizing (标准化), 473
  standard deviation (标准差), 469
  standard normal distribution (标准正态分布), 471
  uniformly distributed (均匀分布), 462
  variance (方差), 469
Convergent improper integral (收敛的广义积分), 449
Cooling (冷却), 337
Coordinate system (坐标系)
  three-dimensional (三维), 499
Coordinates of a point(点的坐标), 4
Correlation coefficient(相关系数), 528
Correspondence(对应), 14, 15
Cost(成本, 见应用索引)
  average (平均～), 153
  fixed (固定～), 49
  marginal (边际～), 151, 269
  marginal average (边际平均～), 163
  total (总～), 49
  variable (变动～), 49
Critical point (临界点), 188
Cubic function (三次方程), 75
Cubic regression (三次回归), 82
Curve fitting (曲线拟合), 77
Curve sketching (曲线作图), 209, 226

D

D-test (D 判别法), 514
Dead Sea scrolls (死海古卷), 335, 336
Decay (衰减, 见应用索引), 333
  carbon dating (碳定年代法), 335
  half-life (半衰期), 334
  Newton's Law of Cooling (牛顿冷却定律), 337
  present value (现值), 337, 445
  radioactive (放射性～), 333
  rate (～率), 333
    relationship to half-life (～与半衰期的关系), 334
Decreasing functions (递减函数), 187
  derivative of (～的导数), 188
Definite integral (定积分), 379
  approximating (逼近～)
    as sum of rectangles (矩形的和～), 387
    using Trapezoidal Rule (利用梯形法则～), 400

2007/08/16

area between curves as (～作为曲线间的面积), 402
area under a curve as (～作为曲线下的面积), 379
in average value of a function (函数的算术平均值), 394
evaluating (～的计算), 380
as a limit of sums (～作为和的极限), 387
limits of integration (积分限), 380
properties (～的性质), 400, 401
Delta notation (Δ记号), 266
Demand for natural resources (自然资源的需求, 见应用索引), 443
Demand function (需求函数), 69
elasticity of (～的弹性), 351, 353
Density function (密度函数), probability (概率～), 459
joint (联合～), 541
Dependent variable (因变量), 25
Depletion of natural resources (自然资源的消耗, 见应用索引), 443
Depreciation (折旧法), 53
Derivative (导数), 126
Chain Rule (～链式法则), 170
checking graphically (用图形验证～), 160
of composition of functions (复合函数的～), 170
and concavity (～与凹性), 202, 203
of a constant function (常值函数的～), 140
of a constant times a function (常数乘函数的～), 141
of a decreasing function (递减函数的～), 188
of a difference (差的～), 142
of an exponential function (指数函数的～), 292, 294, 345
extended power rule (～广义幂法则), 166
higher-order (高阶～), 174-176
of an increasing function (递增函数的～), 188
as instantaneous rate of change (作为瞬时变化率的～), 150
Leibniz's notation (莱布尼茨记号), 137
of a logarithmic function (对数函数的～), 309-311, 347
Newton's notation (牛顿记号), 137
partial (偏～), 503, 504
power rule (～幂法则), 138
product rule (～乘积法则), 157
quotient rule (～商法则), 158
sum-difference rule (～和-差法则), 142
Derived function (导函数), 126
Detection threshold (检测阈), 486
Difference (差), derivative of (～的导数), 142
Difference quotient (差商), 116
using delta notation (～的Δ记号), 267
simplified (简化～), 117, 147
Differentiability of a function (函数的可导性), 126
and continuity (～与连续性), 133
Differential (微分), 270
Differential calculus (微分学), 126
Differential equation (微分方程), 318, 481
general solution (通解), 481
particular solution (特解), 482
separation of variables (变量分离), 483
solving (解), 481
verifying solutions (检验解), 482, 483
Differentiation (微分法), implicit (隐函数～), 273
Direct variation (正向变化), 43
Directly proportional (成正比), 43
Discounting (贴现), 337
Distributive laws (分配律), 554
Divergent improper integral (发散广义积分), 449
Division using exponents (指数除法), 553
Domain of a function (函数的定义域), 15, 32
Domain of a relation (关系的定义域), 16, 32
Domar's capital expansion model (Domar资本扩展模型), 488
DOT mode (**DOT**模式), 64
Double iterated integral (二重积分), 539
geometric interpretation (～的几何解释), 540
Doubling time (倍增时间), 320
relationship to growth rate (～与增长率的关系), 322
Rule of 70 (70规则), 322

DRAW menu (**DRAW**菜单), 134

E

e, 291, 292
as logarithmic base (～作为对数的底), 305
Ebbinghaus learning model (衰减记忆模型), 300
Economic ordering quantity (经济订购量), 261
Economics applications (经济应用, 见应用索引)
Effective annual yield (实际年收益), 332
Elastic demand (弹性需求), 353
Elasticity of demand (需求弹性, 见应用索引), 351, 353, 485
constant curve (常数曲线), 356
and maximum total revenue (～与最大总收益), 352
Endpoints of an interval (区间端点), 30
Equations (方程)
differential (微分～), 318, 481
exponential (指数～), 306
graphs of (～的图形), 4
logarithmic (对数～), 301
logistic (逻辑斯谛～), 326
as mathematical models (作为数学模型的～), 9
point-slope (点斜式～), 46
slope-intercept (斜截式～), 45
solution (～的解), 4
solving (解)
Addition Principle (加法原理), 556
differential (微分～), 481, 483
exponential (指数～), 306, 307
Multiplication Principle (乘法原理), 556
Principle of Zero Products (零积原理), 556
quadratic (二次～), 58
rational (有理～), 558
in two variables (两个变量的～), 4
of variation (变分～), 43, 64
Equilibrium point (平衡点), supply and demand (供给与需求), 70, 437
Equimarginal Productivity (等边际生产率), Law of (～法则), 538
Equivalent inequalities (等价不等式), 559
Expected value (期望值), 467
Experimental probability (试验概率), 454
Exponent (指数), 551
fractional (分数～), 66
integer (整数～), 552
negative (负～), 552
irrational numbers as (无理数作为～), 286
of one (1的～), 551
properties (～性质), 553, 554
rational (有理～), 66
of zero (零的～), 552
Exponential decay (指数衰减, 见Decay)
Exponential demand curve (指数需求曲线), 356
Exponential distribution (指数分布), 462
Exponential equation (指数方程), 306
Exponential function (指数函数), 287
base (底), 287
derivative (导数), 292, 294, 346
graph of (～的图形), 295, 296
properties (性质), 288, 289
Exponential growth (指数增长, 见Interest compounded continuously; Continuous money flow; Demand for natural resources; Population growth; Uninhibited population growth)
Exponential notation (指数记号), 551
Exponential regression (指数回归), 323
Extended power rule (广义幂法则), 166
Extryme value (极值)
absolute (绝对～), 235, 242
relative (相对～), 189, 190
Extreme-Value Theorem (极值定理), 236

F

Factoring (分解因式), 555
Factors (因子), 551
Family of curves (曲线族), 482
First coordinate (第一个坐标), 4
First-Derivative Test (一阶导数判别法), 192
Fi[illegible], 49

2007/08/16

Formula (公式), quadratic (二次～), 58
Fractional exponents (分数指数), 66
Frequency graph (频率图), relative(相关～), 455
Function (函数), 14, 15
absolute maximum or minimum value (～的绝对极大值或绝对极小值), 235
absolute-value (绝对值～), 65, 75
asymptotes (～渐近线), 221, 222, 224, 225
average rate of change (～平均变化率), 48, 116, 148
average value (～平均值), 394
composed (复合～), 169
composition (～复合), 169
concavity (～凹性), 202, 203
constant (常值～), 44, 140
continuous (连续～), 102
critical point (～临界点), 188
cubic (三次～), 75
decreasing (递减～), 187
demand (需求～), 69
dependent variable (～因变量), 25
derivative (导～), 126
derived (导出～), 126
differentiable (可导～), 126
domain (～定义域), 15, 16
expected value (～期望值), 467
exponential (指数～), 287
graph (～图形), 20, 24
implicit (隐～), 19
increasing (递增～), 186, 187
independent variable (～自变量), 25
inflection point (～拐点), 208
input (～输入), 16
intercepts (～截距), 225
inverse (反～), 302
joint probability density (联合概率密度～), 541
limit (～极限), 95
linear (线性～), 44, 75
logarithmic (对数～), 301
as a mapping (～作为映射), 498
maximum or minimum value (～极大值或极小值), 189, 235, 242, 512, 532
output (～输出), 16
piecewise (分段～), 22
polynomial (多项式～), 60
power (幂～), 60
with rational exponents (有理指数～), 66
probability density (概率密度～), 459
joint (联合～), 541
quadratic (二次～), 56, 75
quartic (四次～), 75
radical (根式～), 67
range (～值域), 15, 16
rational (有理～), 62, 217
reciprocal (倒数～), 19
relative maximum or minimum(～的相对极大值或相对极小值), 189
of several variables (多元～), 497
square-root (平方根～), 19, 66
squaring (平方～), 17
supply (供给～), 69
of two variables (二元～), 496
values (～值), 16, 496
vertical-line test (～竖直线检验法), 21, 22
zero of (～的零点), 61
Fundamental Theorem of Integral Calculus (积分学基本定理), 389

G

Gabriel's horn (Gabriel 的喇叭), 480
General form of an antiderivative (原函数的一般形式), 364
General solution (通解), 481
General-interest applications (一般兴趣应用, 见应用索引)
Grade (坡度), 48
Graph (图形), 3
of an absolute-value function (绝对值函数的～), 65, 75
of antiderivatives (原函数的～), 368

asymptotes (～的渐近线), 221, 222, 224, 225
of constant functions (常值函数的～), 44
of continuous functions (连续函数的～), 102
of an equation (方程的～), 4, 21
of exponential functions (指数函数的～), 295
of a function (函数的～), 20, 24, 191, 209
of a function of two variables (二元函数的～), 500
histogram (柱状～), 455
horizontal lines (水平线～), 41
inverses (反函数～), 302
of a linear function (线性函数的～), 44
of a logarithmic equation (对数函数的～), 302
as a mathematical model (以～为数学模型), 12
of natural logarithmic functions (自然对数函数的～), 308, 309
ordered pairs (有序对～), 4
parabola (抛物线～), 56, 57
of power functions (幂函数的～), 60
of a quadratic function (二次函数的～), 56, 57
of a rational function (有理函数的～), 62-64, 220
relative frequency (相对频率～), 455
sketching (作图), strategy (步骤), 209, 226
of a square-root function (平方根函数的～), 66, 67
vertical lines (竖直线～), 41
of $x=a$ ($x=a$ 的～), 40, 41
of $y=b$ ($y=b$ 的～), 40, 41
of $y=mx$ ($y=mx$ 的～), 42
of $y=m+bx$ ($y=m+bx$ 的～), 44
Grapher (绘图器), 7
$\int f(x)dx$ feature ($\int f(x)dx$ 选项), 384
and absolute extrema (～与绝对极值), 238, 240, 244
and area between curves (～与曲线间的面积), 404
and asymptotes (～与渐近线), 223
CALC menu (**CALC** 菜单), 21
and checking derivatives (～与验证导数), 160
CONNECTED mode (**CONNECTED** 模式), 64
correlation coefficient (相关系数), 528
cubic regression (三次回归), 81
definite integral (定积分), approximating (逼近), 384
differentiation (微分法), 136, 142
and domain (～与定义域), 35
DOT mode (**DOT** 模式), 64
DRAW menu (**DRAW** 菜单), 136, 139
DrawInv feature (DrawInv 选项), 302
dy/dx, 139
exponential regression (指数回归), 323
fMax, 195
fnInt feature (fnInt 选项), 384
fMin, 195
graphs (图形)
of equations (方程的～), 21
of logarithmic functions (对数函数的～), 302
of radical functions (根式函数的～), 67
of rational functions (有理函数的～), 64
INTERSECT feature (**INTERSECT** 选项), 61, 307
and limits (～与极限), 96
linear regression (线性回归), 79
MATH menu (**MATH** 菜单), 136
MAXIMUM feature (**MAXIMUM** 选项), 195
MINIMUM feature (**MINIMUM** 选项), 195
and normal distribution (～与正态分布), 475
and piecewise functions (～与分段函数), 23
pixels (像素), 7
quadratic regression (二次回归), 81, 82
and range (～与值域), 35
regression (回归), 79, 81, 323
and relative extrema (～与相对极值), 195
solving exponential equations (解指数方程), 307
statistics (统计学), 475
TABLE feature (**TABLE** 选项), 18
and tangent line (～与正切线), 136, 139, 144
TEST menu (**TEST** 菜单), 23
TRACE, 25
VALUE feature (**VALUE** 菜单), 21
viewing window (视窗), 7

2007/08/16

squaring (修正~), 41
standard (标准~), 7
Y-vars feature (Y-vars 选项), 21
ZERO feature (**ZERO** 选项), 61, 308
Zsquare, 41
Gravity model (引力模型), 498
Grouping (分组), factoring by (~分解法), 555
Growth rate of a population (人口增长率, 见 Uninhibited population growth), 150, 319
average (平均~), 121
relationship to doubling time (与倍增时间有关的~), 320

H

Half-life (半衰期), 334
Harvest (捕获量), maximum sustainable (可持续最大~), 283
Heat index (热指标), 509
Higher-order derivatives (高阶导数), 174, 175
Histogram (柱状图), 455
Home range of an animal (动物的栖息地范围), 68, 156
Horizontal asymptote (水平渐近线), 222
Horizontal lines (水平线), 41
slope (~的斜率), 47
tangent (~的切线), 126
Hullian learning model (赫尔学习模型), 316

I

Implicit differentiation (隐微分), 273
Implicit function (隐函数), 19
Improper integral (广义积分), 449, 450
Increasing function (递增函数), 186, 187
derivative of (~的导数), 188
Indefinite integral (不定积分), 365
Independent variable (自变量), 25
Inelastic demand (无弹性需求), 353
Inequalities (不等式), 559
solving (解~), principles for (~原理), 559
Infinite paint can (无穷的油漆罐), 480
Infinity (无穷大), 31
and limits (~与极限), 217
Inflection point (拐点), 208
Initial condition (or value) (初始条件(或值)), 369
Input of a function (函数的输入), 16
Instantaneous rate of change (瞬时变化率), 148, 150
Instantaneous velocity (瞬时速度), 148
Integral (积分, 见 Definite integral; Integration), 365
definite (定~), 379
double iterated (二重~), 539
evaluating (计算~), 380
improper (广义~), 449, 450
indefinite (不定~), 365
sign (~号), 365
triple iterated (三次~), 542
Integrand (被积函数), 365
Integrating (积分, 见 Integral Integration), 380
Integration (积分), 365
and area (~与面积), 379, 402
with a boundary condition (or value) (具有边界条件(或值)的~), 369
using change of variable (使用变量代换法~), 409
checking (验证~), 367
constant (~常数), 366
formulas (~公式), 366, 415, 422, 423
with an initial condition (or value) (具有初始条件(或值)的~), 369
limits of (~限), 380
multiple (重~), 539-541
by parts (分部~), 415
repeated (累次~), 418
tabular (列表~), 420
rules (properties) (法则(性质)), 366
using substitution (使用换元法~), 409
using tables (使用表~), 422
tabular (列表~), 420
techniques (~法), 409, 415, 422
Intercepts (截距), 59, 225
Interest (利息, 见应用索引)
compounded annually (一年计复利一次), 10

compounded continuously (永续复利), 320
effective annual yield (实际年收益), 332
compounded *n* times a year (一年计复利 *n* 次), 11
and e (~与 e), 291
Rule of 70 (70 规则), 322
INTERSECT feature (**INTERSECT** 选项), 61, 307
Interval notation (区间记号), 31
Inventory costs (存货成本), minimizing(最小化~), 257
Inverse function (反函数), 302
Inverse variation (逆变换), 64
Inversely proportional (反比例), 64
Irrational number as exponent (无理指数), 286

J

Joint probability density function (联合概率密度函数), 541

L

Labor (人力, 劳动力), marginal productivity of (~的边际生产率), 507
Lagrange multiplier (拉格朗日乘数), 532
Lagrange Multipliers (拉格朗日乘数), Method of (拉格朗日乘数法), 532
Law of Equimarginal Productivity (等边际生产率法则), 538
Least common multiple, LCM (最小公倍数), 557
Least-Squares Assumption (最小二乘假设), 525
Leibniz, Gottfried Wilhelm (莱布尼茨), 137
notation for derivative (~导数记号), 137
notation for integral (~积分记号), 365
Libby, Willard E, 335
Life-sciences applications (生命科学应用, 见应用索引)
Limit of a function (函数的极限), 95
and continuity (~与连续性), 102
existence of (~的存在性), 95
and function value (~与函数值), 102
at infinity (在无穷处~), 218
infinity as (无穷大作为~), 217
principles (~原理), 108
Limited population growth (有限人口增长), 326
Limits (极限, 见 Limit of a function
Limits of integration (积分限), 380
Line (直线, 线)
horizontal (水平~), 41
point-slope equation (~的点斜式方程), 46
regression (回归~), 525
secant (割~), 114
slope (~斜率), 42, 44, 47
slope-intercept equation (~斜截式方程), 45
of symmetry (对称~), 56
tangent (切~), 125, 136
vertical (竖直~), 41
Linear function (线性函数), 44, 74
Linear regression (线性回归), 79
Logarithm (对数, 见 Logarithmic function), 301
common (常用~), 304
finding (求~), using a calculator (使用计算器~), 305-307
natural (自然~), 305
properties (~性质), 303, 305, 345
Logarithmic base (对数的底), 301
Logarithmic equation (对数方程), 300
Logarithmic function (对数函数, 见 Natural logarithmic function), 300
derivative (~导数), 309, 310, 347
graph (~图形), 302, 307, 308
Logistic equation (逻辑斯谛方程), 326
Lot size (批量), 257

M

Mapping (映射), 498
Marginal cost (边际成本, 见应用索引), 151, 269
Marginal productivity (边际生产率), 507
Marginal profit (边际利润, 见应用索引), 152, 269
Marginal revenue (边际收益, 见应用索引), 151, 269
Marginalist School of Economic Thought (经济思想边际主义学院), 151
MATH menu (**MATH** 菜单), 134

2007/08/16

Mathematical model (数学模型，见 Curve fitting; Regression), 9, 12
Maximum sustainable harvest (可持续最大捕获量), 283
Maximum value of a function (函数的极大值)
absolute (绝对), 235, 242
constrained (约束～), 531
relative (相对), 189, 512
Maximum-Minimum Principle 1 (极大-极小值原理 1), 236
Maximum-Minimum Principle 2 (极大-极小值原理 2), 240
Maximum-minimum problems (极大-极小值问题),
strategy for solving (～求解步骤), 251
Mean of a continuous random variable (连续随机变量的均值), 468
Median of a continuous random variable (连续随机变量的中值), 477
Minimum value of a function (函数的极小值)
absolute (绝对), 235, 242
constrained (约束～), 531
relative (相对), 189, 512
Model (模型), mathematical (数学～，见 Curve fitting; Regression), 9, 12
Money flow (资金流量), continuous (连续～),
amount of (～总额), 442
accumulated present value (～累积现值), 445, 446, 451
Motion (运动), uniform (匀速～), 153
Multiple integration (重积分), 538-541
Multiplication (乘法)
of binomials (二项式～), 555
distributive laws (～分配律), 554
and exponents (～和指数), 553, 554
Multiplication Principle (乘法原理), in equation solving (解方程中的～), 556

N

Natural logarithmic function (自然对数函数)
derivative (～的导数), 309, 311
graph (～的图形), 308
Natural logarithms (自然对数), 305
finding (求～), using a calculator (使用计算器～), 306
as a limit(～作为极限), 347
properties(～的性质), 305
Natural resources (自然资源), demand and depletion (～的需求与消耗，见应用索引), 442, 443
nDeriv, 134
Negative exponents(负指数), 552
Newton, Sir Isaac(牛顿), 137
Newton's Law of Cooling(牛顿冷却定律), 337
Normal distribution (正态分布), 470, 471
standardizing (标准～), 473
Numbers (数)
complex (复～), 58
real (实～), 29
split (裂～), 62

O

Oblique asymptote (斜渐近线), 224, 225
One as an exponent (1 为指数), 551
Ordered pair (有序对), 4
Ordered triple (有序三元数组), 499
Output of a function (函数的输出), 16

P

Parabola (抛物线), 6, 56
Paradox of Gabriel's horn (Gabriel 喇叭的悖论), 480
Partial derivative (偏导数), 503, 504
geometric interpretation (～几何解释), 506
second-order (二阶～), 510, 511
Particular solution (特解), 482
Parts (分部), integration by (～积分法), 415
repeated (累次～), 418
tabular (列表～), 420
Physical-sciences applications (物理学应用，见应用索引)
Piecewise function (分段函数), 22
Pixels (像素), 7

Point (点)
continuity at (在～连续), 100, 102
coordinates of (～的坐标), 4, 499
Point of inflection (拐点), 208
Point-slope equation (点斜式方程), 46
Poiseuille's Law (普瓦瑟耶定律), 277, 278
Polynomial function (多项式函数), 60
Population growth (人口增长，种群增长，见应用索引)
doubling time (～的倍增时间), 320
limited (有限的～), 326
quadrupling time (～的四倍时间), 332
tripling time (～的三倍时间), 332
uninhibited (无约束～), 317
Power function (幂函数), 60
derivative of (～的导数), 138
graph of (～的图形), 60
with rational exponents (指数为有理数的～), 66
Power Law of Stimulus-Response (刺激-反应的幂法则), 489
Power rule (幂法则), 138
extended (广义～), 166
Present value (现值), 337, 445
accumulated (累积～), 445, 446
Price-earnings ratio (价格-收益比), 502
Principle of Zero Products (零积原理), 556
Principles (原理), inequality solving (不等式求解～), 559
Probability (概率，见 Continuous random variable), 454
continuous random variable (连续随机变量～), 456
density function (～密度函数), 459
constructing (～的构造), 460
joint (联合～), 541
experimental (实验～), 454
relative frequency graph (histogram) (～相对频率图(柱状图)), 455
theoretical (理论～), 454
Producer's surplus (生产者盈余), 437
Product rule (乘积法则), 157
Productivity(生产率), marginal (边际～), 507
Profit (利润), marginal (边际～，见应用索引), 152, 269
Profit-and-loss analysis (损益分析，见应用索引)
Properties of the definite integral (定积分的性质), 400, 401
Properties of exponential functions (指数函数的性质), 288, 289
Properties of exponents (指数的性质), 552-554
Properties of logarithms (对数的性质), 302-304, 347
Proportional (比例)
directly (正～), 43
inversely (反～), 64

Q

Quadratic formula (二次公式), 58
Quadratic function (二次函数), 56, 75
Quadratic regression (二次回归), 81, 82
Quadrupling time (四倍时间), 332
Quartic function (四次函数), 75
Quotient rule (商法则), 158, 159

R

Radical function (根式函数), 67
Radioactive buildup (放射物的累积), 447, 453
Radioactive decay (放射性衰减，见应用索引), 333
Raising a power to a power (乘方再乘方), 554
Random variable (随机变量), continuous (连续～)
Range (值域)
of a function (函数的～), 15, 16, 32
of a relation (关系的～), 16, 32
Rate of change (变化率)
average (平均～), 48, 116, 147
and derivative (～与导数), 150
growth rate of a population (人口增长率，种群增长率), 150, 319
instantaneous (瞬时～), 148
Rate of exponential growth (指数增长率), 319
Rates(变化率), related (相关～), 275
Rational exponents (有理指数), 66

2007/08/16

Rational expression (有理式), 558
Rational function (有理函数), 62, 217, 558
  asymptotes (～的渐近线), 221
  graph of (～的图形), 62-64, 220, 221
  limits involving (涉及～的极限), 217, 218
Real numbers (实数), 29
Reciprocal function (倒数函数), 19
Regression (回归)
  correlation coefficient (～相关系数), 528
  cubic (三次～), 81, 82
  exponential (指数～), 323
  linear (线性～), 79
  quadratic (二次～), 82
Regression line (回归线, 见 Regression), 525
  for an arbitrary collection of data points (对任意采集的数据点的～), 527
Related rates (相关变化率), 275
Relation (关系), 16, 32
Relative extrema (相对极值, 见 Relative maximum or minimum), 189, 195
Relative frequency graph (相关频率图), 455
Relative maximum or minimum (相对极大值或相对极小值), 189, 512
  D-test (*D* 判别法), 514, 515
  First-Derivative Test (一阶导数判别法), 192
  on a grapher (在绘图器上～), 195
  Second-Derivative Test (二阶导数判别法), 204
Reproduction curve (繁殖曲线), 283
Revenue (收益), marginal (边际～, 见应用索引), 151, 269
Reynolds number (雷诺数), 316
Richter scale (里氏标度), 349
Roster notation (枚举记号), 29
Rule of 70 (70 法则), 322

S

Saddle point (鞍点), 514, 515
Salvage value (残值), 53
Scatterplot (散点图), 75
Secant line (割线), 114
Second coordinate (第二个坐标), 4
Second-Derivative Test (二阶导数判别法), 204
Second-order partial derivative (二阶偏导数), 510, 511
Separation of variables (变量分离), 483
Set (集合), 29
  notation (～记号), 29, 30
Set-builder notation (集合成员记号), 29, 30
Simplified difference quotient (简化差商), 117, 147
Sketching graphs (绘图), strategy for (～步骤), 209, 226
Slant (倾斜度, 见 Slope)
Slope (斜率), 42, 44, 47
  of a horizontal line (水平线的～), 47
  of a tangent line (切线的～), 126, 148
  of a vertical line (竖直线的～), 47
Slope-intercept equation (斜截式方程), 45
Social-sciences applications (社会科学应用, 见应用索引)
Solid of revolution (旋转体), 477
  volume (～体积), 478
Solution of an equation (方程的解), 4
Solving differential equations (解微分方程), 481
Solving equations (解方程, 见 Equations, solving)
Solving inequalities (解不等式), 559
Speed (速率), 121
Split numbers (裂数), 62
Square-root function (平方根函数), 19, 66
Squaring function (平方函数), 17
Squaring a window (修正窗口), 41
Standard deviation (标准差), 469
Standard normal distribution (标准正态分布), 470
Standard viewing window (标准视窗), 7
Standardizing a normal distribution (正态分布标准化), 473, 474
Stimulus-response model (刺激－反应模型), 486, 489
Straight-line depreciation (直线折旧法), 53
Substitution in integration (换元积分法), 408
Subtraction of exponents (指数相减), 553

Sum-difference rule (和－差法则), 142
Summation notation (和号), 387
Supply function (供给函数), 69
Surface area (表面积), minimizing (最小化～), 253
Surface of revolution (旋转面), 477
Surplus (盈余, 见 Consumer's surplus; Producer's surplus)
Symmetry (对称), line of (～轴), 56

T

Tables (表)
  on a grapher (绘图器上的～), 18
  integration using (使用～积分), 422
Tabular integration by parts (列表分部积分), 420
Tangent line (切线), 123
  definition (～的定义), 125
  on a grapher (绘图器上的～), 136
  horizontal (水平～), 124
  slope (～斜率), 126, 143
  vertical (竖直～), 133
Techniques of integration (积分法), 408, 414, 422
Technology connection (上机技术演练, 见上机技术演练索引)
Tent shape (帐篷形状), perfect (完美的～), 515
TEST menu (**TEST** 选项), 23
Theoretical probability (理论概率), 454
Three-dimensional coordinate system (三维坐标系), 499
Threshold value of stimulus (刺激的阈值), 486
Total cost (总成本), 49
Total revenue (总收益), 353
TRACE feature (**TRACE** 选项), 25
Trade-in value (折旧价), 52, 53
Trapezoidal Rule (梯形法则), 399, 400
Triple iterated integral (三重积分), 542
Tripling time (三倍时间), 332
Turning point (转向点), 56

U

Uniform distribution (均匀分布), 462
Uniform motion (匀速运动), 153
Uninhibited population growth model (无约束人口增长模型, 无约束种群增长模型, 见应用索引), 317
  doubling time (倍增时间), 320
  growth rate (增长率), 150, 319
Unit elasticity (单位弹性), 353
Utility (效用), 93, 434

V

VALUE feature (**VALUE** 选项), 21
Values of a function (函数值), 16, 496
Variable costs (变动成本), 49
Variables (变量)
  change of (～代换), 409
  continuous random (连续随机～), 456
  dependent (因～), 25
  independent (自～), 25
  separating (分离～), 483
Variance (方差), 469
Variation (变化)
  constant of (～常数), 43
  direct (正向～), 43
  inverse (逆～), 64
Velocity (速度, 见应用索引), 121, 148, 149
Vertex (顶点), 56
Vertical asymptote (垂直渐近线), 221
Vertical lines (竖直线), 40
  slope (～斜率), 47
Vertical tangent (竖直切线), 133
Vertical-line test (竖直线检验法), 21, 22
Viewing window (视窗), 7
  squaring (修正～), 41
Volume (体积)
  maximizing (～最大化), 251
  solid of revolution (旋转体～), 478

W

Weber-Fechner Law (Weber-Fechner 定律), 486
W[illegible]rature (风寒温度), 593

2007/08/16

Window（窗口），viewing（视窗），7
squaring（修正～），41

X

x-axis（x 轴），4
x-intercept（x 截距），59，225

Y

y-axis（y 轴），4
y-intercept（y 截距），225
Yield of a stock（股票收益），502
Y-vars feature（Y-vars 选项），21

Z

z-axis（z 轴），499
Zero as an exponent（零为指数），552
ZERO feature（**ZERO** 选项），61，308
Zero of a function（函数的零点），61
Zero Products（零积），Principle of（～原理），556
Zsquare feature（Zsquare 选项），41

教师服务登记表

尊敬的老师：

您好！

感谢您购买了我们的 ____________ 作为教材。

机械工业出版社华章公司本着为服务教育的出版原则，与Prentice-hall、Addison-Wesley、Thomson、McGraw-hill、ITP、Dryden等多家世界知名出版公司合作，出版了大量的经济管理类影印和翻译版教材。为进一步加强与高校教师的联系与沟通，更好地为高校教师服务，请您协助填妥此表，以便今后我们定期向您寄送华章公司最新的图书出版信息，为您的教学、论著或译著的出版提供可能的帮助。欢迎您对我们的教材和服务提出宝贵的意见。感谢您的大力支持与帮助！

姓 名：______ 性 别：____ 年 龄：____ 职 务：______ 职 称：______

学 校：______ 学 院：______ 系 别：______

通信地址：______ 邮 编：______

电 话：（办）______（家）______ 手 机：______

E-mail：______

国外进修或讲学经历：______

◎ 授课情况及采用的教材

1. 教授课程：______ 学生层次（本、MBA、硕）人数/年：____ 开课时间（春、秋）
   现采用教材：______ 作 者 ______ 版 本（中、英）● 出版社 ______
2. 教授课程：______ 学生层次（本、MBA、硕）人 数/年： 开课时间（春、秋）
   现采用教材：______ 作 者 ______ 版 本（中、英）● 出版社 ______
3. 教授课程：______ 学生层次（本、MBA、硕）人 数/年： 开课时间（春、秋）
   现采用教材：______ 作 者 ______ 版 本（中、英）● 出版社 ______

○ 您的研究领域及将开设的课程：

○ 您是否计划或正在编著教材？教材的方向？计划与那家出版社合作出版？

○ 您是否愿意从事图书翻译工作？愿意翻译图书的方向？

填妥后请选择以下任何一种方式将此表返回：（如方便请赐名片）

地 址：北京市西城区百万庄南街1号 华章公司收 邮编：100037
电 话：(010) 88379624 88378995 传真：(010) 68995260
E-mail: marketing@hzbook.com

F4401000214947